FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría Analítica

Práctica N° 3 - Plano y recta en el espacio

1. Halla la ecuación del plano:
   a) que contiene al punto $P(5,1,3)$ y es perpendicular al vector $\bar{n}$ de origen $Q(1,2,3)$ y extremo $R(2,4,12)$.
   b) que contiene a los puntos $A(3,5,2)$, $B(2,3,1)$ y $C(-1,-1,4)$.
   c) que es perpendicular en su punto medio, al segmento que une los puntos $P(1,2,-1)$ y $Q(3,0,-3)$.
   d) que contiene al punto $A(2,3,-5)$ y es paralelo al plano $\alpha)$ $x+y-4z=1$.
   e) que contiene al punto $B(3,6,12)$ y es perpendicular al eje y.
   f) que contiene a los puntos $C(2,-1,1)$ y $D(3,1,2)$ y es paralelo al eje y.
   g) que contiene al punto $E(3,4,-5)$ y es paralelo a los vectores $\bar{u}=(3,1,-1)$ y $\bar{v}=(1,-2,1)$.

2. Si un plano tiene ecuación $2x+3y+z+4=0$, encuentra escalares s y t no nulos de manera que el vector $\bar{v}=s\bar{j}+t\bar{k}$ sea paralelo a un plano perpendicular al dado.

3. Representa gráficamente los siguientes planos: $\pi_1)$ $2x+y-1=0$, $\pi_2)$ $x-4y=0$, $\pi_3)$ $x-z=0$, $\pi_4)$ $3y=0$, $\pi_5)$ $2z+3=0$, $\pi_6)x=2$, $\pi_7)$ $2y+4z-4=0$, $\pi_8)$ $4x+6y+3x-12=0$.

4. Encuentra la intersección entre los tres planos dados en cada ítem, y en cada caso determina si el sistema es compatible (determinado o indeterminado) o incompatible. (*Recuerda que puedes hacer un análisis previo de las ecuaciones, para ver si es necesario realmente resolver el sistema de ecuaciones*)

   a) $\begin{cases} 4x+y+3z+6=0 \\ x+\frac{1}{4}y+\frac{3}{4}z+8=0 \\ 24x+6y+18z+2=0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z+6=0 \\ 4x+2y+9z+3=0 \\ 12x+4y+3z+1=0 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x+7y+2z+1=0 \\ 15x+35y+10z+3=0 \\ 9x+21y+6z+3=0 \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+2y-z-1=0 \\ x-4y+3z-1=0 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} 5x+3y+6z+9=0 \\ 2x+7y+z+8=0 \\ 10x+6y+12z+18=0 \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} \frac{1}{7}x+y+\frac{1}{21}z+2=0 \\ x+7y+\frac{1}{3}z+14=0 \\ 3x+21y+z+42=0 \end{cases}$

5. Calcula la distancia del punto $A(1,0,-2)$ al plano $\pi)$ $2x-4y+3z-1=0$, y encuentra el punto de π que está a dicha distancia de A.

6. Halla la ecuación del plano:
   a) que contiene a las rectas $r)$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=5-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ y $s)$ $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-5}{6}$.
   b) que contiene a las rectas $r)$ $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1+t \\ z=5-3t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$ y $s)$ $\begin{cases} x=3-2t \\ y=4-2t \\ z=2+6t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$
   c) que contiene al origen y a la recta s de $b)$.
   d) que contiene al punto $P(8,-2,3)$ y es perpendicular a la recta r de $a)$.

7. Indica cuáles de las siguientes rectas están contenidas o son paralelas al plano $\pi)$ $3x-y+4z-2=0$

   $r_1)$ $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-2}$ $\quad$ $r_2)$ $x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}$ $\quad$ $r_3)$ $\begin{cases} x=2-t \\ y=4+t \\ z=-5t \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$

   En el caso de que haya una paralela y no contenida en π, calcula su distancia a dicho plano.

8. Dado el plano $\pi)\ 5(x-1)-3(y-1)-(z+4)=0$:

   a) demuestra que dicho plano contiene a la recta $l_1)\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$.

   b) halla un número c real tal que la recta $l_2)\ \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{c}$ resulte paralela a π.

   c) analiza si existe un número c real tal que $l_2\subset\pi$. Justifica tu respuesta.

9. Encuentra los tres planos que contienen a la recta dada en cada ítem y son perpendiculares a los planos coordenados (planos proyectantes)

   a) $r_1)\begin{cases} 5x-4y-9z=8 \\ x+4y+3z=4 \end{cases}$ *b*) $r_2)\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=2t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$

10. Encuentra la ecuación de una recta que es perpendicular al plano $\pi)\ 3x-2y+z=5$ y que contiene al punto $P(4,1,5)$. Analiza previamente cuántas soluciones hay a este problema.

11. Halla la intersección de la recta $s)\begin{cases} x=1-t \\ y=2-3t \\ z=4+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$, con el plano $\alpha)\ x-3y+2z+7=0$. Calcula el ángulo que ellos forman.

12. Dados la recta $l)\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=5+\lambda \end{cases}, \ \lambda\in\mathbb{R}$ y el plano $\pi)\ 2x+3y-z=1$:

    a) determina A tal que $l\cap\pi=\{A\}$;

    b) encuentra un plano que contenga a A y sea perpendicular a l.

13. *a*) Encuentra las ecuaciones paramétricas de la recta r que es intersección de los planos $2x+3y+7z-7=0$ y $x-3y-10z=-1$.

    b) Calcula la distancia del punto $P(1,2,3)$ a r.

14. Halla la ecuación del plano que contiene a la recta intersección de los planos $\pi_1)\ x+2y+3z-5=0$ y $\pi_2)\ 3x-2y-z+1=0$ además verifica que:

    a) es paralelo al eje y.

    b) es perpendicular al plano $\alpha)\ x=1$.

    c) contiene al punto $P(2,1,0)$.

15. Dados los planos $\pi_1)\ 2x+y+z-1=0$ y $\pi_2)\ x-y+z=0$, y el punto $P(1,k,-2)$, encuentra la ecuación de la recta r tal que $P\in r$, $r\subset\pi_1$ y $r//\pi_2$.

16. Sean los planos $\alpha_1)\ x+y-1=0$ y $\alpha_2)\ 2x-z=0$ y los puntos $A(1,1,1)$ y $B(1,2,c)$,

    a) determina un número real c de modo que exista un plano que contenga a la recta que pasa por A y por B, y a la recta intersección entre α_1 y α_2:

    b) obtén la ecuación de dicho plano.

Ejercicios de exámenes finales

17. Dados los puntos $P_1(-3,2,2)$ y $P_2(7,-4,0)$, y la recta $r)\begin{cases} x+2y-z+5=0 \\ 2x+3y+z-1=0 \end{cases}$,

    a) verifica que la recta determinada por P_1 y P_2 es paralela a r;

    b) calcula la distancia entre ellas;

    c) halla el plano que las contiene.

18. Sean $r)\begin{cases} 2x+y-3z+1=0 \\ -x+2y+z-3=0 \end{cases}$ y $\pi)\ x-2y-z+5=0$.

    a) Verifica que r es paralela a π.

    b) Calcula la distancia entre r y π.

c) Halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π.

19. Dadas las rectas $r)\begin{cases}3x+y-z=0\\x+2y+z+2=0\end{cases}$ y $s)\ x-2=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2}$,

a) verifica que son secantes y halla su punto intersección;

b) halla las ecuaciones de los planos paralelos al determinado por las dos rectas y que se encuentran a 10 unidades del origen de coordenadas;

c) calcula la distancia del punto $P(2,1,0)$ a la recta s.

20. Dadas las rectas $r)\begin{cases}x=-1+4t\\y=\ \ 2-3t\\z=\ \ \ \ 2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$ y $s)\ x-2=\dfrac{y-2}{-4}=\dfrac{z}{3}$,

a) define a r como intersección de dos planos proyectantes;

b) determina la posición relativa de las rectas r y s, justificando adecuadamente;

c) calcula la distancia entre r y s;

d) da la ecuación del plano π tal que $\pi\perp s$ y $P(-1;2;0)\in\pi$.

21. Dada la recta $r)\dfrac{x-1}{k}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{1}$, y los puntos $A(2,0,1)$, $B(0,1,0)$ y $C(1,1,1)$:

a) halla el valor de k de manera que r resulte paralela al plano π determinado por los puntos A, B y C;

b) para dicho valor de k,

i. calcula la distancia entre r y π;

ii. halla el plano α que contiene a r y es perpendicular a π.

22. Dado el punto $P(2,-1,0)$ y la recta $r)\begin{cases}x+y=0\\x-z=-1\end{cases}$,

a) halla el plano π que contiene a P y a r;

b) calcula la distancia entre r y el eje y;

c) halla el punto de r más cercano al origen de coordenadas.

23. Dadas las rectas $r)\begin{cases}x+y=1\\3y-z=5\end{cases}$ y $s)\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=1-5t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$,

a) prueba que son alabeadas;

b) halla las ecuaciones de dos planos paralelos entre sí que contengan respectivamente a cada una de las rectas dadas;

c) halla la distancia entre ellas.

Esta práctica está basada en la que fuera elaborada por la Ing. Julia Cabral, y revisada por la Prof. Mariel Ugarte, en el marco de su adscripción