

CURSO INTRODUCTORIO 2015

MATEMÁTICA

•Napolitano, Mónica Muriel

Con la colaboración de:

•Sibuet, Flavia Muriel

•Vital, María Beatriz

Napolitano, Mónica Muriel

Matemática. Curso Introductorio 2015 : Área Ingreso. Secretaría Académica de la FCEIA-UNR / Mónica Muriel Napolitano ; con colaboración de Flavia Muriel Sibuet y María Beatriz Vital. - 1a ed. - Rosario : Editorial Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, 2014.

164 p. ; 27x21 cm.

ISBN 978-987-3662-04-1

1. Matemática . 2. Enseñanza Universitaria. I. Sibuet, Flavia Muriel, colab. II. Vital, María Beatriz, colab. III. Título

CDD 510.711

Fecha de catalogación: 31/07/2014

Título:

Matemática. Curso Introductorio 2015.

Edición N°1

1150 ejemplares

Copyright © 2014

Napolitano, Mónica Muriel

Sibuet, Flavia Muriel

Vital, María Beatriz

ISBN 978-987-3662-04-1

Queda hecho el depósito que prevé la Ley N°11723.

Reservado todos los derechos.

Esta edición se terminó de imprimir en el mes de Julio de 2014

en los talleres gráficos de Sudamérica Impresos.

Colón 3063 - 2000 Rosario - República Argentina.

INTRODUCCIÓN

En Matemática es fundamental que el conocimiento adquirido en un determinado contexto sea trasladado al aprendizaje de situaciones nuevas.

En nuestra Institución la Matemática es usada en todas sus formas y atraviesa a todas las carreras.

Por tal motivo, se pretende en este curso realizar una aproximación a contenidos curriculares del nivel medio que son base para materias que tienen a la Matemática como tema central o como herramienta de apoyo.

El material está organizado en nueve capítulos con contenidos teóricos y prácticos. Luego se presentan prácticas, divididas por capítulo, para que el alumno al finalizar pueda realizar una autoevaluación. Asimismo, se encuentra una práctica de carácter complementario y globalizador.

Van a poder encontrar muchos problemas, ya que la resolución de problemas:

- Facilita el aprendizaje de los conceptos.
- Ayuda a comprender el carácter dinámico de la Matemática.
- Estimula el pensamiento independiente.
- Reclama el gusto por descubrir, por cuestionar, por asumir el protagonismo del propio aprendizaje.
- Provoca satisfacción por el logro obtenido.

Resulta conveniente tener en cuenta al abordar la resolución de un problema las siguientes pautas:

- Tratar de entender a fondo el enunciado, con tranquilidad, a su ritmo.
- Analizar qué pide el problema, cuáles son sus incógnitas, cuáles son sus datos.
- Si es posible realizar un esquema, figura o diagrama.
- Probar, experimentar, buscar un problema semejante.
- Intentar diseñar una estrategia de solución.
- Llevarla a cabo, revisar el proceso, verificar.
- Reflexionar sobre lo que ha hecho y sacar conclusiones para el futuro.

Mónica M. Napolitano

CONTENIDOS

CAPÍTULO 1

Conjuntos.....pág. 1

CAPÍTULO 2

Números reales

2.1 Ampliación del campo numérico.....pág. 11

2.2 Operaciones en el conjunto de los números reales.....pág. 14

2.3 Expresiones algebraicas.....pág. 25

2.4 Representación geométrica de los números reales.....pág. 33

CAPÍTULO 3

Números Complejos.....pág. 41

CAPÍTULO 4

Ecuaciones

4.1 Ecuaciones lineales.....pág. 49

4.2 Ecuaciones cuadráticas.....pág. 51

CAPÍTULO 5

Geometría.....pág. 59

CAPÍTULO 6

Trigonometría

6.1 Resolución de triángulos.....pág. 77

6.2 Funciones trigonométricas.....pág. 82

CAPÍTULO 7

Funciones

7.1 Función – Definición - Representaciones.....pág. 97

7.2 Funciones lineales.....pág. 105

7.3 Funciones cuadráticas.....pág. 107

CAPÍTULO 8

Sistemas de ecuaciones.....pág. 113

CAPÍTULO 9

Polinomios.....pág. 123

AUTOEVALUACIONES.....pág. 141

Miscelánea.....pág. 153

CAPÍTULO 1: CONJUNTOS

En matemática hay ciertas “ideas”, “representaciones” que no tienen una definición, preceden a una serie de definiciones, propiedades, teoremas y más. Dichas representaciones son denominadas “CONCEPTOS PRIMITIVOS”, a tales los aceptamos sin definición, son como un punto de partida

Los **conjuntos** son un ejemplo de esto. Cuando nos referimos a un conjunto asociamos esta palabra con colección de objetos, grupos de elementos.. Este concepto es uno de los más fundamentales de la matemática.

Los conjuntos, generalmente, los nombramos con letras mayúsculas: **A, B, C,...**

Los **elementos** de un conjunto, generalmente, lo denominamos con letra minúscula: **a, b..**

Pertenencia: Decimos “el elemento **a** pertenece al conjunto **A**” y simbolizamos $a \in A$

Conjunto “Vacío”: Es el conjunto que no tiene elementos y simbolizamos $\square$

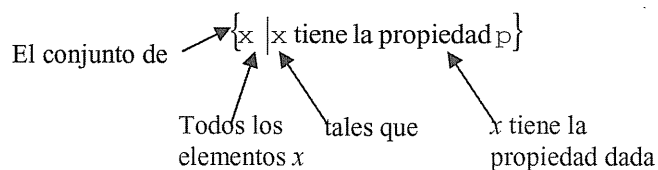
Algunas formas de representar un conjunto

- **Por extensión:** es cuando indicamos todos los elementos del conjunto (entre llaves). Es una forma que podemos usar en tanto el conjunto tenga una cantidad finita de elementos.
- **Por comprensión:** Es cuando indicamos las propiedades que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto.

Ejemplo:

$$A = \{0,1,2,3,4\}$$

Estructura en la notación por comprensión:



Ejemplos:

1) $\{x \mid x \text{ es un dígito impar}\}$

Los números dígitos son aquellos que tienen una sola cifra

Los elementos de este conjunto serán entonces los números dígitos impares, es decir 1, 3, 5, 7 y 9. Por lo que si quisiéramos escribir por extensión al mismo quedaría:

$$\{1;3;5;7;9\}$$

2) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ y } x \leq 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales menores o iguales a 6. Por extensión: $\{1;2;3;4;5;6\}$

3) $\{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales, incluido el cero, menores a 6. Por extensión: $\{0;1;2;3;4;5\}$

4) $\{x \mid x \in \mathbb{N}_0 \text{ y } 3 < x < 6\}$

Los elementos de este conjunto serán números naturales, incluido el cero, mayores a 3 y menores a 6. Por extensión:

$$\{3;4;5\}$$

SUBCONJUNTOS

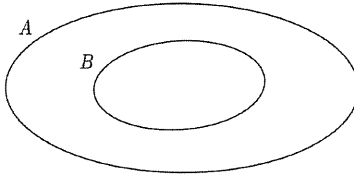
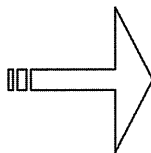


Fig.: Diagrama de Venn representando la relación de inclusión entre conjuntos

Decimos que un conjunto **B** es un subconjunto de un conjunto **A** si todos los elementos de **A** también lo son de **B**. Es decir que el conjunto B es subconjunto de A si y sólo si todo elemento de B, es también de A. En símbolos:

$$B \subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)$$



- También se dice que el conjunto B está contenido en el conjunto A, o que A contiene a B.
- Dos conjuntos serán iguales cuando posean los mismos elementos. En otras palabras $A=B$, si todo elemento de **A** es también elemento de **B**, y todo elemento de **B** es también elemento de **A**. En símbolos:

$$B = A \Leftrightarrow (A \subset B \text{ y } B \subset A)$$

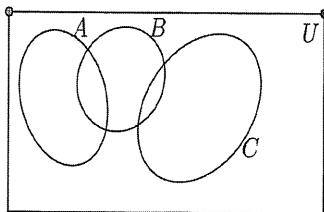
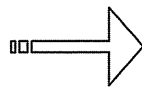


Fig.: Diagrama de Venn conjunto Universal y algunos subconjuntos.



Al conjunto que contiene a todos los datos en un contexto específico lo denominamos “**Conjunto Universal**”. Generalmente lo simbolizamos con **U**.

Como esta definición lo indica, su formación va a depender del problema con el cual se trabaje.

Ejemplos:

1) Se realizó un sondeo sobre qué carrera van a seguir los alumnos de 5to. año de la Escuela “Manuel Belgrano”.

Los resultados de la encuesta entre los 45 alumnos del curso fue:

☞ Derecho: 12 alumnos

☞ Cs. Económicas: 10 alumnos

☞ Ingeniería Industrial: 9 alumnos

☞ Psicología: 6 alumnos

☞ Otros: 8 alumnos

Para esquematizar con conjuntos esta situación, se toma como conjunto universal **U** a los 45 alumnos de este 5to. año de la Escuela “Manuel Belgrano”.

2) Necesitamos establecer características que definan a los números impares y pares.

En este caso, sería apropiado utilizar como conjunto universal, al conjunto de los números naturales incluidos el cero.

Es decir: $U = N_0$

Los números pares son los múltiplos de 2. Eso significa que al multiplicar un número natural (o cero) por 2 obtendremos un número par. Con esto conseguimos una caracterización de los pares como: “si x es par entonces $x=2 \cdot n$, con $n \in N_0$.”

¿Cómo caracterizarías a un impar?

Práctica:

1. Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x = 2 \cdot n, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$$

*Esto significa que
x es un número
par* *Además debe ser
"menor o igual a 7",
"a lo sumo 7"*

$$B = \{x / x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 5\}$$

$$C = \{x / x \text{ es vocal de la palabra "donde"}\}$$

$$D = \{x / x \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 < x < 6\}$$

$$E = \{x / x = 2 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$$

$$F = \{x / x = 5 \cdot n, n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq x < 18\}$$

Así los elementos de A serán: 0, 2, 4 y 6.

Luego, el conjunto A expresado por extensión será $A = \{0; 2; 4; 6\}$

2. Escribe por comprensión:

$$A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$$

$$C = \{10; 11; 12; 13\}$$

$$B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

$$D = \{0; 4; 8; 12; 16; 20\}$$

3. Sean $A = \{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{x \in \mathbb{Z} / x \leq 2\}$, determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

a. $B \subset A$ b. $\{1\} \in B$

c. $\frac{3}{2} \in A$ d. $B \subset C$

4. Sea $U = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 8\}$. Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

$$A = \{x / x \in U \wedge x > 5\}$$

$$B = \{x / x \in U \wedge x + 3 \in U\}$$

$$C = \{x / x \in U \wedge x \text{ es divisible por } 4\}$$

OPERACIONES

Al igual que se realizan operaciones como ser la suma y la multiplicación con los números, también es posible definir operaciones con conjuntos... cuyos resultados serán ¡conjuntos!

INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

La intersección de otros dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente. Es decir, que un elemento x pertenece a la "intersección" siempre y cuando esté simultáneamente en A y en B. En símbolos:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

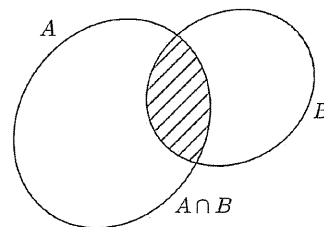
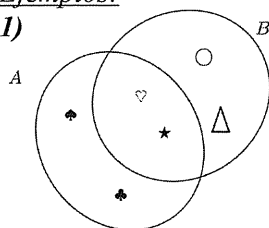


Fig.: Intersección de los conjuntos A y B

Ejemplos:

1)



$$\begin{aligned} A &= \{\spadesuit; \heartsuit; \clubsuit\} \\ B &= \{\circ; \triangle; \star\} \\ A \cap B &= \{\heartsuit; \star\} \end{aligned}$$

2) $A = \{0; 2; 4; 6; 8\}$

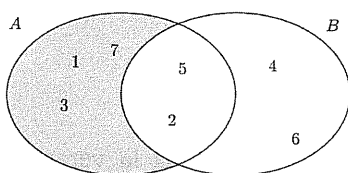
$$B = \{1; 2; 6; 7; 11\}$$

$$A \cap B = \{2; 6\}$$

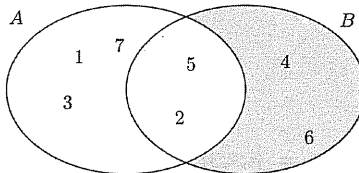
Algunas ideas previas para definir la “Unión entre conjuntos”

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7\}$$

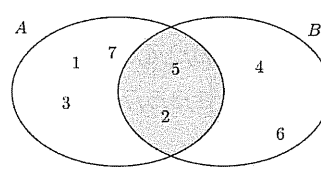
$$B = \{2; 4; 5; 6\}$$



Sólo en $A = \{1; 3; 7\}$



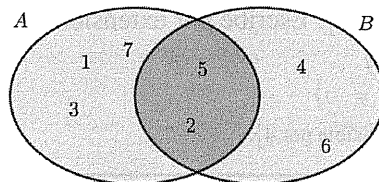
Sólo en $B = \{4; 6\}$



En A y en B simultáneamente : $A \cap B = \{2; 5\}$

La unión de los conjuntos A y B , se determina por los elementos que se encuentran en, al menos, uno de los conjuntos A o B . Es decir, los elementos pueden pertenecer sólo a A , sólo a B o, finalmente, pertenecer a ambos.

Así:



La unión de A y de $B = \{1; 3; 7; 4; 6; 2; 5\}$

UNIÓN DE CONJUNTOS

La unión de otros dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con todos los elementos de ambos conjuntos, es decir por todos los elementos que son sólo de A , también lo que son sólo de B y los que son elementos de ambos conjuntos. En símbolos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

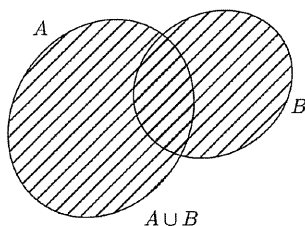
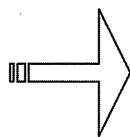
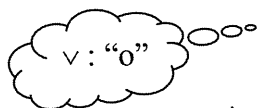


Fig.: Unión de los conjuntos A y B



Si dos conjuntos no tienen elementos en común, entonces son **disjuntos**, y **recíprocamente**; es decir:

$$A \text{ y } B \text{ disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \phi$$

Por ejemplo el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son disjuntos!

Ejemplos

1)

Inversión de sponsor y anunciantes Eliminatorias Sudáfrica 2010		
	TV por cable	TV Capital federal
1	Coca Cola	Claro
2	Standar Bank	Coca Cola
3	Claro	Repsol YPF
4	Repsol YPF	Standar Bank
5	Italcred	Italcred
6	Quilmes	Adidas

Fuente: Monitor Medios Publicitarios

Inversión en publicidad La tabla superior lista a las 6 empresas que más invirtieron para sponsor a la Selección Argentina de fútbol, durante las Eliminatorias “Sudáfrica 2010”, tanto en televisión por cable como en la televisión abierta de Capital Federal.

a) Determina las empresas que estuvieron en una u otra de las categorías durante ese período.

b) ¿La parte a) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.

c) Determina las empresas que estuvieron en ambas categorías durante ese período.

d) ¿La parte c) representa la unión o la intersección de las empresas? Explica.

Rtas:

a) {Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred, Quilmes, Adidas}

b) Representa la unión ya que se refiere a lo que está en una u otra categoría (TV cable o TV abierta), pudiendo estar sólo en una (como Quilmes) o en ambas (como Claro).

c) {Coca Cola; Standar Bank, Claro, Repsol YPF, Italcred }

d) Representa la intersección ya que tiene que estar en las dos categorías simultáneamente.

$$2) B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$C = \{-7; 1; 2; 3; 4\}$$

Entonces:

$$C \cap B = \{1; 2; 3\};$$

$$C \cup B = \{-7; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$B \cap \emptyset = \emptyset; B \cup \emptyset = B$$

$$C \cap \emptyset = \emptyset; C \cup \emptyset = C$$

$$3) A = \{x / x = 6 \cdot n, n \in N_0\}$$

$$B = \{x / x = 5 \cdot n, n \in N_0\}$$

Como A es el conjunto de los múltiplos de 6, y B el de los múltiplos de 5, realizar

$A \cap B$ significa determinar los múltiplos comunes a 5 y a 6. Así:

$$A \cap B = \{0; 30; 60; 90; 120; \dots\}$$

Práctica:

5. De Campamento

Un grupo de alumnos de 5to. año de campamento con su profesor de Educación Física, Germán Sánchez, deben completar tres actividades para obtener un “6” en el trimestre. Sánchez registra en su tabla quién la completa y quién no. Un “Sí” indica que el alumno ha completado la actividad.

Sea A el conjunto de alumnos que ha completado la actividad N° 1: Cocinar y comer

Sea B el conjunto de alumnos que ha completado la actividad N° 2: Hacer la cama.

Sea C el conjunto de alumnos que ha completado la actividad N° 3: Prueba de habilidad

a) Escriba los conjuntos A, B y C por extensión.

b) Determine el conjunto $A \cap B \cap C$

c) ¿Quiénes obtendrán un “6” en el trimestre?

Alumno	Actividades		
	1	2	3
Darío	Sí	Sí	Sí
Mirko	Sí	No	Sí
Esteban	No	Sí	No
Ignacio	No	Sí	Sí
Juan	Sí	Sí	No

6. Sean $A = \{x \in U / x = 4.n, n \in N_0\}$

$B = \{x \in U / x = 2.n + 1, n \in N_0\}$ y $C = \{x / x = 6.n, n \in N_0\}$

Determina los conjuntos que se indican:

a) $A \cap U$

b) $A \cup U$

c) $A \cap B$

d) $B \cap C$

e) $C \cap B$

f) $A \cap \phi$

g) $B \cup \phi$

h) $(A \cap C) \cap B$

i) $A \cap (C \cap B)$

j) $(A \cup B) \cup C$

k) $A \cup (B \cup C)$

Con este último ejercicio podemos conjeturar algunas propiedades que cumplen las operaciones vistas. En efecto, serán válidas pero no lo demostraremos en este curso. A continuación, las propiedades:

Propiedades	UNIÓN	INTERSECCIÓN
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	“de la unión respecto de la intersección” $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ “de la intersección respecto de la unión” $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Idempotencia	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$

DIFERENCIA DE CONJUNTOS

La diferencia entre el conjunto A y el B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a A pero no están en B . En símbolos:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

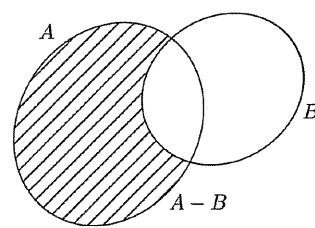


Fig.: Diferencia entre A y B

COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO

El complemento del conjunto A es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a U pero no están en A y se simboliza como C_A o $\bar{A}$. En símbolos:

$$C_A = \bar{A} = U - A$$

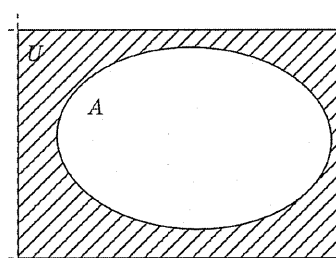
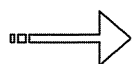


Fig.: Complemento de A



Observa: $A - B = A \cap \bar{B}$

Propiedades	
COMPLEMENTO	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$ $\overline{\phi} = U \text{ y } \overline{U} = \phi$
LEYES DE MORGAN	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Ejemplos:

1) Sea $U = \{x \in \mathbb{N} / x \leq 12\}$, y los conjuntos
 $A = \{x \in U / x \text{ es un cuadrado perfecto}\}$ y $B = \{x \in U / x - 3 \in U\}$

Resolución:

$$A = \{1;4;9\} \quad B = \{4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

Entonces:

$$A - B = \{1\}$$

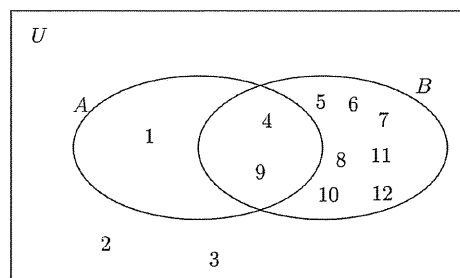
$$B - A = \{5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

$$\overline{A} = \{2;3;5;6;7;8;9;10;11;12\}$$

$$\overline{B} = \{1;2;3\}$$

$$A \cup B = \{1;4;5;6;7;8;9;10;11;12\},$$

$$\text{entonces: } \overline{A \cup B} = \{2;3\} \text{ y } \overline{A} \cap \overline{B} = \{2;3\}$$



2) En un curso de 35 alumnos, 20 alumnos toman clases de Alemán, 10 alumnos toman clases de Inglés y 8 alumnos toman clases de Portugués. Además se sabe que 4 alumnos toman clases de Inglés y Portugués, 5 toman clases de Alemán e Inglés, 3 de alemán y portugués, y 14 sólo de Alemán. Responde:

(a) ¿Cuántos alumnos toman clases de los tres idiomas?

(b) ¿Cuántos alumnos toman clases sólo de Inglés?

(c) ¿Cuántos alumnos no toman clases de ningún idioma?

(d) ¿Cuántos alumnos no toman clases de Portugués?

(e) ¿Cuántos alumnos toma clases de al menos uno de los idiomas?

Resolución:

Como primer medida, esquematicemos esta situación. Lo ideal en estos casos es realizar un diagrama de Venn con los conjuntos:

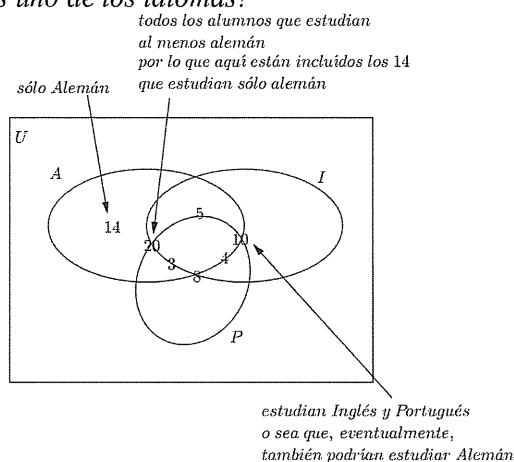
Universal U = conjuntos de los 35 alumnos

A = conjunto de alumnos que estudian inglés

I = conjunto de alumnos que estudian alemán

P = conjunto de alumnos que estudian portugués.

Así, en el diagrama de Venn representemos en cada "zona", la cantidad de alumnos que cumplen las propiedades indicadas para estar en la "zona".



Ahora podemos “visualizar” mejor. Y entonces podemos determinar las cantidades correspondientes a cada zona.

Empecemos por “Alemán”, en total tenemos 20 alumnos que lo estudian, pero sabemos que 14 lo estudian con exclusividad, luego hay 6 alumnos que estudiarán Alemán y algún otro (Inglés o Portugués), es decir que estarían estudiando 2 o 3 idiomas. Pero dentro de esos 6 están contados los 5 que realizan Inglés y Alemán, con lo cual 1 alumno (6-5) realiza sólo Alemán y Portugués. Así, sabiendo que 3 alumnos estudian Alemán y Portugués (incluyendo los que estudian, además, inglés), queda que $2(3-1)$ alumnos estudian los 3 idiomas simultáneamente. Y también obtenemos que 3 $(5-2)$ alumnos estudian sólo Alemán e Inglés (no Portugués)

Ahora, como 4 alumnos toman clases de, al menos, Inglés y Portugués, tendremos 2 alumnos que estudian sólo esos dos idiomas.

Ahora ya podemos completar las cantidades.

Sólo Inglés = $10 - 3 - 2 - 2 = 3$

Sólo Portugués = $8 - 1 - 2 - 2 = 3$

Alumnos que estudian al menos un idioma = $14 + 1 + 2 + 3 + 2 + 3 + 3 = 28$

Alumnos que no estudian ningún idioma = $35 - 28 = 7$. Ya estamos en condiciones de responder:

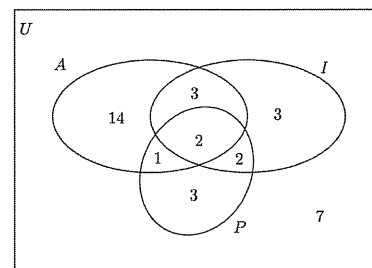
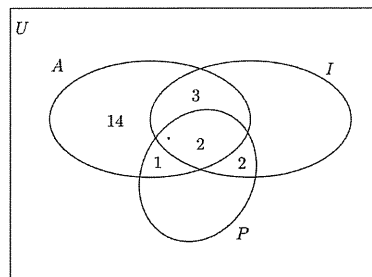
(a) 2 alumnos

(b) 3 alumnos

(c) 7 alumnos

(d) $7 + 14 + 3 + 3 = 27$, 27 alumnos

(e) 28 alumnos



Práctica:

7. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A = \{x \in U / x + 3 \in U\}$; $B = \{1, 4, 8\}$; $C = \{x \in U / x \text{ primo}\}$ y $D = \{2, 5, 7\}$; obtenga:

a) $\overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\overline{A \cup B}$

c) $A \cap B \cap D$

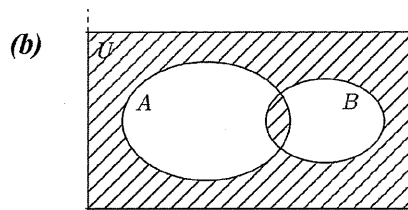
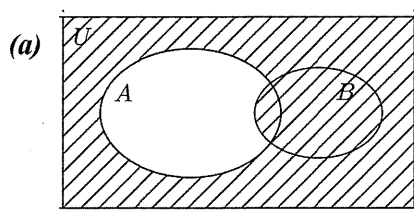
d) $\overline{A} \cap C$

e) $A \cap \overline{C}$

f) $(D - C) \cup B$

g) $A \cap (C - D)$

8. Representa mediante operaciones entre conjuntos, la zona sombreada:



9. Definimos el cardinal de un conjunto finito, como el número de elementos del mismo.

Simbólicamente el cardinal de A suele escribirse: $|A| = \text{card}(A)$.

Siendo A, B, C y D los conjuntos del ejercicio 7. Obtiene:

$$|B \cup D|, |A \cup B|, |B \cup C|, |A \cup C|.$$

Por ejemplo: $B \cup D = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$ entonces $|B \cup D| = 6$

¿Puedes realizar alguna conjetura acerca de la cardinalidad de los conjuntos?

- 10.** Una encuesta realizada a un grupo de empleados de una fabrica reveló que 250 empleados tenían casa propia, 220 tenían automóvil, 585 tenían TV LCD, en tanto 185 empleados tenían automóvil y TV LCD, 70 automóvil y casa propia, 130 casa propia y TV. A su vez, 50 tenían casa propia, automóvil y TV LCD; y 25 empleados no poseían ni casa propia ni automóvil ni TV LCD. Averigua:
- ¿Cuántos empleados fueron encuestados?
 - ¿Cuántos empleados tienen sólo casa propia?
 - ¿Cuántos empleados tienen sólo una de estas cosas?
- 11.** Considera el conjunto universal $U = \{x \in N_0 / x \leq 9\}$.
- Escribe dos conjuntos A y B tales que $A \neq \phi$, $B \neq \phi$ y $A \cap B = \phi$ y $A \cup B = U$
 - Escribe tres conjuntos A, B y C tales que: $A \neq \phi$, $B \neq \phi$, $C \neq \phi$, $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$, $B \cap C = \phi$ y $A \cup B \cup C = U$
- 12.** Si el $|A| = 7$, $|A \cap B| = 3$ y $|A \cup B| = 15$; ¿cuál es el cardinal de B?
- 13.** Si el conjunto universal es el conjunto de los números naturales incluyendo el cero (N_0) y $P = \{x / x = 2.n; n \in N_0\}$, el conjunto de los números pares. Describe con palabras el conjunto $\bar{P}$.

CAPÍTULO 2: NÚMEROS REALES

2.1 – AMPLIACIÓN DEL CAMPO NUMÉRICO

*“Dios creo a los números naturales, el resto lo hizo el hombre”
Leopold Kronecker (1823-1891)*

En efecto, los números naturales son los que hemos aprendido y utilizado en nuestros tempranos años para “contar” colecciones, cantidades. Luego hemos introducido operaciones matemáticas como ser la suma y la multiplicación de “cantidades”. Al abstraernos, necesitamos usar un símbolo que indique, por ejemplo, la situación de no sumar nada. Así hacemos uso del símbolo 0 “cero”.

- Conjunto de los números naturales: $N = \{1; 2; 3; 4; \dots; 12001; 12002; \dots\}$
- Conjunto de los números naturales incluido el cero: $N_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots; 12001; 12002; \dots\}$

Luego tuvimos que tratar de responder preguntas del estilo “¿qué número debo sumarle a 9 para obtener 5”, lo que equivale simbólicamente a la expresión:

$$x + 9 = 5$$

$$x = (-4)$$

La solución a dicha problemática no pudimos obtenerla dentro de los naturales y, ciertamente, tampoco es cero y así incorporamos a los “opuestos” de los números naturales.

Con todo esto armamos el conjunto de los enteros Z , donde

$$Z^+ = N.$$

$$Z = \{\dots; -21; -20; \dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

Luego tuvimos que tratar de encontrar solución a problemas del estilo “¿qué longitud debe tener una tira de papel, si el doble de la misma es igual a 1cm?”, lo que equivale simbólicamente a la expresión:

$$2 \cdot x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

La solución a este problema no pudimos hallarla en los enteros, y así ampliamos nuestro conocimiento e incorporamos a los números racionales. En efecto, los números racionales son aquellos que podemos escribir como cociente (razón) de números enteros.

$$Q = \left\{ x / x = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in Z, q \neq 0 \right\}$$

Observaciones:

1) $\frac{p}{q}$ $\leftarrow$ Numerador
 $\leftarrow$ Denominador

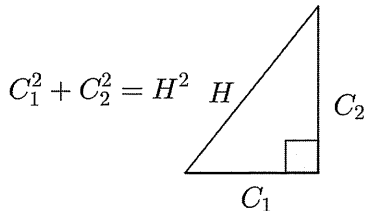
2) La igualdad entre dos racionales se define de la siguiente forma:

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ si y sólo si } p \cdot s = q \cdot r$$

Los enteros, a diferencia de los números racionales, constituyen lo que en Matemática denominamos un conjunto “discreto”.

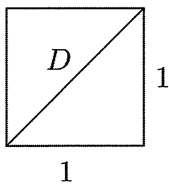
Hemos ampliado bastante nuestro conocimiento de los conjuntos numéricos, sin embargo todavía falta bastante para terminar!

En la Antigua Grecia, los pitagóricos a los números racionales lo denominaban números *conmesurables*, en el sentido de que se podía expresar como una repetición natural de la unidad.



Los mismos pitagóricos fueron los que descubrieron el Teorema de Pitágoras, recordando un poquito... es aquel que aplicábamos en los triángulos rectángulos para averiguar por ejemplo la longitud de la hipotenusa.

Así, un miembro de la escuela pitagórica, Hipaso de Metaponto (nacido aproximadamente en el año 500 a. C.), se planteó el problema de calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1. Entonces aplicó el Teorema de Pitágoras:



$$1^2 + 1^2 = D^2$$

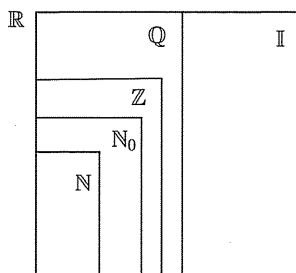
$$D^2 = 2$$

Es decir, lo que hoy conocemos como $\sqrt{2} = D$

Se cuenta que Hipaso intuyó que $\sqrt{2}$ no podía ser un número conmesurable, esto no era algo fácil de aceptar ya que rompía con la concepción de los números e incluso del universo que tenía la escuela pitagórica. Pero además, los miembros de la escuela debían mantener en secreto todos los conocimientos por ella adquirido. La leyenda cuenta que Hipaso deslizo algo de su descubrimiento y que por ello fue ahogado en el mar por sus propios compañeros.

Hoy sabemos que $\sqrt{2}$ no es un número racional, como no lo son otros tantos muchos!

A los números que no son racionales se los denomina *irracionales* y se simboliza al conjunto de los mismos con la letra mayúscula *I*



Así, pensando en conjuntos, queda:

$$Q \cap I = \emptyset$$

Y definimos al conjunto de los números reales como los que pueden ser racionales o irracionales, en símbolos:

$$Q \cup I = \mathbb{R}$$

Además vemos que se cumple las siguientes relaciones de “contención”

$$N \subset N_0 \subset Q \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad I \subset \mathbb{R}$$

Expresión decimal de los números reales

Debido a que los números racionales son, en definitiva, cociente de números enteros, la representación decimal de los mismos será siempre periódica

Algunos tendrán período nulo, como son los números que le correspondan a fracciones decimales, y otros que no, pero siempre tendrán algún período.

$$\begin{array}{r} \frac{5}{2} = 2,5 \\ \begin{array}{r} 5 \overline{) 2} \\ \underline{4} \\ 2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{r} \frac{5}{3} = 1,66\ldots = 1,\overline{6} \\ \begin{array}{r} 5 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

período nulo período no nulo

2 y se repite...

Ahora, los irracionales son, como escribimos anteriormente, son los No racionales. Por ende, su expresión decimal será infinitas cifras decimales NO periódicas.

➤ Estrategia para realizar el pasaje de un número racional expresado en forma decimal a fracción

Ejemplos:

1) Sea $a = 2,\overline{7} = 2,777\ldots$

Entonces

$$10.a = 27,\overline{7} = 27,777\ldots$$

Así:

$$\begin{array}{r} 10.a = 27,\overline{7} = 27,777\ldots \\ - \quad a = 2,\overline{7} = 2,777\ldots \\ \hline 9.a = 25 \end{array}$$

Con lo que $a = \frac{25}{9}$

2) Sea $a = 1,4\overline{2} = 1,4222\ldots$

Entonces

$$10.a = 14,\overline{2} = 14,222\ldots \text{ y}$$

$$100.a = 142,\overline{2} = 142,222\ldots$$

Así

$$\begin{array}{r} 100.a = 142,\overline{2} = 142,222\ldots \\ - \quad 10.a = 14,\overline{2} = 14,222\ldots \\ \hline 90.a = 128 \end{array}$$

Con lo que $a = \frac{128}{90} = \frac{64}{45}$

3) Sea $a = 1,2\overline{3} = 1,2323\ldots$

Entonces $100.a = 123,\overline{23} = 123,2323\ldots$

Así

$$\begin{array}{r} 100.a = 123,\overline{23} = 123,2323\ldots \\ - \quad a = 1,2\overline{3} = 1,2323\ldots \\ \hline 99.a = 122 \end{array}$$

Con lo que $a = \frac{122}{99}$

Práctica:

1. Expresa como fracción de números enteros a los siguientes números expresados en forma decimal:

$$0,\overline{9}; 3,\overline{2}; 5,\overline{13}; 2,\overline{31}; 1,\overline{9}$$

Observación: Al realizar lo pedido se demuestra que dichos números son racionales.

2. Analice cuál o cuáles de los siguientes números racionales tiene período nulo, sin realizar la división:

$$\frac{1}{3}; \frac{3}{25}; \frac{5}{49}; \frac{7}{20}$$

3. Considere el conjunto:

$$\left\{-8; 7; 0; \frac{89}{4}; 15,6; \sqrt{3}; 2,3; \pi; -\sqrt{2}\right\}$$

Indique los elementos x del conjunto que cumplen con:

a. $x \in \mathbb{Z}$ b. $x \in \mathbb{N}$ c. $x \in \mathbb{I}$

d. $x \in \mathbb{Q}^+$ (rationales positivos) e. $x \in \mathbb{R}_0^+$ (reales no negativos) f. $x \in \mathbb{Q}$

2.2 - OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

SUMA Y PRODUCTO

$a + b$
↓
términos o
sumandos

$a \cdot b$
↓
factores

En los números reales están definidas las operaciones suma y producto, tales que para cualquier par de números reales a y b :

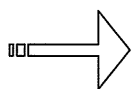
- La **suma** le hace corresponder el número $a+b$ que también pertenece a los reales (ley de clausura)
- El **producto (multiplicación)** le hace corresponder el número $a \cdot b$ que también pertenece a los reales (ley de clausura)

Propiedades de la suma y la multiplicación

	<i>Suma</i>	<i>Producto</i>
Conmutativa	$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Existencia de Elemento Neutro	0(cero) es neutro en la suma, ya que: $a + 0 = a$	1(un) es neutro en el producto, ya que: $a \cdot 1 = a$
Existencia de elemento inverso	$-a$ es el opuesto de a $a + (-a) = 0$	$\frac{1}{a}$ es inverso de $a \neq 0$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
Cancelativa	$a + b = a + c \Rightarrow b = c$	$a \neq 0; a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c$
Uniforme	$a = b \Rightarrow a + c = b + c$	$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$

¡Una propiedad que agrupa suma y multiplicación!
Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma recibe otros nombres de acuerdo a como se la está utilizando, seguramente los habrás escuchado!

Por ejemplo

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

←
factor común

Ejemplos:

$$1) \frac{1}{3} + 5 + \frac{2}{3} + (-5) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 5 + (-5) = \frac{3}{3} + 0 = 1 + 0 = 1$$

Conmutativa
de la suma

Asociativa de
la suma y elem.
opuesto

Elem. neutro
de la suma

2) Usando las propiedades halle el valor de x :

$$2x + 6 = 3$$

$$2x + 6 + (-6) = 3 + (-6) \quad \text{Prop. uniforme}$$

$$2x + 0 = (-3) \quad \text{Asociativa de la suma y Elem. opuesto}$$

$$2x = (-3) \quad \text{Elem. neutro de la suma}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot (-3) \quad \text{Prop. uniforme}$$

$$1 \cdot x = -\frac{3}{2} \quad \text{Asociativa de la multiplicación y Elem. inverso}$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad \text{Elem. neutro de la multiplicación}$$

3) Sabiendo que $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 7\sqrt{2}$, calcule $x+y$:

$$\sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2}y = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}(x + y) = 7\sqrt{2} \quad \text{y prop. distributiva de la multiplicación respecto a la suma}$$

$$\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{2}(x + y) = 7\sqrt{2} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}} \quad \text{Prop. uniforme}$$

$$1 \cdot (x + y) = 7 \cdot 1 \quad \text{a asociativa de la multiplicación y Elem. inverso}$$

$$x + y = 7 \quad \text{Elem. neutro de la multiplicación}$$

RESTA, DIVISIÓN

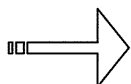
A partir de la suma y la multiplicación se definen otras operaciones

- Siendo a y b números reales, la **resta** entre a y b se define:

$$a - b = a + (-b)$$

- Siendo a y b números reales, con $b \neq 0$, la **división** entre a y b se define:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$



Recordando algunas cosas:

- Si a y b son dos números racionales: $a = \frac{p}{q}$; $b = \frac{r}{s}$, con $q \neq 0$ y $s \neq 0$,

entonces podemos operar:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}; \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}; \quad \frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{ps}{qr}$$

- Regla de los signos para el producto y cociente de números reales:

El producto es positivo si los factores tienen igual signo

$$a \cdot b > 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$$

El producto es negativo si los factores tienen distinto signo

$$a \cdot b < 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$$

El cociente es positivo si numerador y denominador tienen igual signo

$$\frac{a}{b} > 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b < 0)$$

El cociente es negativo si numerador y denominador tienen distinto signo

$$\frac{a}{b} < 0 \text{ si } (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ o } (a < 0 \text{ y } b > 0)$$

- Opuestos

$$\boxed{-a = (-1) \cdot a}$$

$$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$$

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Ejemplo: Resuelve, sin utilizar calculadora, usando las propiedades o definiciones vistas:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{8}{5} - 7 - \frac{3}{5} &= \frac{8}{5} + (-7) + \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= (-7) + \frac{8}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \\ &= (-7) + \left(\frac{8}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right)\right) \\ &= (-7) + \frac{5}{5} = (-7) + 1 = (-6) \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{9}{5} : \frac{3}{5} = \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{3} = 3$$

Práctica:

1. Resuelve, sin usar calculadora, indicando las propiedades o definiciones utilizadas en cada paso:

$$\text{a. } \frac{4}{5} + 5 + \frac{1}{5}$$

$$\text{b. } \frac{3}{2} - \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{8}{7}$$

$$\text{c. } 5 \cdot \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\text{d. } \frac{\frac{1}{7}}{\frac{13}{7}}$$

2. Sabiendo que $3x - 3y = 27$ obtiene el valor de $x - y$

3. Sabiendo que $x + y = 5$, obtiene el valor de $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

4. Demuestre las siguientes proposiciones:

a. La suma de dos múltiplos de 3 es un múltiplo de 3.

Resolución:

Sea a y b múltiplos de 3, eso quiere decir que existen número naturales (o cero) que multiplicados por 3 dan a y b respectivamente; en símbolos:

$$\exists n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } m \in \mathbb{N}_0 \text{ tales que } a = 3.n \text{ y } b = 3.m$$

Entonces realicemos la suma:

$$a + b = 3.n + 3.m = 3 \cdot \underbrace{(n + m)}_{(2)} = 3 \cdot p$$

(1) (2)

(1) Distributiva de la multiplicación respecto a la suma
(2) La suma de dos naturales es natural

Así que el número p es un natural, por lo que $a+b$ es múltiplo de 3.

b. La suma de dos números pares es par.

c. La suma de dos números naturales consecutivos es impar.

5. Calcule y verifique:

$$\text{a. } 3 - \left(-\frac{1}{4}\right) + 7 \cdot (-5) + \frac{15}{4} = -28 \quad \text{b. } -[-3 - (6 - 9) \cdot 0,1\bar{5}] = \frac{38}{15}$$

$$\text{c. } \frac{3 - \frac{5 - \frac{1}{2}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{d. } \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2 - \frac{1}{5}}\right) \div 3 + \frac{1}{3} = \frac{17}{27}$$

POTENCIACIÓN

Con la idea de “resumir” escritura aprendemos en la primaria la escritura de “potencia”. Así cuando aparecía en una multiplicación cuatro factores 3, es decir $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, lo resumíamos escribiendo: 3^4 .

Con esto empezamos a definir la potencia:

Siendo $a \in \mathbb{R}$

$$\text{Si } a \neq 0: a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\text{Si } n \in \mathbb{N}, n > 1: a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factores "a"}}$$

$$\begin{array}{c} \text{exponente} \\ \swarrow \\ a^n = b \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{base} \quad \text{potencia} \end{array}$$

Luego ampliamos la definición a todos números enteros.

Siendo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}$$

Ejemplos:

$$a) \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad b) (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 \quad c) (-2, \overline{31})^0 = 1$$

$$d) 2^{(-3)} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad e) \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$f) 2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$$

$$g) (2^3)^2 = (2^3) \cdot (2^3) = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6$$

$$h) \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9} \quad i) 3^5 \div 3^3 = 3^5 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3} = 9 = 3^2$$

$$j) (2+5)^2 = 7^2 = 49$$

$$k) 2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$$

$$\text{Ⓢ} (a+b)^n \neq a^n + b^n$$

Con estos ejemplos tal vez puedas atreverte a conjeturar algunas propiedades de la potenciación... Incluso puedes atreverte a demostrar alguna!

Propiedades de la potenciación $a \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$

Distributiva de la potencia respecto a la multiplicación

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

Distributiva de la potencia respecto al cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

Producto de potencias de igual base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Cociente de potencias de igual base

$$a^n \div a^m = a^{n-m}, \quad a \neq 0$$

Potencia de potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Estas propiedades nos permiten "simplificar" expresiones. Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{2^3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5} &= \frac{2^3}{2^2} \cdot \frac{5}{5} \\ &= 2^{3-2} \cdot 5^{1-1} = 2^1 \cdot 1 = \\ &= 2 \end{aligned}$$

Práctica:

6. Calcule:

$$a. \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$$

$$b. \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-2} =$$

$$c. \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}\right]^{-1} =$$

$$d. \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (3)^{-2} + \frac{1}{2} =$$

$$e. \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$$

$$f. \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$$

$$(-1)^{2n} = [(-1)^2]^n = 1$$

$$\begin{aligned} (-1)^{2n+1} &= (-1)^{2n} \cdot (-1) = \\ &= 1 \cdot (-1) = -1 \end{aligned}$$

7. Explique por qué $(-3)^{-3} \neq \frac{1}{(-3)^3}$

8. Simplifique:

a. $\frac{3^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-7} \cdot 3^2}{3^{-3} \cdot 3^2}$

b. $\frac{2^4 \cdot 4^{-2} \cdot 9^2 \cdot 3^{-2}}{2^4 \cdot 3}$

c. $\frac{8^2 \cdot [6^2]^{-2}}{12^2}$

d. $\frac{2^3 \cdot 6}{18} =$

e.

$$\frac{a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^5}{a^2 \cdot b^{-3} \cdot c} = \frac{a^3}{a^2} \cdot \frac{b^{-2}}{b^{-3}} \cdot \frac{c^5}{c} = a^{3-2} \cdot b^{-2-(-3)} \cdot c^{5-1} = a^1 \cdot b^1 \cdot c^4 = abc^4$$

f. $\frac{a^4 \cdot b \cdot c^{-2}}{a^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot c^{-5}}$

g. $\frac{x^{-2} \cdot [x^2]^3 \cdot 3^{-2}}{x^4 \cdot 9}$

h.

$$\frac{a^{n+2} \cdot b^{2m+1}}{a^3 \cdot b^{2m-3}} = a^{n+2-3} \cdot b^{2m+1-(2m-3)} = a^{n-1} \cdot b^{2m+1-2m+3} = a^{n-1} \cdot b^4$$

i. $\frac{a^{2n+3} \cdot b^{m+1}}{[a^{n+3}]^2 \cdot b^{m-1}}$

j. $\frac{(5 \cdot 3^{n+1}) \div (5^2 \cdot 3^n)}{5^{-1}}$

Cuando las bases no sean números primos, descompone factorialmente a los mismos

$$6^2 = (2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$$

9. Expresa en notación científica y simplifique:

a. $\frac{200 \cdot 0,0000005 \cdot 5500000}{0,0000011}$

b. $\frac{21 \cdot 0,0007 \cdot 360000}{900000000}$

La notación científica se usa para cálculos de números muy grandes o muy pequeños:

$$450000 = 4,5 \cdot 10^5$$

$$0,000045 = 4,5 \cdot 10^{-5}$$

RADICACIÓN

• ¿Para qué valores de x tendremos que $x^3=8$? ¿Para qué valores de x tendremos que $x^3=27$?

• Si ingresamos en la calculadora $\sqrt[3]{8}$ obtendremos por respuesta “2”, así mismo si ingresamos $\sqrt[3]{27}$ obtendremos “3”... qué relación puedes notar entre 2 y 8?, y entre 3 y 27?. ¿Te ayuda a responder la pregunta del ítem anterior? ¿Por qué?

Entendemos por raíz enésima de a al número b , tal que su enésima potencia es a . En símbolos:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

índice $\swarrow$ $\searrow$ raíz enésima
 $\sqrt[n]{a} = b$
 $\nwarrow$ radicando

Ejemplos y observaciones:

a) $\sqrt[3]{-8} = (-2)$ pues $(-2)^3 = (-8)$

b) $\sqrt{16} = 4$ pues $4^2 = 16$

c) No existe $\sqrt{(-16)}$ ya que no existe ningún número real que elevado al cuadrado de negativo. En general, **no existe en los reales la raíz cuadrada (y de ningún índice par) de números negativos.**

d) Debido a que $5^2 = (-5)^2 = 25$ por lo que al calcular $\sqrt{25}$ podría considerarse como resultados, totalmente garantizados por la definición, tanto 5 como -5. Para evitar ambigüedades, se usa el símbolo $\sqrt{a}$ para indicar la raíz no negativa de a .

$$\sqrt{a} \geq 0, \text{ para todo } a \geq 0$$

Ahora estamos en condiciones de definir exactamente a la raíz n -ésima:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ si y sólo si } b^n = a$$

- Si n es un natural **impar** entonces esta expresión es válida para todo número real a
- Si n es un natural **par** entonces esta expresión es válida para todo número real a **no negativo** ($a \geq 0$)

Potenciación como exponente fraccionario:

Dado $n \in \mathbb{N}$,

Si n es impar, la expresión es válida para todo real a , pero si n es par, a debe ser no negativo!

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Por ejemplo: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ y $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

De esta manera todas las propiedades vistas para exponente entero las podemos generalizar a exponentes racionales.

En general: Si $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}; a \neq 0$$

En particular:

Distributiva de la raíz respecto al producto

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Distributiva de la raíz respecto al cociente

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}; b \neq 0$$

Raíz de raíz

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$



$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Práctica

10. Escriba todo como potencia, y simplifique:

a. $\frac{\sqrt[3]{64}}{8}$ Resolución: $\frac{\sqrt[3]{64}}{8} = \frac{\sqrt[3]{2^5}}{2^3} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^3} = 2^{\frac{5}{3}-3} = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}}$

b. $\frac{\sqrt{25^3} \cdot \sqrt[3]{54}}{5\sqrt{3}}$ c. $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ d. $\frac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt[4]{3}}$ e. $\sqrt{2\sqrt{2}}$

11. Demuestra indicando las propiedades utilizadas:

a. $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ Resolución: $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

b. $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ Resolución: $\sqrt{27} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

c. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d. $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ e. $\frac{18\sqrt{6}}{\sqrt{45}} = 6 \cdot \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{6}{5} \sqrt{30}$

f. $(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 1$ Resolución:
 $(2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3}) \cdot 2 + (2 - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - (\sqrt{3})^2 = 4 - 3 = 1$

g. $(2 - \sqrt{3})^2 = 7 - 4\sqrt{3}$ Resolución:
 $(2 - \sqrt{3})^2 = (2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$

h. $(\sqrt{5} - 3) \cdot (\sqrt{5} + 3) = -4$ i. $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1$

j. $(6 + \sqrt[3]{9})^2 = 36 + 12\sqrt[3]{9} + 9\sqrt[3]{9}$ k. $(\sqrt{3} + 5)^2 = 28 + 10\sqrt{3}$

l. $\frac{3}{5 - \sqrt{3}} = \frac{3}{22} \cdot (5 + \sqrt{3})$ Resolución:

$$\frac{3}{5 - \sqrt{3}} = \frac{3}{5 - \sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{3}{5 - \sqrt{3}} \cdot \frac{5 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} = \frac{3 \cdot (5 + \sqrt{3})}{25 - 3} = \frac{3}{22} \cdot (5 + \sqrt{3})$$

m. $\frac{1}{7 - \sqrt{7}} = \frac{7 + \sqrt{7}}{42}$ n. $\frac{6}{5 - \sqrt{5}} = \frac{3}{10} \cdot (5 + \sqrt{5})$

Este proceso de eliminar raíces del denominador se llama "racionalizar"

LOGARITMO

- Se tira una pelotita de tenis desde 1 metro de altura, sabemos que la misma en cada rebote será la mitad de la altura alcanzada en el rebote anterior. ¿En qué número de rebote llegará a una altura de $\frac{1}{16}$ metros?

Rebote N° 0 $\rightarrow$ altura $a=1$ metro

Rebote N° 1 $\rightarrow$ altura $a = \frac{1}{2}$ metro

Rebote N° 2 $\rightarrow$ altura $a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ metros

Rebote N° 3 $\rightarrow$ altura $a = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^3}$ metros

Observando que el exponente del denominador coincide con el número de rebote, podríamos conjeturar la siguiente regularidad:

Altura a según el número de rebote n : $\frac{1}{2^n}$

Así para empezar a resolver nuestro problema tendríamos que plantearnos la siguiente igualdad: $\frac{1}{2^n} = \frac{1}{16}$

Con lo cual, tendríamos que $2^n = 16$. ¿Cómo hacemos para poder hallar n si se encuentra en el exponente? Cuando empezamos a trabajar con “radicación” nos enfrentamos a la situación de hallar x en una ecuación del estilo $x^3=27$. Ahí también teníamos una potencia, pero la incógnita se encontraba en la base.

Para poder resolver cuestiones como las planteadas, es decir poder encontrar valores de incógnitas que se encuentran en el exponente de una potencia, se empezaron a utilizar los logaritmos.

Por los conocimientos previamente adquiridos, rápidamente podemos responder a la pregunta y decir que será en el cuarto rebote que la pelotita alcanzará la altura pedida, ya que $2^4=16$

Con la escritura de logaritmos diremos que $\log_2(16)=4$ ya que $2^4=16$.

Definimos:

El **logaritmo en base a de x** es y y lo notamos $\log_a(x)=y$ como el número al cual tengo que elevar a a para obtener x .

En símbolos:

$$\log_a(x)=y \quad \text{si y sólo si} \quad a^y=x$$

Para que esta expresión tenga sentido, se necesita que $a > 0$, $x > 0$ y además $a \neq 1$

Ejemplos:

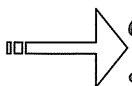
a) $\log_2(8)=3$ ya que $2^3=8$

b) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)$ ya que $(2)^{(-1)}=\frac{1}{2}$

c) $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)=(-2)$ ya que $(3)^{(-2)}=\frac{1}{9}$

d) $\log_5(1)=0$ ya que $5^0=1$

Mira tu calculadora!



Observaciones:

- Los logaritmos en base 10, se llaman **logaritmos decimales** y, generalmente, se omite en su escritura al 10, escribiendo sólo $\log(x)$. 10^x
 $\log$
- Otro logaritmo muy utilizado, es el llamado **logaritmo natural** o **neperiano**, cuya base es el número irracional e y se escribe $\ln(x)$. e^x
 $\ln$
- Los logaritmos pueden dar por resultado cualquier número real.

El logaritmo verifica las siguientes propiedades:

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^c) = c \cdot \log_a(x)$$

$$a^{\log_a(x)} = x$$

¿Puedes observar alguna relación entre las propiedades del logaritmo con las de potencia?. Por ejemplo, observa que el producto de potencias de igual base da como resultado una potencia cuyo exponente es la suma de los exponentes de las otras potencias, y, el logaritmo de la multiplicación es la suma de los logaritmos.

Para el cálculo de logaritmos muchas veces resulta de utilidad la calculadora, claro que ésta, como habrás observado, sólo trabaja con logaritmos naturales o decimales. Por suerte, para cuando tengamos otro tipo de base existe una fórmula, llamada “cambio de base”.

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

Así, por ejemplo: $\log_5 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 5} = \frac{\log 15}{\log 5} \approx 1.68$

Ahora bien, muchas veces podemos trabajar de forma exacta con los logaritmos sin recurrir a la calculadora (que mayormente aproxima) y utilizando activamente las propiedades del logaritmo. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos:

1. $\log_5 15 - \log_5 3 = \log_5 \left(\frac{15}{3}\right) = \log_5 5 = 1$

2. $\log_3 63 - \log_3 7 = \log_3 \left(\frac{63}{7}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \cdot \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$

3. A continuación realizaremos lo que se denomina “desarrollar la expresión”

a. $\log_4 \left(\frac{5-x}{3}\right)^3 = 3 \cdot \log_4 \left(\frac{5-x}{3}\right) = 3 \cdot [\log_4(5-x) - \log_4 3]$

b. $\log_4 \left[\frac{(5-x)^3}{3}\right] = \log_4 [(5-x)^3] - \log_4 3 = 3 \cdot \log_4(5-x) - \log_4 3$

¿Cuál es la diferencia entre estos dos ejemplos?

4. Escribe cada una de las siguientes expresiones como el logaritmo de una sola expresión (esto sería lo opuesto al ejemplo 3.)

$$\log_6(x-1) - \log_6 x = \log_6 \left(\frac{x-1}{x} \right)$$

Práctica:

12. ¿Es cierto que $\log_a(x \cdot y \cdot z) = \log_a x + \log_a y + \log_a z$? ¿Por qué?

13. Desarrolle:

$$\star \log_7(49 \cdot x) \quad \star \log_6[(3-x) \cdot x^4] \quad \star \log_3 \sqrt{\frac{x-3}{2}}$$

14. RESOLVIENDO PROBLEMAS

George Pólya (1887-1985) sugiere en su libro “How to Solve It” –título en castellano “Cómo plantear y resolver problemas”¹– una técnica para intentar resolver problemas matemáticos. La misma consta de cuatro etapas, a saber:

- Entender el problema²
- Crear un plan
- Llevar a cabo el plan
- Revisar e interpretar el resultado

También nos advierte: “Si no puedes resolver ese problema, entonces existe un problema más sencillo que éste que sí podrás resolver: encuéntralo”. O bien: “Si no puedes resolver el problema propuesto, intenta resolver primero un problema relacionado. ¿Podrías imaginar un problema relacionado más accesible?”.

a. Pedro escribe un número de 3 cifras distintas, donde el dígito que ocupa el lugar de las unidades es mayor que el de las centenas.

Después intercambia la cifra de las centenas con la de las unidades, escribiendo así un nuevo número.

Al sumar estos dos números obtiene un número de 3 cifras idénticas. ¿Cuál es el número que escribió primero Pedro?

b. Completa el siguiente cuadrado, sabiendo que en cada cuadradito va un dígito distinto, y al sumar las celdas de una fila o de una columna, siempre se obtiene el mismo resultado.

		4
5	7	

c. Una ferretería recibió una caja con tornillos de los cuales $\frac{1}{7}$ resultaron defectuosos.

Sabiendo que 7890 eran buenos, ¿cuántos tornillos contenía la caja?

d. Como sabía de la escasez de monedas y que sus sobrinos Alejo, Benito y Carlos las utilizaban para el transporte, Andrea decidió regalarles todas sus monedas de \$2 a ellos de acuerdo a el uso que cada uno le da. Andrea cuenta con un total de \$222 en monedas.

A Benito le entrega 20 monedas menos que a Alejo.

Si le hubiese entregado 4 monedas menos a Alejo y se las hubiese dado a Carlos, este hubiese tenido \$20 menos que Benito.

¿Cuántas monedas le entrego Andrea a cada uno de sus sobrinos?

¹Pólya, George (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Editorial Trillas. ISBN 968-24-0064-3.

² Este paso puede ser de los más difíciles y la mayoría de las veces, a mi entender, lo que suele generar más “felicidad” a la hora de lograrlo.

2.3 – EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una **expresión es algebraica** si en ella aparecen variables (parte literal de la expresión) y números, llamados **coeficientes**, relacionados por las operaciones de suma, diferencia, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Por ejemplo:

- $x^4 + 3x^3 - x$; $\sqrt[3]{x} + 3x^2$ son expresiones algebraicas de una sola variable (x)
- $x - y$; $xy^2 - \frac{\sqrt{x}}{y}$ son expresiones algebraicas de dos variables (" x " e " y ").

En particular, en esta sección, trabajaremos las distintas propiedades vistas en 2.2, además solo usaremos coeficientes reales.

Practica:

A) Evalúa las siguientes expresiones para el valor o los valores dados.

1. $3x^2 - 5x$ cuando $x = -1$:

$$3(-1)^2 - 5(-1) = 3 \cdot 1 - (-5) = 3 + 5 = 8$$

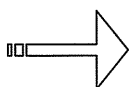
2. $2 \cdot (x - 5)^3 + (2x)^{-1}$ cuando $x = 2$:

$$2 \cdot (2 - 5)^3 + (2 \cdot 2)^{-1} = 2 \cdot (-3)^3 + 4^{-1} = -54 + \frac{1}{4} = -\frac{215}{4}$$

3. $5x - (x - 1)^2$ cuando $x = -1$

4. $-2x^3 + 3x^2 - 1$ cuando $x = 2$

5. $5 \cdot (-x + 2)^2 - (x - 1) + 2 \cdot x^{-1}$ cuando $x = \frac{1}{2}$



Recordando (y adquiriendo lenguaje):

Transformamos en suma

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Transformamos en producto
"Factor común"

Ahora trabajaremos usando, básicamente esta propiedad, la distributiva de la multiplicación respecto de la suma, en ambas "direcciones".

B) Transforma en suma:

1. $x^2 \cdot (5x + 3y) = x^2 \cdot 5 \cdot x + x^2 \cdot 3 \cdot y =$

Ordenamos cada término:
"los coeficientes primeros
y la parte literal
alfabéticamente"

$$= 5 \cdot x^2 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot y =$$

$$= 5x^3 + 3x^2y$$

Def. de Potencia

$x \cdot (3x + 6y) + y \cdot (5x + 2y) \xleftarrow{\text{Asociativa de la suma}}$

2. $= [x \cdot (3x + 6y)] + [y \cdot (5x + 2y)] =$ ordenamos cada término

$$= [x \cdot 3 \cdot x + x \cdot 6 \cdot y] + [y \cdot 5 \cdot x + y \cdot 2 \cdot y] \xleftarrow{\text{Def. de Potencia}}$$

$$= 3 \cdot x \cdot x + 6 \cdot x \cdot y + 5 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y^2 \xleftarrow{\text{Def. de Potencia}}$$

$$= 3 \cdot x^2 + (6xy + 5xy) + 2 \cdot y^2 =$$

Asociamos (★)

$$= 3x^2 + 11xy + 2y^2$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & 5x \cdot (x^2y + 6y) + 3x(xy + 2y) = \\
& = 5x^3y + \underline{30xy} + 3x^2y + \underline{6xy} = \\
& = 5x^3y + 3x^2y + \underline{30xy} + \underline{6xy} = \text{Commutativa de la suma} \\
& = 5x^3y + 3x^2y + (30xy + 6xy) = \\
& = 5x^3y + 3x^2y + 36xy
\end{aligned}$$

[*] Los términos asociados se denominan “**semejantes**” porque tienen la misma parte literal

$$\begin{aligned}
4. \quad & 7y(y - 3) = 7y(y + (-3)) = 7y^2 + 7(-3)y = 7y^2 - 21y \\
5. \quad & (2 + x) \cdot (y + 5) = (2 + x) \cdot y + (2 + x) \cdot 5 = 2y + xy + 10 + 5x
\end{aligned}$$

$$6. 6x \cdot (x - 3) =$$

$$7. 3xy \cdot (x + 5) =$$

$$8. (x - 1) \cdot (x + 1) =$$

$$9. (-5) \cdot \left(7 + \frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x =$$

$$10. 3x \cdot (x - 5y) + y \cdot (x + 3y) =$$

$$11. x - (3 - x) = x + (-1)[3 + (-x)] = x + (-3) + x = 2x - 3$$

$$12. 5 \cdot (x - 2) - x \cdot (3 + x) =$$

$$13. (x + 5)^2 = (x + 5) \cdot (x + 5) = \dots$$

$$14. (x - 5)^2 =$$

$$15. (x - 5)^3 = (x - 5) \cdot [(x - 5) \cdot (x - 5)] = \dots$$

$$16. (x - 2) \cdot (x + 2) + (x + 2)^2 =$$

$$17. (x - 1)^2 - x \cdot (x + 3) =$$

$$18. 2 \cdot (x - 1)^2 + 3x^2 =$$

$$19. [2 \cdot (x - 1)]^2 + (3x)^2 =$$

$$20. 5 \cdot (x + 2)^3 - 5x \cdot (x^2 - 1) =$$

Recuerda que, salvo que se indique lo contrario, la multiplicación “asocia”, y la suma “separa”

C) Transforma en producto:

$$\begin{aligned}
1. \quad & 3x^2 + 5x = 3 \cdot x \cdot \underline{x} + 5 \cdot \underline{x} = \text{x es el factor común en ambos términos} \\
& = (3x + 5) \cdot \underline{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2. \quad & 3x^2 + x = 3 \cdot x \cdot \underline{x} + 1 \cdot \underline{x} = \\
& = (3x + 1) \cdot \underline{x} \quad \text{1 es el elemento neutro del producto}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad & 5(x - 1) + 3x^2 - 3x = \\
& = 5(x - 1) + (3x^2 - 3x) = \\
& = \underline{5(x - 1)} + \underline{3x(x - 1)} = \text{Esto suele denominarse “factor común en grupo”} \\
& = (5 + 3x) \cdot \underline{(x - 1)}
\end{aligned}$$

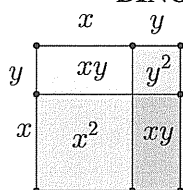
$$4. x^2 - 5x = \quad 5. x^3 + x^2 + 8x =$$

$$6. 3 \cdot (x+3) + 7xy + 21y = \quad 7. \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}x^2 = \quad 8. a^2x + ax^2 =$$

$$9. xy + 7x^2y + 5y^3 = \quad 10. x^2 - 25x + 5xy =$$

Algunas «formas especiales»

BINOMIO AL CUADRADO $\leftrightarrow$ TRINOMIO CUADRADO PERFECTO



Supongamos que x e y son reales positivos. Tenemos dos formas de calcular el área del cuadrado de la figura a nuestra izquierda.

Forma 1: $(x+y)^2$ (es decir, hacemos base por altura)

Forma 2: $x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (sumando las áreas de cada uno de los 4 rectángulos pequeños)

Claramente el área debe ser la misma, en uno o en otro caso, por lo que:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$\uparrow$ $\quad$ $\nwarrow$
 binomio al cuadrado $\quad$ trinomio cuadrado perfecto

Lo enunciado arriba es válido para cualesquiera valores reales de x e y . En efecto, podemos demostrar esto utilizando en primer medida, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma:

$$\begin{aligned}
 (x+y)^2 &\stackrel{(1)}{=} (x+y) \cdot (x+y) \stackrel{(1)}{=} (x+y) \cdot x + (x+y) \cdot y = x \cdot x + y \cdot x + x \cdot y + y \cdot y = \\
 &= x^2 + xy + xy + y^2 \stackrel{(3)}{=} x^2 + (xy + xy) + y^2 \\
 &\stackrel{(1)}{=} x^2 + 2xy + y^2
 \end{aligned}$$

(1) Prop. distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
 (2) Prop. conmutativa de la multiplicación
 (3) Prop. asociativa de la suma

Ejemplos:

$$1) (x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 + 6 \cdot x + 9$$

$$2) (x-3)^2 = [x+(-3)]^2 = x^2 + 2 \cdot (-3) \cdot x + (-3)^2 = x^2 - 6 \cdot x + 9$$

$$3) (x-y)^2 = [x+(-y)]^2 = x^2 + 2 \cdot (-y) \cdot x + (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$4) (3x+y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + y^2$$

$$5) (5x-3y)^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = 25 \cdot x^2 + 30xy + 9y^2$$

6) Combinando!

$$\begin{aligned}
 (x+6)^2 + x \cdot (x+2) &= (x^2 + 2 \cdot 6x + 6^2) + (x^2 + 2x) = x^2 + 12x + 36 + x^2 + 2x = \\
 &= 2x^2 + 14x + 36
 \end{aligned}$$

BINOMIO AL CUBO $\leftrightarrow$ CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

Supongamos que x e y son reales positivos. Tenemos dos formas de calcular el volumen del cubo de la figura a nuestra derecha.

Forma 1: $(x + y)^3$ (es decir, multiplicamos la superficie de la base por la altura)

Forma 2:

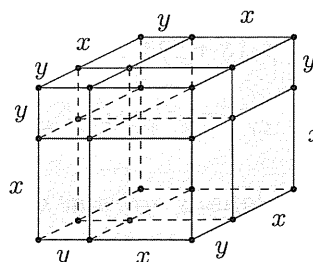
$x^3 + x^2y + x^2y + xy^2 + xy^2 + y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ (sumando los volúmenes de cada uno de los 6 prismas pequeños)

Claramente el volumen debe ser el mismo, en uno o en otro caso, por lo que:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$\uparrow$
 binomio al cubo

$\nwarrow$
 cuatrinomio cubo perfecto



Lo enunciado arriba es valido para cualesquiera valores reales de x e y . Lo demostraremos:

$$\begin{aligned}
 (x + y)^3 &= (x + y)^2 \cdot (x + y) \stackrel{(1)}{=} (x + y)^2 \cdot x + (x + y)^2 \cdot y \stackrel{(2)}{=} \\
 &= x^2 \cdot x + 2xy \cdot x + y^2x + x^2 \cdot y + 2xy \cdot y + y^2 \cdot y \stackrel{(3)}{=} \\
 &= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \stackrel{(4)}{=} \\
 &\stackrel{(5)}{=} x^3 + (2x^2y + x^2y) + (xy^2 + 2xy^2) + y^3 \stackrel{(1)}{=} \\
 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3
 \end{aligned}$$

(1) Prop. distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
 (2) Binomio al cuadrado
 (3) Def. potencia
 (4) Prop. conmutativa de la suma
 (5) Prop. asociativa de la suma

Ejemplos:

1) $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

2) $(x-2)^3 = (x+(-2))^3 = x^3 + 3x^2 \cdot (-2) + 3x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

3) $(x-y)^3 = (x+(-y))^3 = x^3 + 3x^2 \cdot (-y) + 3x \cdot (-y)^2 + (-y)^3 =$
 $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

4) $(5x+2)^3 = (5x)^3 + 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 5x \cdot 2^2 + 2^3 = 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$

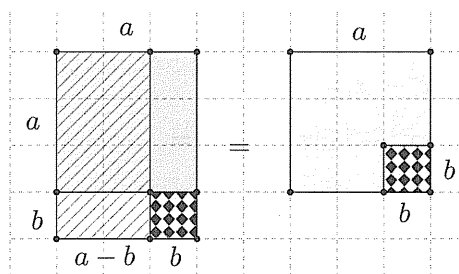
5) $(2x-5y)^3 = (2x)^3 - 3 \cdot (2x)^2 \cdot 5y + 3 \cdot 2x \cdot (5y)^2 - (5y)^3 = 8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

Supongamos que a e b son reales positivos, con $a > b$. Tenemos dos formas de calcular el área del rectángulo rayado de la figura a nuestra derecha.

Forma I: $(a + b) \cdot (a - b)$

Forma II: $a^2 - b^2$



Claramente el área debe ser la misma, en uno o en otro caso, por lo que:

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

$\nearrow$
 producto de la
 diferencia por la
 suma de a y b

$\uparrow$
 diferencia de cuadrados

Lo enunciado arriba es valido para cualesquiera valores reales de a y b Lo demostraremos:

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a - b) &= (a + b) \cdot a - (a + b) \cdot b = a \cdot a + \cancel{b \cdot a} - \cancel{a \cdot b} - b \cdot b = \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Ejemplos:

1) $(x - 3) \cdot (x + 3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

2) $(x + 5) \cdot (x - 5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

3) $(x + \sqrt{5}) \cdot (x - \sqrt{5}) = x^2 - \sqrt{5}^2 = x^2 - 5$

4) Combinando!

a)
$$\begin{aligned} (x + 1)^2 - (x - 2) \cdot (x + 2) &= x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4) = \\ &= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4 = 2x + 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x - 2 + x^4 - 4x^2 &= (x - 2) + (x^4 - 4x^2) = (x - 2) + x^2 \cdot (x^2 - 4) = \\ &= (x - 2) + x^2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = (x - 2) \cdot (1 + x^2 \cdot (x + 2)) = \\ &= (x - 2) \cdot (1 + x^3 + 2x^2) \end{aligned}$$

Ejercicios:

D) Resuelve hasta obtener la mínima expresión:

1. $2(x - 5)^2 + (x - 1) \cdot (x + 1) =$ 4. $(x - 1)^3 + (x - 1) \cdot (x + 1) - 3(x^2 - 1) =$

2. $x \cdot y \cdot (x - y) + 3 \cdot (x - y)^2 \cdot x =$ 5. $(-3) \left(x - \frac{3}{2}x^2 \right) - \left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{9} =$

3. $5\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}x + 3) - (3 - \sqrt{2})^2 =$

E) Transforma en producto (factorea)

1. $x^2 + 10x + 25 =$

2. $x^3 - x =$

3. $3x^3 - 12x^2 + 12x =$

4. $-x^3 - 2x^2 - x =$

5. $xy^2 - 3xy + 6x^2y^3 =$

6. $x^3 - 3x^2 - x + 3 =$

7. $x^4y + 3x^3y + 3x^2y + xy =$

8. $x^3 - x + (x^2y - 2xy + y) =$

9. $6x^2 - 9x + 15x^3 =$

10. $\frac{1}{7}x - \frac{2}{49}x^2 =$

F) Resuelve:

1. La diferencia de los cuadrados de las edades de Alberto y Bernarda es de 72 años: En tanto la suma de sus edades es 12. Sabiendo que Alberto es el mayor, ¿cuáles son las edades de ambos?.

2. ¿Cuál es el valor de x si $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 8$?

G) Determina si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Justifica.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : (-x - y)^2 = (x + y)^2$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : (x - 3)^3 = x^3 - 27$

3. $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : -(-x \cdot y) = x \cdot (-y)$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} : -3 \cdot [(-x) \cdot (-y)] = -3xy$

Simplificación de expresiones algebraicas (división).

Para realizar esta operación nos basamos en las propiedades de la potenciación, por lo que es muy importante poder escribir todas las expresiones algebraicas en forma de multiplicación. El proceso consiste en pasar de la forma original a una "más simple" que se dirá equivalente en tanto trabaje para los valores para los cuales la expresión original era válida. Veamos algunos ejemplos:

1. $\frac{5x + x^2}{x^2} = \frac{\cancel{x} \cdot (5 + x)}{x \cdot \cancel{x}} = \frac{5 + x}{x}, \quad (x \neq 0)$

2. $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(\cancel{x-1}) \cdot (x+1)}{\cancel{x-1}} = x + 1, \quad (x \neq 1)$

3. $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} = \frac{x \cdot (\cancel{x-2})}{(\cancel{x-2})^2} = \frac{x}{x-2}, \quad (x \neq 2)$

4. $\frac{x-3}{x^2-9} = \frac{\cancel{x-3}}{(\cancel{x-3}) \cdot (x+3)} = \frac{1}{x+3}, \quad (x \neq 3 \wedge x \neq -3)$

Se debe analizar los valores para los cuales son ciertas estas expresiones previo a simplificar!!! Se puede ver después de factorar

Ejercicios:**H) Simplifique y escriba las respuestas sin exponente negativo.**

1. $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{x^{-3}y} \right)^2 =$

3. $\frac{(2x^3y)^{-1}}{x} =$

2. $\left(\frac{5x^5y}{(5x)^{-1}y^2} \right)^{-2} =$

4. $\frac{(3xyz^{-3})^2}{(9x^2z^{-1})^{-2}} =$

I) Simplifique (indique previamente la restricción para la variable)

1. $\frac{x^2 - 5x}{-x^2} =$
2. $\frac{x^2 - 9}{3x^2 + 18x + 27} =$
3. $\frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} =$
4. $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} =$
5. $\frac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{(x - 3)^2} =$
6. $\frac{\frac{7}{5}x^2 - \frac{49}{5}x}{\frac{7}{5}x + \frac{7}{5}} =$
7. $\frac{2x^3 + 6x^2 + 6x + 2}{x^2 + 2x + 1} =$
8. $\frac{(x+1)^2 - 5(x+1)}{3x^2 - 9x - 12} =$
9. $\frac{8x^3 + 36x^2 + 54x + 27}{x \cdot (2x + 3)} =$
10. $\frac{x^2 - 5}{x + \sqrt{5}} =$

ALGUNAS ECUACIONES

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$P(x) = Q(x) \quad (\text{X})$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones algebraicas cuya variable es x , por lo que decimos que la ecuación (X) tiene por **INCÓGNITA** a x .

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican a la ecuación. El **conjunto solución** será aquel formado por todas las soluciones.

Las propiedades que cumplen las operaciones de suma y multiplicación vistas en secciones anteriores nos permiten resolver algunas ecuaciones. Para ello, “pasamos” de la ecuación original a una más “sencilla” por medio de la utilización de distintas propiedades. Esta nueva ecuación diremos que es **equivalente** a la primera ya que tiene el mismo conjunto solución.

Ejercicios:

J) Calcula en cada caso el valor de x , justificando cada paso:

$$\boxed{1.} \quad \frac{4}{5}x = -8$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{5}{4} \cdot (-8)$$

Prop. uniforme de la multiplicación.

$$\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5}\right)x = -10$$

Prop. asociativa de la multiplicación

$$1 \cdot x = -10$$

Elemento recíproco.

$$x = -10$$

Elemento neutro de la multiplicación.

Rta.: $x = -10 \rightarrow$ Si me pidiese el “conjunto solución” sería $S = \{-10\}$

$$2. -\frac{2}{5}x + 5 = 6 + 3x$$

$$\left(\frac{2}{5}x\right) + \left(-\frac{2}{5}x\right) + 5 + (-6) = -6 + 6 + 3x + \left(\frac{2}{5}x\right) \quad \text{Prop. uniforme de la suma}$$

$$\left[\left(\frac{2}{5}x\right) + \left(-\frac{2}{5}x\right)\right] + [5 + (-6)] = (-6 + 6) + \left[3x + \left(\frac{2}{5}x\right)\right] \quad \text{Prop. asociativa de la suma}$$

$$0 + (-1) = 0 + \frac{17}{5}x \quad \text{Elem. opuesto}$$

$$-1 = \frac{17}{5}x \quad \text{Elemento neutro de la suma}$$

$$\frac{5}{17} \cdot (-1) = \frac{5}{17} \cdot \frac{17}{5}x \quad \text{Prop. uniforme de la multiplicación}$$

$$-\frac{5}{17} = 1 \cdot x \quad \text{Prop. asociativa de la multiplicación y recíproco}$$

$$\text{Rta.: } x = -\frac{5}{17} \rightarrow \text{Si me pidiese el "conjunto solución" sería } S = \left\{-\frac{5}{17}\right\}$$

$$3. 3x - 4 = 5$$

$$5. x^2 + 9x + 3 = (x - 5)^2$$

$$4. 2 \cdot \left(\frac{5}{2}x + 1\right) = 6x$$

$$6. -[-3x + 2] + 9 = \frac{1}{2}x$$

K) Plantea la ecuación que modelizar el problema y resuelve:

1. La suma de un número con la sexta parte del mismo es 3. ¿Cuál es ese número?

2. Matías, un vendedor de un determinado local de venta de electrodomésticos tiene un salario fijo de \$5000, cuando las ventas que realiza en un mes superan los \$20000, se le suma a su salario un premio del 2,5% del excedente de los \$20000. Si el sueldo de Matías en marzo fue de \$5500, ¿cuál fue el monto de sus ventas en dicho mes?.

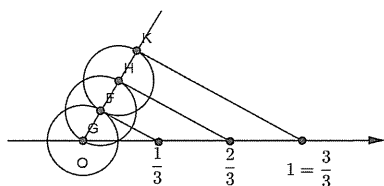
2.4 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.

Hay una relación biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta numérica. Con esto nos referimos a que a cada punto de una recta numérica le podemos hacer corresponder un número real (llamado coordenada del punto), y viceversa, “a cada número real le corresponde un único punto de la recta numérica”.

Sabías que..

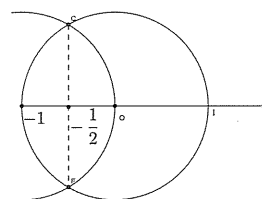
Se dice que la recta numérica es “continua”; es decir, que entre dos números reales (por más “juntos” que estén) siempre se podrá encontrar otro número real.

Veamos algunos ejemplos...



Con la técnica presentada arriba logramos dividir la unidad en tres partes iguales, por lo que, tendremos representados los primeros tercios. Si quisiéramos ubicar $\frac{4}{3}$, trasladamos con compás $\frac{1}{3}$, luego del 1.

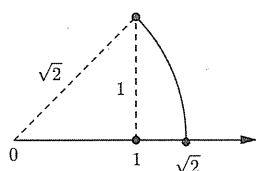
Si quisiéramos dividir en 5 partes iguales trazáramos 5 circunferencias.



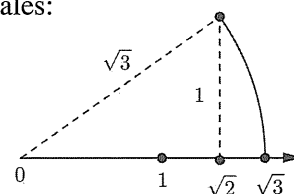
Arriba obtuvimos el punto medio de un segmento, en este caso de longitud uno, como esta entre el -1 y el 0, el punto medio representa a $-\frac{1}{2}$. Si obtuviésemos

el punto medio entre -1 y $-\frac{1}{2}$, obtendríamos a $-\frac{3}{4}$

Los números presentados arriba son racionales, veamos como podríamos dibujar en forma exacta algunos irracionales:



Usando el Teorema de Pitágoras simplemente nos armamos un triángulo rectángulo de catetos de longitud 1. Así la hipotenusa medirá $\sqrt{2}$, y esa es la distancia que existe desde el punto extremo de la hipotenusa al O, por lo tanto trasladando con compás esa medida ubicaremos a $\sqrt{2}$ a la recta numérica.



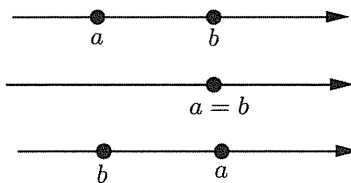
Otra vez el Teorema de Pitágoras simplemente nos armamos un triángulo rectángulo de catetos de longitud $\sqrt{2}$ y 1. Así la hipotenusa medirá $\sqrt{3}$, y procedemos igual que con $\sqrt{2}$

Ahora tú... Ubica en la recta numérica los números $-\frac{2}{5}$, $\frac{5}{4}$ y $-\sqrt{5}$.

2.4.1 – RELACIÓN DE ORDEN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES.

Como vemos tendremos números que se ubiquen a la izquierda de otros, por ejemplo, y así nuestros números (reales) quedaran “ordenados”. Intentando dar una explicación geométrica, dados dos números reales a y b , sus puntos representativos en la recta numérica podrán estar ubicados de tres formas posibles:

- í. a está a la izquierda de b
- íí. a está en el mismo lugar que b
- ííí. a está a la derecha de b



En el caso í. decimos que a es “menor que” b y se simboliza $a < b$, en íí. decimos que a es “igual que” b y se simboliza $a = b$ y finalmente en ííí. decimos que a es “mayor que” b y se simboliza $a > b$.

El hecho de que pueda pasar una y sólo una de las tres condiciones enunciadas arriba es lo que se conoce como “Ley de Tricotomía”.

Definiremos la relación de “menor” entre dos números reales a partir de su comparación con el cero (origen). En efecto:

$$a < b \text{ si } 0 < b - a$$

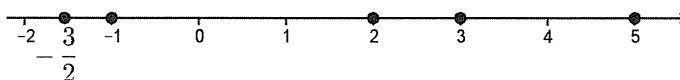
La relación de $\leq$, es una relación de orden en $\mathbf{R}$ (1)

Más definiciones:

- $a > b$ si $b < a$
- $a \leq b$ si $(a < b \vee a = b)$. Se lee “ a es menor o igual que b ”
- $a \geq b$ si $(a > b \vee a = b)$. Se lee “ a es mayor o igual que b ”

Ejemplos:

- $3 < 5$ ya que $5 - 3 = 2 > 0$, también podemos interpretarlo geométricamente “viendo” que el 5 queda a la derecha del 3.
- $-1 < 2$ ya que $2 - (-1) = 3 > 0$
- $-\frac{3}{2} < (-1)$ ya que $(-1) - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} > 0$



(1) Esto quiere decir que cumple con tres propiedades, para todos $a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ y $c \in \mathbf{R}$:

* Reflexiva: $a \leq a$

* Antisimétrica: Si $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

* Transitiva: Si $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Observaciones y propiedades:

➤ Propiedad Transitiva:

$$a < b \text{ y } b < c \text{ entonces } a < c$$

➤ Si tenemos $a < b$, esto es “ a ” está a la izquierda de “ b ”, al sumarles a ambos un número “ c ” cualquiera estaríamos generando en la recta numérica un “corrimiento” de ambos por igual con lo cual para estos nuevos números “ $a+c$ ” y “ $b+c$ ” siguen conservando la relación de orden previo, es decir “ $a+c$ ” está a la izquierda de “ $b+c$ ”. En definitiva:

$$\text{Si } a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

➤ Si tenemos $a < b$, al multiplicarles a ambos un número positivo c , se seguirá conservando la relación de orden previo. Por ejemplo, tenemos que $-3 < -\frac{1}{2}$ y si multiplicamos por 2 a ambos lados nos quedan -6 y -1 y se ve que $-6 < -1$. En símbolos:

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

➤ Si tenemos $a < b$, al multiplicarles a ambos un número negativo c , se invertirá la relación de orden previo. Por ejemplo, tenemos que $-3 < -\frac{1}{2}$ y si multiplicamos por -2 a ambos lados nos quedan 6 y 1 y se ve que $6 > 1$. En símbolos:

IMPORTANTE

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

○ Como consecuencia de esta última propiedad tenemos la siguiente:

$$a > 0 \Rightarrow -a < 0 \quad \text{¿Recuerdas que } -a = (-1) \cdot a?$$

Ejercicio:

A) Escriba coloquialmente y ejemplifique las siguientes propiedades (es decir, asigne valores a las variables y muestre que se cumple para dichos valores)

1. $0 < a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Prop. expresada coloquialmente: “Sean dos números positivos a y b

tal que a es menor que b . Entonces el recíproco de a es mayor que el recíproco de b ”.

Tengamos en cuenta siempre que lo que está a la izquierda del símbolo “ $\Rightarrow$ ” es la hipótesis de la propiedad dada (es decir, el dato).

$$\text{Ejemplo: } 0 < 2 < 3 \text{ y } \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

2. Para n impar: $a < b < 0 \Rightarrow a^n < b^n$

3. $\forall a \in \mathbb{R} : a^2 \geq 0$

4. $\forall a \in \mathbb{R} : -a^2 \leq 0$

Más observaciones!!!

¿Qué quiere decir...? Veamos algunas cuestiones de lenguaje cuando se nos presenta alguna desigualdad...

Escribimos $x < 1$ cuando queremos representar los números reales menores a 1. En la notación $1 \leq x < \sqrt{2}$, la variable x representa a todos los números reales mayores o iguales a 1 y menores a $\sqrt{2}$; tanto 1 como $\sqrt{2}$ son puntos extremos, la diferencia que se presenta en esta desigualdad es que la variable x no puede ser $\sqrt{2}$, pero sin embargo se le da la posibilidad de ser igual a 1.

La notación de conjuntos que nosotros conocemos del capítulo 1 la podemos usar aquí, pero también se suele usar otra notación mucho más práctica.. dicha notación es la de «intervalos reales». En el siguiente recuadro los definimos y dibujamos en la recta numérica:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

INTERVALO CERRADO

$$\triangleright [a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$$



INTERVALO ABIERTO

$$\triangleright (a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$$



INTERVALO CERRADO por IZQUIERDA y ABIERTO por DERECHA

$$\triangleright [a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$$



INTERVALO ABIERTO por IZQUIERDA y CERRADO por DERECHA

$$\triangleright (a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$$



Ejemplo:

Sean los intervalos $A = [2, 4]$, $B = [0, 3]$ y $C = [-2, 2]$, realicemos distintas operaciones con estos conjuntos numéricos:

- $A \cap B = [2, 3]$
- $A \cap C = \emptyset$
- $B \cap C = [0, 2]$
- $A \cup C = [-2, 4]$
-

❖ ¿Y cómo escribimos en intervalos reales expresiones como, por ejemplo, $x \leq 5$?

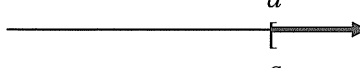
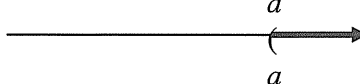
En esos casos recurrimos a los símbolos de $+\infty$ ó $-\infty$, para responder a la pregunta, deberíamos escribir así: $(-\infty, 5]$.

Ahora si, por ejemplo, queremos escribir $x \geq 5$ sería: $[5, +\infty)$

Atención: siempre que deba usar a los símbolos de $+\infty$ ó $-\infty$ en intervalos, deberé usar PARENTÉISIS

Formalizando:

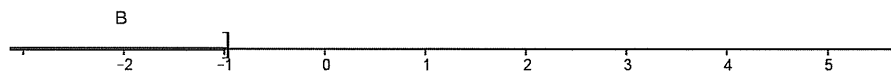
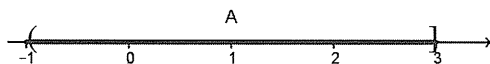
INTERVALOS INFINITOS $a \in \mathbb{R}$

- $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ 
- $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ 
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ 
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ 

Volviendo al **ejemplo** de la página anterior, si quisiéramos escribir el complemento de C, quedaría: $\bar{C} = (-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$

Ejercicios:

A) Escribe por comprensión los conjuntos que se grafican a continuación y luego resuelve las operaciones indicadas con ellos:



• Resuelve:

- $A \cap B$
- $A \cap C$
- $B \cup C$
- $\bar{A} \cap C$
- $(A \cup B) \cap C$

ALGUNAS INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas, por ejemplo:

$$P(x) \leq Q(x) \quad (\text{X})$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones algebraicas cuya variable es x , por lo que decimos que la inecuación (X) tiene por **INCÓGNITA** a x .

Resolver una inecuación es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican a la inecuación. El **conjunto solución** será aquel formado por todas las soluciones.

Dos inecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Uno puede transformar una inecuación dada en otra equivalente si utiliza las propiedades vistas anteriormente en la página 35.

Ejercicios:

B) Obtén el conjunto solución y gráficalo, justificando cada paso:

1. $x + 3 \geq 5$

$$x + 3 + (-3) \geq 5 + (-3)$$

$$\text{Prop.: } a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$x \geq 2$$

Entonces el conjunto solución será $S = [2, +\infty)$



2. $3x + 1 < 6$

3. $-2x + 1 < 3$

$$-2x + 1 + (-1) < 3 + (-1)$$

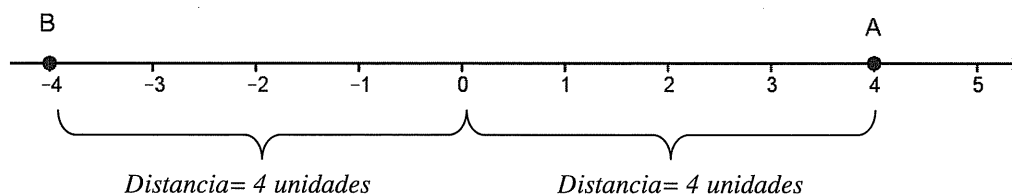
$$-2x < 2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)x > \left(-\frac{1}{2}\right)2$$

4. $x + 6 < 2x + 3$

5. $(x + 1)^2 \geq x^2 - 2x + 3$

2.4.2 -VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO REAL



La distancia que hay entre el punto representativo del -4 al origen de coordenadas (el cero) es 4, de igual forma sucede con el punto que representa al número 4. Para indicar estas distancias usamos “valor absoluto”. Decimos así, directamente, que el valor absoluto de -4 es 4, y de 4 también es 4 – porque se tiene la misma distancia –

Así, entonces, podemos **definir geométricamente** el valor absoluto de un número como la distancia que hay, en la recta numérica, desde su punto representativo al origen de coordenadas (es decir, el punto representativo del cero). Se utiliza el símbolo $||$ para indicar un valor absoluto.

En la figura de arriba, tendríamos:

$|-4| = 4$, lo que leemos “el valor absoluto de -4 es 4” o “la distancia de -4 a 0 es 4”

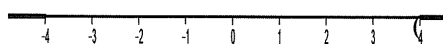
$|4| = 4$, lo que leemos “el valor absoluto de 4 es 4” o “la distancia de 4 a 0 es 4”



Así, la expresión $|x| = 4$, significa “x está a una distancia 4 del origen”, con lo cual obtendríamos los DOS valores 4 y -4.



También, de esta forma, podemos interpretar la expresión $|x| < 4$ como “los valores que están a una distancia menor a 4 del origen”.



Ó $|x| > 4$ como los valores cuya distancia al origen es mayor a 4”

Ejemplos:

Evalúe: a) $|9|$ b) $|-3,7|$ c) $|0|$

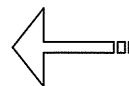
Solución:

a) $|9| = 9$, ya que 9 está a 9 unidades de distancia del 0.

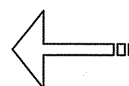
b) $|-3,7| = 3,7$, ya que -3,7 está a 3,7 unidades de distancia del 0.

c) $|0| = 0$

El valor absoluto de un número distinto de cero será siempre un número positivo (ya que, como vimos, se refiere a “distancias”). En tanto el valor absoluto de cero será cero, y éste es el único número con dicha propiedad.



También, podemos observar que un número y su opuesto tienen el mismo valor absoluto – las distancias de sus puntos al origen va a ser la misma –



Ya estamos en condiciones de mostrar la **definición de valor absoluto**:

Sea el número real a , entonces su valor absoluto, $|a|$ será:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$|9| = 9$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

$$|0| = 0$$

Ejercicio

(A) Grafique, si es posible, los conjuntos solución en cada caso

1. $|x| < 2$

5. $|x| = -2 \rightarrow$ El valor absoluto nunca puede ser negativo!

2. $|x| \leq 3$

6. $|x| < (-2)$ ¿menor que un número negativo?

3. $|x| > 1$

7. $|x| > 0$

4. $|2x| = 6$

8. $|x| > (-2) \rightarrow$ Todos los nros. reales cumplen con esto, por qué?

Algunas propiedades del valor absoluto que pueden resultarte útiles.

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\Leftrightarrow |a| \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\Leftrightarrow |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ (si } b \neq 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow |-a| = |a|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2} = |a|$$

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ y $k > 0$:

$$\Rightarrow |a+b| \leq |a| + |b|$$

$$|a-b| \geq ||a| - |b||$$

$$\Rightarrow |a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$$

$$\Rightarrow |a| > k \Leftrightarrow (a > k \text{ o } a < (-k))$$

Ejercicio

(B) Grafique, si es posible, e indique los conjuntos solución en cada caso

1. $\left| -\frac{2}{3} \cdot x \right| = 6$

2. $\left| -\frac{2}{3} \cdot x \right| < 6$

3. $|x+1| = 2$

Resolución: Si lo pensamos como distancia tendremos que el punto que representa al número " $x+1$ " está a una distancia 2 del origen, entonces dicho número deberá ser 2 ó -2. Así nos quedan determinadas dos ecuaciones, a saber:

$$x+1=2 \text{ ó } x+1=-2$$

Al resolverlas tendremos dos resultados $x=1$ y $x=-3$

Conjunto Solución: $S = \{-3, 1\}$



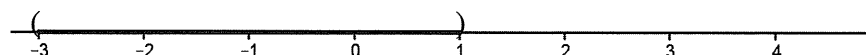
4. $|x+1| < 2$

Resolución: Lo podemos resolver de dos formas, como distancia o usando propiedades del cuadro de arriba (en esta misma página)

Forma 1: el punto que representa al número " $x+1$ " está a una distancia menor a 2 del origen. Así obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} -2 &< x+1 < 2 \\ -2+(-1) &< x < 2+(-1) & (*) \\ -3 &< x < 1 \end{aligned}$$

Conjunto Solución: $S = (-3; 1)$



Forma 2: Usando la propiedad mencionada llegamos directamente a la inecuación (*)

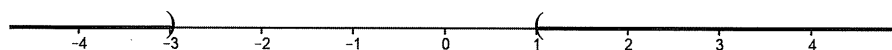
5. $|x+1| > 2$

Resolución: Igual que el 4. lo podemos resolver de dos formas, como distancia o usando propiedades del cuadro de arriba.

Forma 1: el punto que representa al número " $x+1$ " está a una distancia mayor a 2 del origen. Así obtenemos lo siguiente:

$$x+1 > 2 \text{ o } x+1 < (-2) \quad (*)$$

Conjunto Solución: $S = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$



Forma 2: Usando la propiedad mencionada llegamos directamente a las inecuaciones (*)

6. $|x-2| = 3$

7. $|x-2| \leq 3$

8. $|2x-3| = 1$

9. $|x+3| \geq 1$

CAPÍTULO 3: NÚMEROS COMPLEJOS

Seguimos ampliando el campo numérico...

Tal como surgió con los números reales, los números complejos surgieron por el interés (y necesidad) de dar solución a un problema dado. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ carece de solución real, ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero; es decir que no existe un número x real tal que $x^2 = -1$.

Fue necesario, entonces, ampliar el concepto de número para incluir aquellos que verificaran esta ecuación particular. La idea fue definir un nuevo número que verificara $x^2 + 1 = 0$.

Tal fue “ i ” definido de modo que $i^2 = -1$

Esta creación, genialidad de la mente humana, permitió llenar ciertos baches, pudiendo determinar ahora soluciones, por ejemplo, a toda ecuación polinómica. Su existencia ha simplificado diversos campos matemáticos (por ejemplo la geometría).

*El sistema de números resultante de adjuntar i y sus combinaciones al conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es el **sistema de los números complejos**, cuyo estudio es el objeto de este capítulo.*

Forma binómica de un número complejo:

Un número complejo es toda expresión

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales, e i se define por la relación $i^2 = -1$

- Al número a se lo llama parte o componente real de z y se representa mediante $\text{Re}(z)$
- Al número b es la parte o componente imaginaria de z y se representa por $\text{Im}(z)$

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow & \nwarrow \\ & (a) & + \quad (b) i \\ \text{Parte real} & & \text{Parte imaginaria} \end{array}$$

La unidad imaginaria

El número i , recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que i se comporta como un número real, respetando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Son válidas también las propiedades de la potencia:

$$a) i^r i^s = i^{r+s}$$

$$b) (i^r)^s = i^{r \cdot s} \text{ con } r, s \in \mathbb{Z}$$

Comentario:

El número i (del latín *imaginarius*) fue llamado así por el matemático Euler (1707-1783). Los nombres de imaginarios, complejos que hoy se emplean aparecen en el horizonte matemático hacia el siglo XVI y hacen referencia a las raíces cuadradas de números negativos como números imposibles o imaginarios o como “fantasmas de los números reales”.

Si bien los números complejos nacieron en una atmósfera de misterio y desconfianza, cuestionándose la validez de las operaciones, es en el siglo XIX cuando, a través de los trabajos de los matemáticos Wessell (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855) sobre la interpretación geométrica de los números complejos, se lograron sentar las bases matemáticas sólidas para el nuevo sistema de números.

- Es claro que la introducción de i permite resolver las raíces cuadradas de los números negativos. Así, por ejemplo:

i y $-i$ son raíces cuadradas de -1 pues $i^2 = -1$ y

$$(-i)^2 = -1$$

$2i$ es una de las dos raíces cuadradas de -4

- Se puede comprobar, también fácilmente, que las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4.

$$i^0 = 1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

A partir de este reconocimiento, en donde se nota que el resultado va a depender directamente del resto de la división entera del exponente por cuatro, es posible calcular cualquier **potencia de i** . Por ejemplo, para calcular:

$$a) i^{21} \text{ como } 21 = 4 \times 5 + 1, \text{ se tiene } i^{21} = (i^4)^5 i^1 = 1^5 i^1 = i$$

$$b) i^{-112} \text{ como } 112 = 28 \times 4 \text{ resto } 0, \text{ resulta}$$

$$i^{-112} = \frac{1}{i^{112}} = \frac{1}{(i^4)^{28}} = \frac{1}{1^{28}} = 1$$

Estamos en condiciones de generalizar lo observado en el siguiente teorema:

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$i^n = i^r$$

donde r es el resto de la división de n por 4, por lo que r puede asumir los valores 0, 1, 2 o 3.

Demostración:

Al dividir n por 4 obtenemos un resto r , un cociente c y se puede verificar que $n = c \times 4 + r$, entonces:

$$i^n = i^{c \times 4 + r} = i^{c \times 4} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = i^r$$

Ejemplos:

1) $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 0$

El resto de dividir 12 por 4 es 0,
el resto de dividir 13 por 4 es 1,
el resto de dividir 14 por 4 es 2 y
el resto de dividir 15 por 4 es 3,
entonces:

$$\begin{aligned} i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} &= \\ &= i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = \\ &= 1 + i - 1 - i = 0 \end{aligned}$$

2) $i^{-14} + i^{-16} = 0$

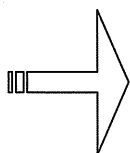
El resto de dividir 14 por 4 es 2 y
el resto de dividir 16 por 4 es 0,
entonces:

$$\begin{aligned} i^{-14} + i^{-16} &= \\ \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{16}} &= \\ \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^0} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto de los números complejos

Lo simbolizaremos con la letra C , y está formado por todos los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria, es decir que $i^2 = -1$.
Resumiendo:

$$C = \{z = a + bi / a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$



- Los números reales son complejos ($\mathbb{R} \subset C$), ya que si

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i$$

- A los números complejos de la forma bi , es decir aquellos que su parte real es nula, se los denomina **imaginarios puros**.

Igualdad de números complejos

Dos números $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales, en símbolos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$$

Opuesto de un número complejo

Si $z = a + bi$, entonces el opuesto de z es $-z = (-a) + (-b)i$

Suma y resta de números complejos

Debido a que hemos introducido a los números complejos anunciando que iban a respetar las propiedades asociativa, conmutativa y distributivas, entre otras cosas, podemos ir resolviendo algunos ejemplos

1.

$$\begin{aligned}(2+5i) + (3+8i) &= 2+5i+3+8i = 2+3+5i+8i = \\ &= (2+3) + (5i+8i) = 5 + (5+8)i = \\ &= 5+13i\end{aligned}$$

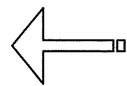
2.

$$\begin{aligned}(2+5i) - (3+8i) &= (2+5i) + [-(3+8i)] = (2+5i) + [(-3) + (-8)i] = \\ &= [2+(-3)] + [5+(-8)]i = \\ &= -1+(-3)i = -1-3i\end{aligned}$$

En general:

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, se tiene:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i\end{aligned}$$



Multiplicación de números complejos

1.

$$\begin{aligned}(2+3i) \cdot (5+6i) &= (2+3i) \cdot 5 + (2+3i) \cdot 6i = 2 \cdot 5 + 3i \cdot 5 + 2 \cdot 6i + 3i \cdot 6i = \\ &= 10 + (3 \cdot 5)i + (2 \cdot 6)i + (3 \cdot 6) \cdot (i \cdot i) = \\ &= 10 + 15i + 12i + 18 \cdot i^2 = 10 + 15i + 12i + 18 \cdot (-1) = \\ &= 10 + (-18) + (15+12)i = -8 + 27i\end{aligned}$$

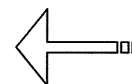
2.

$$\begin{aligned}(3-5i) \cdot (1+2i) &= 3-5i+6i-10i^2 = 3-5i+6i-10 \cdot (-1) = \\ &= 3+10+6i-5i = 13+i\end{aligned}$$

En general:

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, se tiene:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2)i$$



Práctica:

1. Resuelve las siguientes operaciones con números complejos:

a. $(5+7i) \cdot (2+i) + (1+3i)$ c. $5i + (1-i)^3$ e. $2 \cdot i^{129} + 3i(3-i)$

b. $(2+3i)^2$ d. $(1+i)^2 - (2+3i)$ f. $(5-i)^2 - (2-2i)$

2. Obtenga los valores de x e y reales tales que los números $z = x + 2yi$ y $w = 3 \cdot (5-i) + 2 + 3i$ sean iguales.

3. Encuentre el valor del número real k de forma que $z = (k + 5i) \cdot (2 + i) + 3i$ sea:

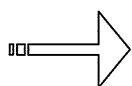
- a. un número real
- b. un imaginario puro

4. Muestre que los números $1 - i$ y $1 + i$ verifican la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

5. Calcula los números reales x e y para que se verifique la igualdad

$$(3 + xi) - (y + 6i) = 8 - 3i$$

Conjugado de un número complejo



El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$

Ejemplos

1. $\overline{3 + 5i} = 3 - 5i$

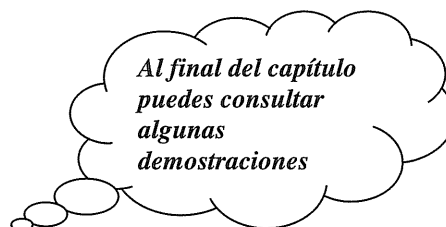
3. $\overline{3i} = \overline{0 + 3i} = 0 - 3i = -3i$

2. $\overline{7 - 2i} = 7 + 2i$

4. $\overline{8} = \overline{8 + 0i} = 8 - 0i = 8$

Propiedades $z = a + bi$

- $z = \bar{\bar{z}}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$
- $z + \bar{z} = 2a$
- $z - \bar{z} = 2bi$
- $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $-\bar{z} = \overline{-z}$



División de números complejos

Queremos dividir el número complejo $10 + 5i$ con el complejo $1 + 2i$, es decir queremos efectuar

$$\frac{10 + 5i}{1 + 2i}$$

Con “resolver” nos referimos a llegar a la forma $a + bi$

$$\frac{10+5i}{1+2i} = \frac{10+5i}{1+2i} \cdot 1 = \frac{10+5i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(10+5i) \cdot (1-2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{20-15i}{5} = 4-3i$$

Multiplico denominador y numerador por el conjugado del denominador

Por prop. de la multiplicación de conjugados

En general:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Práctica:

6. Resuelve:

a. $\frac{2+6i}{1+\sqrt{3}i}$

d. $\frac{3+i}{1+i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

g. $\frac{i^{12}i^{-121} + i^{100}}{i^{10}}$

b. $\frac{10+5i}{2-i}$

e. $\frac{(14+11i)-13i}{i}$

h. $\left(\frac{1}{3}i \right) \div (2i)$

c. $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2$

f. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^4$

i. $\frac{(2+5i)(-3+i)}{2-5i}$

7. Calcule el número real a tal que $\frac{4+ai}{1+i}$ resulte ser un número real.

Recíproco de un número complejo no nulo.

Definimos el recíproco de $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ como aquel número complejo w tal que

$$z \times w = 1$$

y lo simbolizamos $z^{-1} = \frac{1}{z}$

¿Cómo lo obtenemos?

Por ejemplo si $z = 3+i$, tendremos que su recíproco es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{1}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

Así podemos definir también el cociente entre complejos como una multiplicación, en efecto:

$$\frac{z}{w} = z \times w^{-1}$$

Con lo que podemos ampliar las propiedades de los conjugados.

$$\triangleright \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\triangleright \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (z \neq 0)$$

$\triangleright$ Si con $R(z_1, z_2, \dots, z_r)$ se indica una operación efectuada combinando los complejos $z_1, z_2, \dots, z_r$ en sumas, productos, potencias y cocientes, entonces $\overline{R(z_1, z_2, \dots, z_r)} = R(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_r})$

Práctica:

8. Encuentre el número z cuyo inverso es $3 + 4i$.

9. Encuentre los números complejos $z = a + bi$ tales que:

a) $\frac{1}{z} = \overline{z}$

Queremos que $\frac{1}{a + bi} = a - bi$, esto es lo mismo que pedir que $(a - bi)(a + bi) = 1$, con lo

que tenemos: $\boxed{a^2 + b^2 = 1}$

b) $z = -\overline{z}$

c) $z = \overline{z}$

10. Encuentre los números reales x e y que satisfacen:

a) $(x + yi)(3 - 2i) = 4 + i$

b) $(x + iy)(1 + i) = 3 - i$

c) $(x + iy)4i = 14i$

11. Escribe un número complejo tal que:

a) Su parte real sea el triple de su parte imaginaria

b) Sea un imaginario puro que al elevarlo a la 3 su parte imaginaria sea 8

12. La suma de un número complejo con su conjugado es 18 y el producto entre ambos es

85. Escribe todas las soluciones posibles.

Algunas demostraciones:

$$\blacksquare \quad z - \bar{z} = 2bi, \text{ en efecto:}$$

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= a + bi - (a - bi) = \\ &= a + bi - a + bi = \\ &= 2bi \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2,$$

en efecto:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = \\ &= a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - (-1)b^2 = \\ &= a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \text{ en efecto:}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + b_1i + a_2 + b_2i} = \\ &= \overline{a_1 + a_2 + b_1i + b_2i} = \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

CAPÍTULO 4: ECUACIONES

Diofanto fue un matemático griego del siglo III d.C. De su vida poco se sabe sin embargo en el epitafio de su tumba se cuentan algunos detalles y finalmente se puede deducir su edad.

-al lado del texto, su traducción “algebraica”-

Dios le concedió pasar la sexta parte de su vida en la juventud,
un duodécimo en la adolescencia,
un séptimo en un estéril matrimonio.

Pasaron cinco años más y nació un hijo. Pero apenas este hijo había alcanzado la mitad de la edad del padre, cuando murió.

Durante cuatro años más, mitigando su dolor con el estudio de la ciencia de los números, vivió Diofanto, antes de llegar al fin de su existencia.

x : “edad de Diofanto”

juventud $\rightarrow \frac{1}{6}x$ adolescencia $\rightarrow \frac{1}{12}x$
matrimonio $\rightarrow \frac{1}{7}x$

$$\text{Así: } \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$$

4.1 – ECUACIONES LINEALES

Diremos que una ecuación es **lineal** cuando se puede escribir de la forma:

$$a \cdot x + b = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Llamaremos x a la incógnita, y a los números a y b coeficientes.

Para resolver ecuaciones, tal cual lo vimos en el capítulo 2, debemos utilizar las propiedades de la suma y multiplicación de números reales. *La idea es pasar de una ecuación a una equivalente⁽¹⁾ más sencilla, entendiendo esto como tratar de “aislar” la incógnita, es decir, tenerla sola de un lado de la ecuación.*

Ejemplos:

1. Resuelva $3x - 6 = 9$

$3x - 6 = 9$ Sumo 6 a ambos lados

$$3x - 6 + 6 = 9 + 6$$

$$3x = 15$$

Multiplico $\frac{1}{3}$ a ambos lados

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 15$$

$$x = 5$$

$$S = \{5\}$$

2. Resuelva $2x + 7 = -x + 49$

$2x + 7 = -x + 49$ Sumo x a ambos lados

$$2x + x + 7 = -x + x + 49$$

$$3x + 7 = 49$$

Sumo -7 a ambos lados

$$3x + 7 - 7 = 49 - 7$$

$$3x = 42$$

Multiplico $\frac{1}{3}$ a ambos lados

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = \frac{1}{3} \cdot 42$$

$$x = 14$$

$$S = \{14\}$$

⁽¹⁾ Dos ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto solución

Al resolver ecuaciones lineales podremos encontrarnos con tres tipos de soluciones, en el caso de los ejemplos anteriores tenemos un tipo, donde hallamos una única solución. ¡Veamos qué más puede suceder!

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \frac{1}{2}x + 2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) \\
 \frac{1}{2}x + 2 &= 2 \cdot \frac{1}{4}x + 2 \cdot 1 \\
 \frac{1}{2}x + 2 &= \frac{1}{2}x + 2 \\
 \frac{1}{2}x + 2 - 2 &= \frac{1}{2}x + 2 - 2 \\
 \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}x \\
 \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x &= 0 \\
 0 \cdot x &= 0
 \end{aligned}$$

Cualquier número real multiplicado por cero resulta cero, con lo cual está ecuación tiene infinitas soluciones. El conjunto Solución será $S = R$

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} \quad 2x + 5 - x &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) \\
 2x + 5 - x &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + 3 \right) \\
 x + 5 &= 2 \cdot \frac{1}{2}x + 2 \cdot 3 \\
 x + 5 &= x + 6 \\
 x + 5 - 6 &= x + 6 - 6 \\
 x - 1 &= x \\
 x - 1 - x &= x - x \\
 -1 &= 0 \cdot x
 \end{aligned}$$

Cualquier número real multiplicado por cero resulta cero, con lo cual está ecuación no tiene solución. El conjunto Solución será $S = \emptyset$

Generalizando, tenemos que las ecuaciones lineales $a \cdot x + b = 0$ presentan tres tipos de solución (y el resultado dependerá de los coeficientes a y b):

- **Única solución** (cuando $a \neq 0$)
- **Infinitas soluciones** (cuando $a = 0 \wedge b = 0$)
- **Ninguna solución** (cuando $a = 0 \wedge b \neq 0$)

Práctica:

1. Resuelva cada ecuación:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad 2 - (x + 5) &= 4x - 8 \\
 2 - x - 5 &= 4x - 8 && \text{Sumo 8 a ambos lados} \\
 -3 - x + \dots &= 4x \\
 5 - x + \dots &= \dots && \text{Sumo } x \text{ a ambos lados} \\
 5x &= 5 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

Verifica el resultado!!

$$\begin{aligned}
 2 - (1 + 5) &\stackrel{?}{=} 4 \cdot 1 - 8 \\
 2 - 6 &\stackrel{?}{=} 4 - 8 \\
 -4 &= -4 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ii)} & 8x + 2 \cdot (x - 4) = 5x + 3 \\ \text{iii)} & -5 \cdot \left[3 - (2 - x) - \frac{1}{5} \right] = -x + 9 \\ \text{iv)} & \frac{x + 3}{5} = \frac{2x - 1}{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{v)} & 3x - (x - 5) = 1 - 2 \cdot (5 - x) \\ \text{vi)} & \frac{2x - 4}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x + 3}{3} \\ \text{vii)} & -(-x - 6) + 2 = x + 8 \end{array}$$

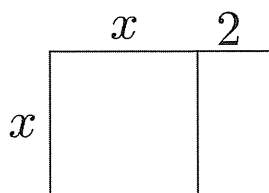
2. Determine el conjunto solución en cada caso:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & 7y - 5 \cdot (2 - y) = \frac{4y - 3}{2} \\ \text{ii)} & -\left[4 - (x - 2)^2 + 1 \right] = x^2 - 2x \\ \text{iii)} & 4x + 12 - 7x = -3(x - 1) + 9 \\ \text{iv)} & 5x - 8 - 9x = -4(2 + x) + 1 \end{array}$$

3. Resuelva los siguientes problemas:

- Resuelve el problema de la edad de Diofanto planteado al inicio del capítulo.
- Si Francisco se compra hoy un celular lo paga $\frac{8}{9}$ del precio de lista y puede hacerlo en 4 cuotas de \$842. ¿Cuánto ahorra Francisco?.
- Una sandía pesa 12kg, se sabe que el 95% de su peso es agua. Se la deja un tiempo bajo el sol, así se evapora parte del agua y termina siendo el 93% del peso de la sandía. ¿Cuánto pesa la sandía ahora?.
- Si se le resta a 6 siete veces un cierto número, el resultado es cinco veces el número. ¿De qué número se trata?.
- Un cable de 44m se corta en dos trozos, uno es tres veces más largo que el otro. ¿Cuáles son las longitudes de cada uno de los trozos?.
- Agustín desea elaborar un litro de jugo de naranja que posea una concentración del 10% de dicho jugo; para ello dispone de dos tipos de jugos, uno con concentración de 8% y otro de 18%. ¿Cuántos litros deberá colocar de cada uno de estos para lograr el objetivo?

4.2 – ECUACIONES CUADRÁTICAS



Cuando un lado de un cuadrado de lado x se aumenta dos unidades se forma un rectángulo cuyo área es 80.
¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

En símbolos: $(x + 2) \cdot x = 80$

Distribuyendo y rearmando, nos queda: $x^2 + 2x - 80 = 0$

Diremos que una ecuación es **cuadrática** cuando se puede escribir de la forma:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Llamaremos x a la incógnita, y a los números reales a , b y c coeficientes.

Un ejemplo de ecuación cuadrática que podríamos rápidamente resolver, con los elementos que por ahora tenemos, sería:

$$x^2 - 3x = 0$$

Es sencillo ya que podemos factorizar esta expresión y luego usar la condición de anulación del producto, en efecto:

$$x^2 - 3x = x \cdot (x - 3)$$

Con lo cual, nos queda: $x \cdot (x - 3) = 0$, por lo que tenemos dos posibilidades: $x = 0$ o $x - 3 = 0$. De donde tenemos, entonces, dos soluciones: $x = 0$ y $x = 3$.

En general no es tan sencillo resolver de esa forma, pero por suerte, podemos obtener las soluciones usando una fórmula, comúnmente llamada **RESOLVENTE**.

Una ecuación cuadrática admite, a lo sumo, dos soluciones, éstas se obtienen aplicando la fórmula:

RESOLVENTE

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¡Vamos a deducir! El procedimiento que se usa es el de completar cuadrados.

Como $a \neq 0$, la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ es equivalente con la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Se completa la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x$ sumando y restando $\frac{b^2}{4a^2}$ para obtener el cuadrado

de un binomio y luego haciendo transformaciones sucesivas convenientes se llega al resultado deseado.

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right) = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplos (y observaciones):

- Resuelve la ecuación $x^2 - 9x + 8 = 0$.

En esta ecuación tenemos $a=1$, $b=-9$ y $c=8$. Entonces, reemplazando en la fórmula

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{9 \pm 7}{2}$$

$$x_1 = \frac{9+7}{2} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{9-7}{2}$$

En este caso:

$$b^2 - 4ac > 0$$

Por lo que tenemos dos soluciones: $x_1 = 8$ o $x_2 = 1$

- Resuelve la ecuación $-5x^2 = \frac{1}{5} - 2x$

Antes que nada, debemos reescribir la ecuación, para así reconocer bien los coeficientes.

Entonces: $0 = \frac{1}{5} - 2x + 5x^2$, con lo que $a=5$, $b=-2$ y $c=\frac{1}{5}$. Luego, reemplazamos en la fórmula

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}}}{2 \cdot 5}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{10}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{10}$$

$$x = \frac{1}{5}$$

En este caso:

$$b^2 - 4ac = 0$$

Por lo que tenemos una única solución: $x = \frac{1}{5}$

- Resuelve la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$

En esta ecuación tenemos $a=1$, $b=-2$ y $c=5$. Entonces, reemplazando en la fórmula

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4i}{2}$$

 **CUIDADO**

Si trabajas sólo con números reales no puedes seguir!

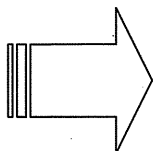
$$x_1 = \frac{2+4i}{2} \quad \text{o} \quad x_2 = \frac{2-4i}{2}$$

En este caso:

$$b^2 - 4ac < 0$$

Por lo que tenemos dos soluciones complejas: $x_1 = 1+2i$ o $x_2 = 1-2i$

- Antes de aplicar la resolvente a una ecuación de la forma: $8x^2 - 32x + 32 = 0$, donde se observa un factor común (en este caso 8) primero extrae dicho factor común para que te quede una expresión más sencilla. En efecto, resolver la ecuación del ejemplo es lo mismo que resolver $8 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$. Este consejo está a efectos de que te queden “cuentas” más sencilla.



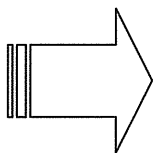
El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y decide sobre la naturaleza de las soluciones de la ecuación:

- Si $\Delta > 0$ entonces las dos soluciones son reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$ entonces las dos soluciones son iguales. Se dice que la ecuación tiene una solución doble.
- Si $\Delta < 0$ no hay solución real. Las soluciones son dos números complejos conjugados.

Ejemplo

Analice, sin resolver, si las siguientes ecuaciones cuadráticas poseen dos soluciones reales distintas, una sola o ninguna:

- $x^2 + 2x + 6 = 0$, aquí $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -20 < 0$ entonces no tiene solución real (esto quiere decir que no existe ningún número real por el que pueda reemplazar a x y me dé cero).
- $3x^2 + 2x - 6 = 0$, aquí $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 76 > 0$ entonces tiene dos soluciones reales.
- $x^2 + 2x + 1 = 0$, aquí $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ entonces tiene una única solución real.



Siendo $ax^2 + bx + c = 0$, con sus soluciones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Se puede demostrar las siguientes relaciones entre las soluciones y los coeficientes de la ecuación:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Práctica:

1. Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas:

i) $x^2 - 2x + 2 = 0$

iii) $x^2 - 4 = 0$

ii) $-x^2 + 3x - 2 = 0$

iv) $x^2 + 4 = 0$

2. Encuentre el valor de k de forma que $x=2$ sea solución de la ecuación:
 $x^2 - 6kx + 8 + 2k = 0$

3. Encuentre el valor de k para el cual la suma de las soluciones de la ecuación
 $5x^2 + 6x + k = 0$ sea el doble de su producto.

4. Resuelva los siguientes problemas:

i) Resuelve el problema planteado al principio de esta sección.

ii) Tres enteros pares consecutivos son tales que el cuadrado del tercero es 76 más que el cuadrado del segundo. Obtenga esos tres números.

iii) Un negocio vende n lámparas, no más de 50 lámparas, a un precio de $\$(92 - n)$ cada lámpara. ¿Cuántas debe vender obtener \$1938?

iv) Determine las dimensiones de un rectángulo sabiendo que el largo es $\frac{4}{3}$ de su ancho y que su área es de 1200 m^2 .

5. Demuestre que si los coeficientes a y c de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tienen signos contrarios entonces las soluciones son reales y distintas.

Resolución de otro tipo de ecuaciones que pueden reducirse a una cuadrática.

Ecuaciones con radicales

En lo que sigue realizaremos pasos para transformar nuestra ecuación original a una ecuación cuadrática, algunos de estos pasos podría, eventualmente, "agregar soluciones", las cuales llamaremos "soluciones extrañas". Veamos un ejemplo, paso a paso:

Ejemplo 1:

$$\sqrt{3x-2} = x$$

1º Elevo al cuadrado miembro a miembro

$$(\sqrt{3x-2})^2 = x^2$$

$$3x - 2 = x^2$$

2º Armo la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Con la resolvente, obtengo como soluciones a $x = 2$ y $x = 1$

En el primer paso pudimos haber agregado soluciones, por lo que debemos verificar estas últimas soluciones en la ecuación original:

$$x = 2: \sqrt{3 \cdot 2 - 2} = 2, \text{ entonces la verifica}$$

$$x = 1: \sqrt{3 \cdot 1 - 2} = 1, \text{ también la verifica.}$$

Entonces tanto 1 como 2 son soluciones de la ecuación.

Ejemplo 2:

$$\sqrt{x-1} + x = 1$$

1º Dejo en un miembro el radical solo

$$\sqrt{x-1} = 1 - x$$

2º Elevo al cuadrado miembro a miembro

$$x - 1 = (1 - x)^2$$

$$x - 1 = 1 - 2x + x^2$$

3º Armo la ecuación cuadrática

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x = 2 \text{ y } x = 1$$

4º Verifico en la ecuación original

$$x = 2: \sqrt{2-1} + 2 = 3 \neq 2, \text{ entonces 2 no verifica la ecuación, es una solución "extraña"}$$

$$x = 1: \sqrt{1-1} + 1 = 1, \text{ entonces 1 sí verifica la ecuación}$$

Rta: la solución a la ecuación es $x = 1$

Ecuaciones bicuadráticas

Son ecuaciones del tipo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, se resuelven realizando una primera sustitución $y = x^2$, reduciendo la ecuación original a una cuadrática. Veamos un ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$y = x^2 \mapsto y^2 - 3y - 4 = 0$$

Con la resolvente obtengo las soluciones: $y = 4$ e $y = -1$, ésta última, en los reales, no podría ser ya que, en tal caso, $y \geq 0$. Así que sólo queda $y = 4$, es decir que $x^2 = 4$, de donde $x = 2$ o $x = -2$.

Así, las soluciones reales de la ecuación original son: $x = 2$ o $x = -2$.

Si estuviésemos trabajando con números complejos, tendríamos, además: $x = \pm i$

Práctica:

6. Resuelva las siguientes ecuaciones:

a. $x^4 - x^2 - 2 = 0$

c. $\sqrt{x+6} = x$

b. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

d. $x - \sqrt{x+7} - 5 = 0$

Resumen:

Para resolver las ecuaciones se:

- *Aplica la propiedad distributiva para eliminar paréntesis, si fuera necesario.*
- *Eliminan fracciones y decimales.*
- *Suma en ambos miembros de la ecuación los términos que sean semejantes.*
- *Emplean las propiedades de suma y producto para despejar la variable.*
- *Eliminan las fracciones multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en el caso de ecuaciones racionales.*
- *Transforman las ecuaciones radicales en enteras eliminando los términos en los cuales la incógnita está en el radicando.*

7. Resuelve los siguientes problemas:

a. En una librería comercial, el precio p de venta de un lápiz marca FCEIA se fija de acuerdo a la disponibilidad del mismo, es decir la cantidad n en stock. La forma de obtenerlo se puede describir mediante una ecuación lineal $n = ap + b$, donde a y b son coeficientes reales. Se sabe que si $p = \$2$, entonces hay en stock $n = 130$, y que si $p = \$4$, entonces hay en stock $n = 320$. ¿Cuántos lápices FCEIA hay en stock si el precio de venta es de \$2.8

b. Un tanque para exhibición de especies marinas contiene 20.000 litros de agua de mar. El agua de mar contiene un 7,5% de sal. ¿Cuántos litros, redondeando al litro más próximo, de agua dulce se necesita añadir al tanque para que la mezcla contenga solo un 7% de sal?

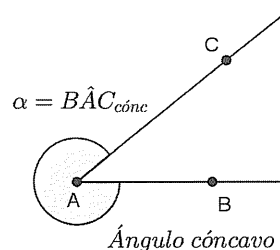
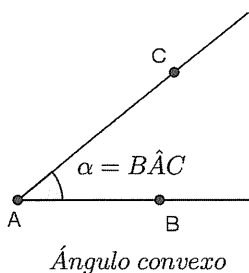
c. Se sabe que la altura a que adquiere una pelotita según el tiempo t (en segundos) está regida por la ecuación $a = -4,5t^2 + 2t + 1$. ¿En qué instante tocará el suelo? (aproxima al segundo más cercano).

CAPÍTULO 5: GEOMETRÍA

El objetivo de este capítulo será recordar algunas ideas y conceptos de la geometría euclidea más elemental. Trabajaremos con ángulos, polígonos. Analizaremos congruencias, semejanzas. Y finalmente “mediremos” perímetros, áreas, volúmenes.

ÁNGULOS

Los ángulos los indicaremos con letras griegas o con letras (3), poniendo siempre en el medio (debajo del acento) la letra que nombra al vértice del ángulo. Cuando no aclaremos nada, el ángulo nombrado será el convexo. Las semirrectas que delimitan el ángulo son las llamadas “lados” del mismo.



Práctica:

1. Observe el dibujo e indique:

- Un ángulo llano (por ejemplo: $\widehat{ABC}$):

.....

- Un ángulo recto (por ejemplo: $\widehat{ABE}$):

.....

- Un ángulo agudo (por ejemplo: $\widehat{ABF}$):

.....

- Un ángulo obtuso (por ejemplo: $\widehat{ABG}$):

.....

- Un par de ángulos complementarios (por ejemplo: $\widehat{ABF}$ y $\widehat{FBE}$):

.....

- Un par de ángulos suplementarios (por ejemplo: $\widehat{ABF}$ y $\widehat{FBD}$):

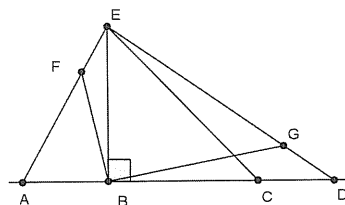
.....

- Un par de ángulos consecutivos (por ejemplo: $\widehat{ABF}$ y $\widehat{FBG}$):

.....

- Un par de ángulos adyacentes (por ejemplo: $\widehat{ABF}$ y $\widehat{FBD}$):

.....

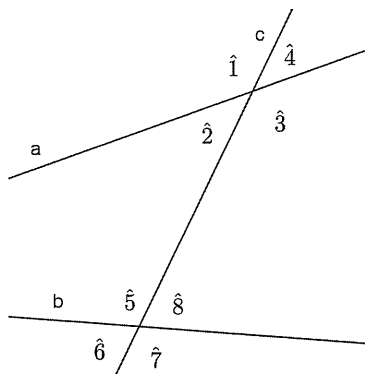


2. En cada caso determine el valor del ángulo pedido:

- | | |
|--|---|
| a. α es el triple de $21^\circ 55'$ | d. δ es la suma de $15^\circ 21'$ y $2^\circ 50'$ |
| b. β es el suplemento de $89^\circ 15' 12''$ | e. ε es la diferencia de $15^\circ 21'$ y $2^\circ 50'$ |
| c. χ es el complemento de $89^\circ 15' 12''$ | f. ϕ es un tercio de $153^\circ 27'$ |

3. La suma de dos ángulos α y β es $31^\circ 50' 25''$ y la diferencia $11^\circ 9' 55''$, ¿cuánto mide cada uno?

ÁNGULOS DETERMINADOS POR DOS RECTAS Y UNA TRANSVERSAL



- $\hat{2}$ y $\hat{8}$ se denominan alternos internos.
- $\hat{4}$ y $\hat{6}$ se denominan alternos externos.
- $\hat{4}$ y $\hat{8}$ se denominan correspondientes.
- $\hat{3}$ y $\hat{8}$ se denominan conjugados internos.
- $\hat{4}$ y $\hat{7}$ se denominan conjugados externos.
- $\hat{1}$ y $\hat{3}$ se denominan opuestos por el vértice.

Los ángulos correspondientes son congruentes si y sólo si las rectas a y b son paralelas.

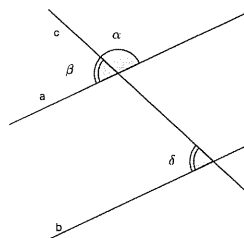
En símbolos:

$$\hat{1} = \hat{5} \Leftrightarrow a // b$$

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes

Práctica:

4. Sabiendo que las rectas a y b son paralelas, y que $\alpha = 3x + 15$ y que $\delta = 4x + 4$; calcule α, β y δ .



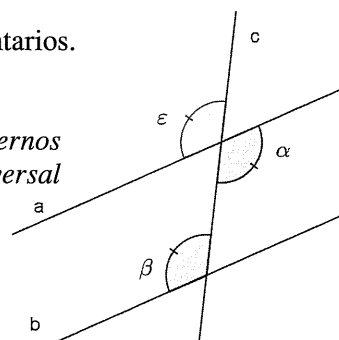
5. Sabiendo que las rectas $a // b$ tienen por transversal a c, demuestre:

- Los ángulos alternos internos (externos) son congruentes.
- Los ángulos conjugados internos (externos) son suplementarios.

Demostraremos, a modo de ejemplo, que los ángulos alternos internos determinados por dos rectas paralelas y una transversal son congruentes:

Hipótesis: $a // b // c$

Tesis: $\alpha = \beta$



Demostración:

$\alpha = \varepsilon$ por ser opuesto por el vértice (1)

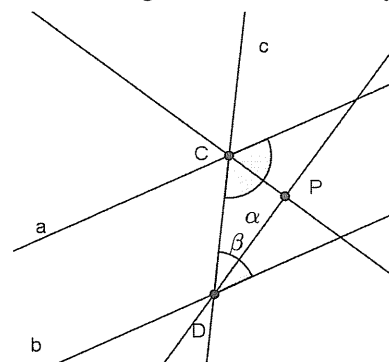
$\varepsilon = \beta$ por ser correspondientes con a/b transversal c (2)

Luego, de (1), (2) y propiedad transitiva de la congruencia se tiene que $\alpha = \beta$

6. Dado los ángulos consecutivos $24^{\circ}12'$ y $16^{\circ}20'$, halle el ángulo que determinan sus bisectrices.

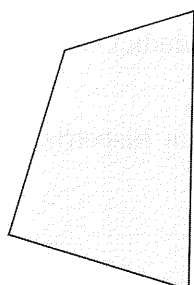
7. ¿Qué ángulo determinan las respectivas bisectrices de dos ángulos consecutivos y suplementarios?

8. Sabiendo que $a/b \parallel c$ y que $\overrightarrow{CP}$ es bisectriz de α , y $\overrightarrow{DP}$ es bisectriz de β . Demuestre que el triángulo $\triangle CPD$ es rectángulo en P.

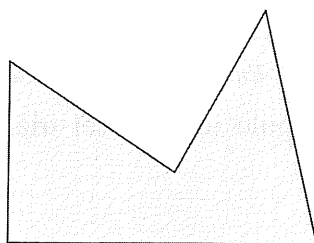


Recuerde que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es un llano (180°)

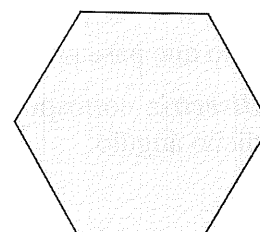
POLÍGONOS



Polígono convexo



*Polígono cóncavo
(polígono no convexo)*



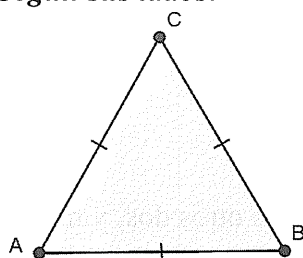
Polígono convexo regular

TRIÁNGULOS

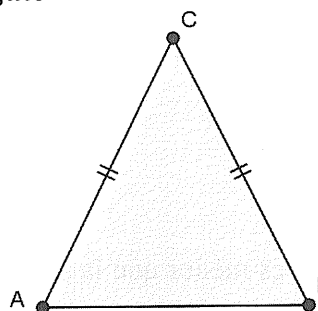
El triángulo es el polígono más elemental, en el sentido de que es el de menor cantidad de lados posibles (tres). Pero a su vez será el polígono con el que más trabajaremos!! Será muy importante, entonces, tener muy en cuenta las propiedades y elementos que poseen dichos polígonos.

Clasificación de un triángulo

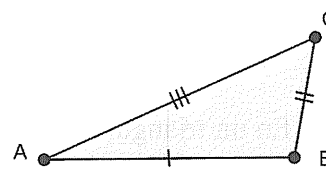
Según sus lados:



Equilátero

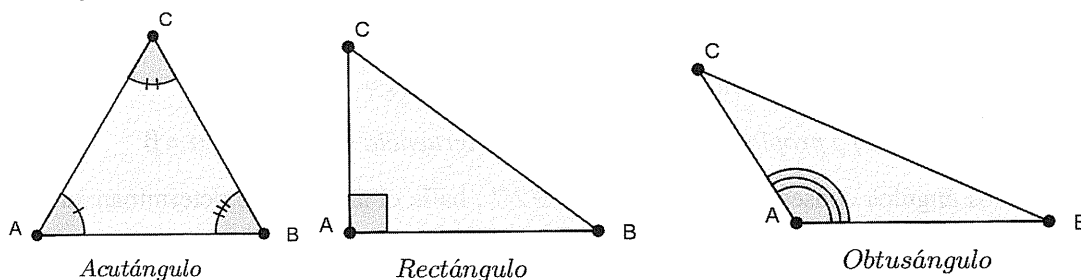


Isósceles



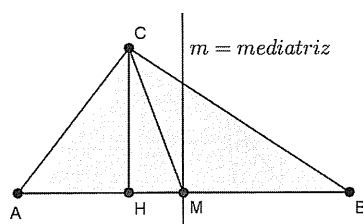
Escaleno

Según sus ángulos:



Elementos de un triángulo

Mediana – Mediatriz – Altura – Bisectriz



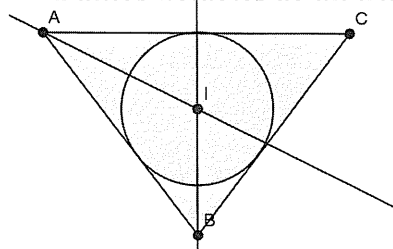
Mediana correspondiente a un lado de un triángulo es el segmento que une el punto medio de ese lado con el vértice opuesto al mismo. En la figura: $\overline{CM}$ al lado AB

Mediatriz correspondiente a un lado del triángulo es la mediatriz del segmento que dicho lado constituye. Es decir, es una recta perpendicular a dicho lado que pasa por su punto medio. En la figura: m al lado AB

Altura correspondiente a un lado del triángulo es el segmento perpendicular a ese lado que pasa por su vértice opuesto. En la figura: $\overline{CH}$ al lado AB

Bisectriz correspondiente a un ángulo interior del triángulo, es la bisectriz de dicho ángulo.

Puntos notables de un triángulo



Las bisectrices se intersecan en un punto denominado **incentro**, que es el centro de una circunferencia inscrita en el triángulo. Se muestra en la figura a la izquierda.

Las mediatrices se intersecan en un punto denominado **circuncentro**, que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.

Las medianas se intersecan en un punto denominado **baricentro**, tal que su distancia a cada vértice es el doble a la distancia al punto medio del lado opuesto.

Las rectas que contienen las alturas se intersecan en un punto denominado **ortocentro**.

Algunas propiedades importantes

- En un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos, y mayor que su diferencia.

- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a un llano (180°)
- El ángulo exterior a un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

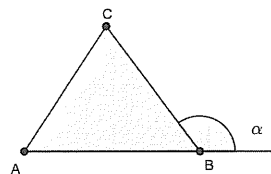
Hipótesis: α ángulo exterior a $\triangle ABC$

Tesis: $\alpha = \hat{B} + \hat{C}$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{A} + \alpha = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{B} + \alpha = \hat{B} + \hat{A} + \hat{C}$$

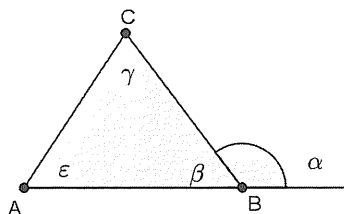
Con lo que: $\alpha = \hat{B} + \hat{C}$



- En un triángulo a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.
- En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa.

Práctica:

9. Calcular las medidas de los ángulos α , β , γ y ε , sabiendo que:



a.
$$\begin{cases} \alpha = 6x + 26^\circ \\ \beta = 2x + 10^\circ \\ \gamma = 5x - 17^\circ \end{cases}$$

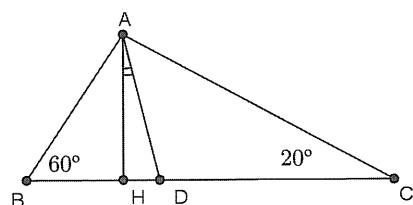
b.
$$\begin{cases} \alpha = 4x - 17^\circ 30' \\ \gamma = x + 26^\circ 30' \\ \varepsilon = 2x - 12^\circ \end{cases}$$

10. α , β , γ son los ángulos internos de un triángulo. β mide cuatro veces lo que mide α y γ mide cinco veces más que el doble de α . ¿Cuánto miden los tres ángulos?

11. ¿Cuál es el valor de un ángulo de la base en un triángulo isósceles, si el ángulo del vértice que forman los lados congruentes es de $35^\circ 24'$?

12. El ángulo del vértice que forman los lados congruentes de un triángulo isósceles mide $42^\circ 28'$. ¿Cuánto mide el ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la prolongación de la base?

13. En un triángulo ABC, el ángulo $\hat{B}$ mide 60° y el ángulo $\hat{C}$ mide 20° . ¿Cuál es la medida del ángulo que forman la altura y la bisectriz trazada desde el vértice A?



$$\hat{B} = 60^\circ, \hat{B} \hat{H} \hat{A} = 90^\circ \text{ (porque } \overline{AH} \perp \overline{BC} \text{)}$$

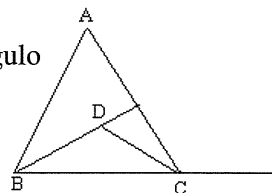
Entonces, en el triángulo $\triangle BHA$, tenemos que

$$\hat{B} \hat{A} \hat{H} = 30^\circ \text{ (I)}$$

En el triángulo $\triangle ABC$: $\hat{CAB} = 100^\circ$, como $\overrightarrow{AD}$ es bisectriz del ángulo $\hat{CAB}$, tenemos que $\hat{DAB} = 50^\circ$ (1)

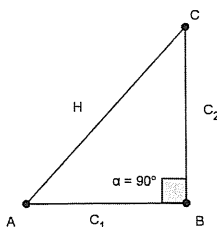
Usando (1) y (2) tenemos: $\hat{DAH} = \hat{DAB} - \hat{BAH} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$. **Rta.: 20°**

14. Dado un ángulo $\hat{A} = 82^\circ$ del triángulo ABC, averigüe el ángulo $\hat{D}$ formado por las bisectrices interiores de los otros dos.



15. En un triángulo rectángulo el ángulo $\hat{B}$ mide 32° . ¿Cuánto valdrá el ángulo $\hat{AIC}$, formado en el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{C}$?

EL TEOREMA DE PITÁGORAS



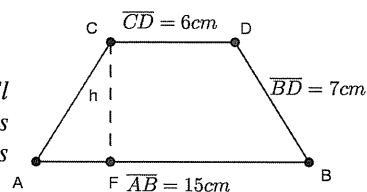
Recordando: “En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”

Así:

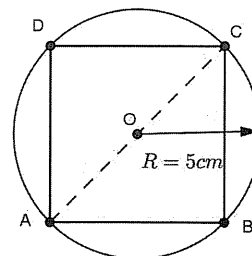
$$H^2 = C_1^2 + C_2^2$$

Práctica:

16. Calcule la altura de un trapecio isósceles. *Observación: El trapecio es el cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos contenidos en rectas paralelas, y es isósceles cuando los otros dos son congruentes.*



17. El cuadrado ABCD está inscrito en la circunferencia de centro O y radio $R = 5\text{cm}$. ¿Cuál es el perímetro de ABCD?



Resolución: Como ABCD es cuadrado el ángulo $\hat{B}$ es recto y $AB = BC = L$, entonces el triángulo $\triangle ABC$ es rectángulo e isósceles (1).

Además tenemos que AC es la hipotenusa de dicho triángulo y que $AC = AO + OC = R + R = 10\text{cm}$ (2)

De (1) y (2) y el teorema de Pitágoras tenemos: $10^2 = L^2 + L^2 = 2L^2$

Luego: $L = \sqrt{\frac{100}{2}} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. Entonces el perímetro es $4 \cdot 5\sqrt{2}\text{cm} = 20\sqrt{2}\text{cm}$.

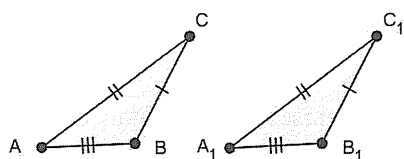
18. Pruebe que la diagonal (D) de un cuadrado de lado L es $D = \sqrt{2}L$. Sugerencia: tenga en cuenta lo resuelto en el ejercicio 17.

19. Pruebe que la altura (h) de un triángulo equilátero de lado L , está dada por $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$.

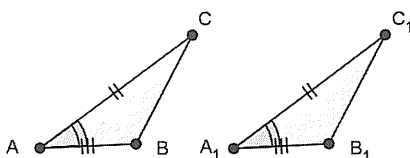
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Diremos que dos triángulos son congruentes si tienen sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

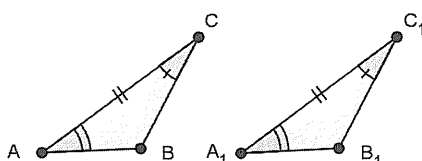
Lo cierto es que para demostrar que dos triángulos son congruentes no es necesario mostrar la congruencia de todos sus elementos, por suerte hay un mínimo de condiciones que si se verifican demuestran que dos triángulos dados son congruentes. Dichas condiciones se agrupan en los denominados “**Criterios de Congruencia**”, a continuación los contamos:



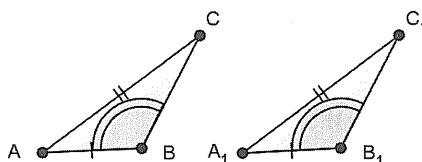
Dos triángulos son congruentes si sus **tres lados** son respectivamente congruentes



Dos triángulos son congruentes si **dos de sus lados y el ángulo comprendido** entre ellos son respectivamente congruentes.



Dos triángulos son congruentes si **un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado** (ángulos adyacentes al lado) son respectivamente congruentes.



Dos triángulos son congruentes si **dos de sus lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados** son respectivamente congruentes.

Práctica:

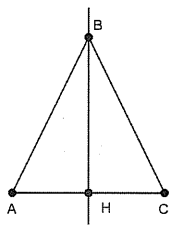
20. Demuestre que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles está contenida en la mediatriz de dicha base.

Resolución:

Hipótesis: $\triangle ABC$ con $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

Tesis: H es punto medio de AC (esto es mismo ya que sabemos de la perpendicularidad!)

Demostración:



$AB = BC$ (por hipótesis)

$BH = BH$ (prop. reflexiva)

$\hat{A}HB = \hat{B}HC = 90^\circ$ (por deducción de la hipótesis)

(*)

$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BHC$ (1)

De (1) tenemos por elementos homólogos que $\overline{AH} = \overline{HC}$, de donde H es punto medio de AC , (ya sabíamos de la perpendicularidad), por lo que $\overleftrightarrow{BH}$ es la mediatriz de $\overline{AC}$.

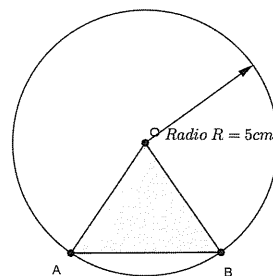
(*) El criterio usado es dos de sus lados y el ángulo opuesto al mayor de los lados son respectivamente congruentes.

21. Demuestre que la altura correspondiente a la base de un triángulo isósceles está contenida en la bisectriz del ángulo del triángulo cuyo vértice es un extremo de la altura. Sugerencia: utilice lo resuelto en el ejercicio 20.

22. Demuestre que los puntos de la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos del mismo.

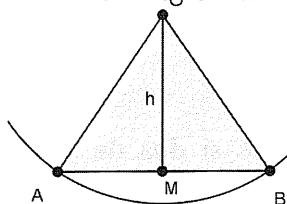
23. Demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan (se cortan en sus puntos medios)

24. Obtenga el área del triángulo $\triangle AOB$, sabiendo que el radio de la circunferencia a la cual pertenecen A y B (y O es centro) es 5cm y que $AB = 6\text{cm}$



Resolución:

Como O es centro de la circunferencia, y A y B son puntos de la misma tendremos que el triángulo $\triangle AOB$ es isósceles con $AO = BO = 5\text{cm}$.



Por lo que la altura correspondiente a AB está contenida en la mediatriz del segmento AB . Así, entonces, $AM = MB = 3\text{cm}$. Además

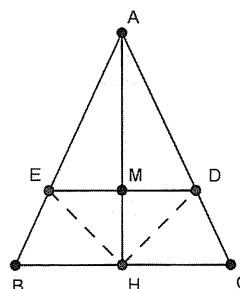
$\triangle AMO$ es rectángulo, entonces para hallar la altura usamos Pitágoras

$$AO^2 = AM^2 + OM^2 \Rightarrow 25 = 9 + OM^2$$

Por lo que $OM = h = 4\text{cm}$

Ahora sí, el área será $\frac{4 \times 6}{2} = 12$

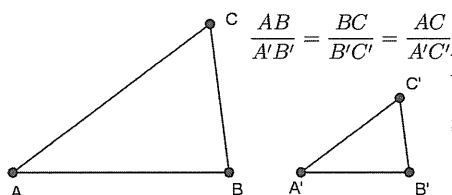
25. En un triángulo isósceles $\triangle ABC$ con $AB = AC$ se toma un punto M en la altura $\overline{AH}$, y por el trazamos una perpendicular $\overline{ED}$ a ésta. Demuestre que los ángulos $\hat{BEH} = \hat{HDC}$. Sugerencia: Pruebe, primero, que $\overline{AD} = \overline{AE}$.



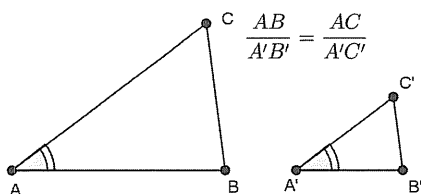
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Diremos que dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos proporcionales.

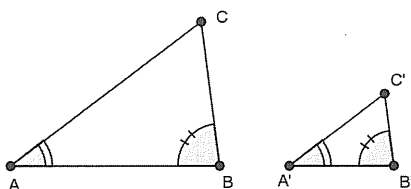
Lo cierto es que para demostrar que dos triángulos son semejantes, al igual que con la congruencia, no es necesario mostrar todo. Hay un mínimo de condiciones que si se verifican demuestran que dos triángulos dados son congruentes. Dichas condiciones se agrupan en los denominados “**Criterios de Semejanzas**”, a continuación los contamos:



Dos triángulos son semejantes si sus **tres lados** son proporcionales.



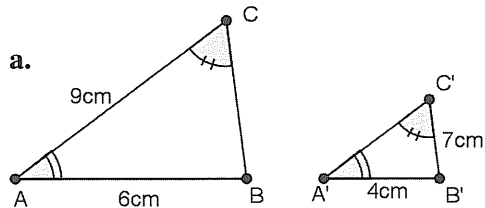
Dos triángulos son semejantes si **dos de sus lados** son proporcionales y los **ángulos comprendidos** entre ellos son respectivamente congruentes.



Dos triángulos son semejantes si **tiene un par de ángulos** respectivamente congruentes.

Práctica:

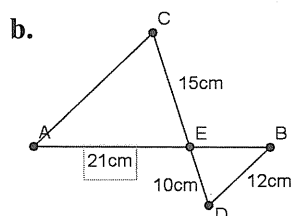
26. En cada caso, los triángulos son semejantes, explique por qué y obtenga las medidas de los lados que se piden:



Datos: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$, $AB = 6cm$

$A'B' = 4cm$, $AC = 9cm$, $B'C' = 7cm$

Calcule: $BC = \dots\dots\dots$ y $A'C' = \dots\dots\dots$

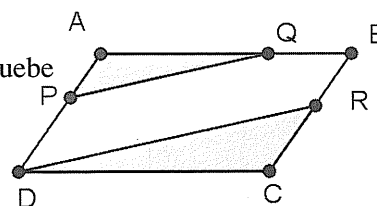


Datos: $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

$AE = 21cm$, $ED = 10cm$, $BD = 12cm$, $EC = 15cm$

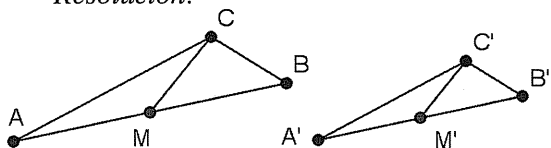
Calcule: $AC = \dots\dots\dots$ y $EB = \dots\dots\dots$

27. En el paralelogramo $ABCD$, tenemos $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{DR}$. Pruebe que los triángulos $\triangle PAQ$ y $\triangle RCD$ son semejantes.



- 28.** Demuestre que si tenemos dos triángulos semejantes, las medianas son proporcionales a los lados homólogos.

Resolución:



Hipótesis: $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$, $\overline{CM}$ mediana correspondiente al lado AB , $\overline{C'M'}$ mediana correspondiente al lado $A'B'$.

Tesis: $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CM}{C'M'}$

Demostración:

Como $\triangle ABC \approx \triangle A'B'C'$, tenemos que, entre otros, $\hat{A} = \hat{A'}$ (1) y $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{CB}{C'B'}$ (2).

Vamos a comparar los triángulos $\triangle CAM$ y $\triangle C'A'M'$, éstos son semejantes ya que tienen un par de lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente congruente, en efecto:

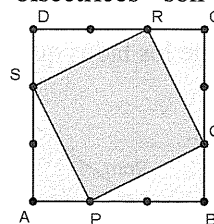
De (2): $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{2AM}{2A'M'} = \frac{AM}{A'M'} \Rightarrow \frac{AC}{A'C'} = \frac{AM}{A'M'}$ y de (1) $\hat{A} = \hat{A'}$

Luego, tenemos $\triangle CAM = \triangle C'A'M'$ con lo que $\frac{AC}{A'C'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{CM}{C'M'}$ (3)

Y juntando (2) y (3) nos queda la proporción buscada.

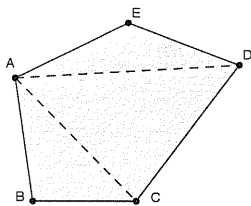
- 29.** Demuestre que si tenemos dos triángulos semejantes, las bisectrices son proporcionales a los lados homólogos.

- 30.** Demuestre que el cuadrilátero $PQRS$ es un cuadrado, sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado, $RC = \frac{1}{3}DC$, $DS = \frac{1}{3}DA$ y $AP = \frac{1}{3}AB$



POLÍGONOS (de más de tres lados)

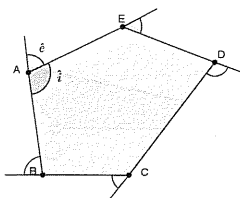
Propiedades de polígonos convexos



La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $(n-2) \cdot 180^\circ$

$$S_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Para su demostración observar los triángulos marcados en la figura.

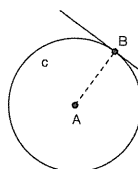


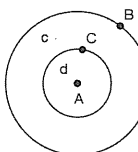
La suma de los ángulos exteriores de un polígono de n lados es igual a 360°

CIRCUNFERENCIA

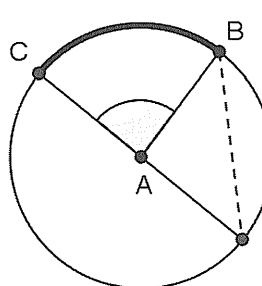
Se define a una circunferencia como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de uno fijo (llamado centro de la circunferencia)

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia, y entre dos circunferencias.

- 
- Una recta es exterior a una circunferencia si no tienen puntos en común.
 - Una recta es tangente a una circunferencia si tienen solo un punto en común.
 - Una recta es secante a una circunferencia si se intersecan en dos puntos.

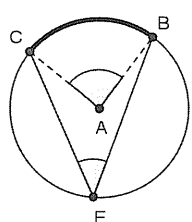
- 
- Dos circunferencias son secantes si tienen dos puntos en común.
 - Dos circunferencias son tangentes si tienen solo un punto en común.
 - Dos circunferencias son concéntricas si tienen el mismo centro.

Elementos de una circunferencia

- 
- BD cuerda, es un segmento cuyos extremos están en la circunferencia
 - CD diámetro, es la mayor de las cuerdas y contiene al centro de la circunferencia.
 - AC radio, es el segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de la misma.

$\widehat{CB}$ arco (es un subconjunto de la circunferencia)

$\angle CAB$ ángulo central (que se relaciona con el arco $\widehat{CB}$), es un ángulo cuyo vértice es el centro de la circunferencia (sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona).

- 
- $\angle CEB$ ángulo inscrito en la circunferencia que abarca el arco $\widehat{CB}$, es un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados pasan por los extremos del arco al cual se lo relaciona.

Propiedades:

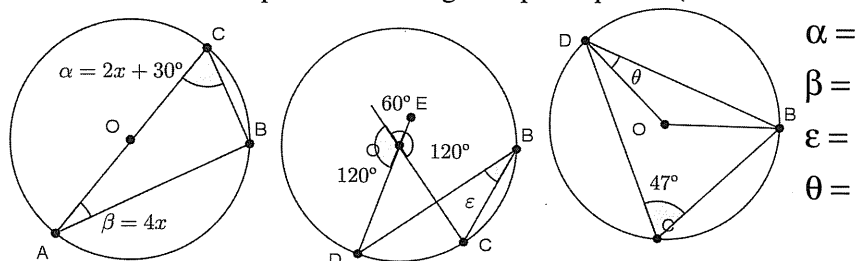
i.. Un ángulo inscrito en una circunferencia es congruente con la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

$$\hat{CEB} = \frac{1}{2} \hat{CAB}$$

ii. Los ángulos inscritos en un mismo arco son congruentes.

Práctica:

31. Calcule la amplitud de los ángulos que se piden: (O centro de las circunferencias)



PERÍMETROS

- El PERÍMETRO de un polígono de n lados es la suma de las longitudes de cada uno de los n lados.
- La LONGITUD de una CIRCUNFERENCIA de radio R es $2\pi R$

ÁREAS

- El área de un triángulo de base b y altura h es igual a:

$$\frac{b \times h}{2}$$

- El área de un paralelogramo de base b y altura h es igual a:

$$b \times h$$

- Así, el área de un cuadrado de lado l es $l \times l = l^2$

- El área de un trapecio de base mayor B y base menor b y altura h es:

$$\frac{(B + b) \times h}{2}$$

- El área de un rombo cuyas diagonales miden D y d es

$$\frac{D \times d}{2}$$

Recuerda que
un rombo es
paralelogramo

- El área de un polígono regular de n lados que miden l y apotema ap es

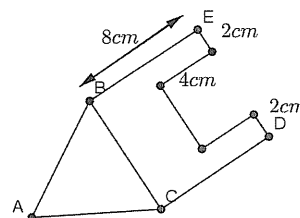
$$\frac{\text{perímetro} \times ap}{2} = \frac{n \times l \times ap}{2}$$

- El área de una circunferencia de radio R es πR^2

Práctica

32. Calcule el perímetro y el área de la figura, sabiendo

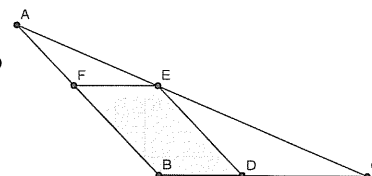
que $\triangle ABC$ es equilátero y BEDC es cuadrado.



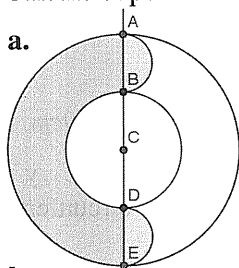
33. Calcule el perímetro y el área del cuadrado PQRS del ejercicio 30, sabiendo que $AB=3\text{cm}$

34. Calcule el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que la base es de 12cm y la altura correspondiente a la base es de 8cm

35. Calcule el perímetro del paralelogramo BDEF, siendo $AC=16\text{cm}$, $AE=4\text{cm}$, $BC=14\text{cm}$ y $AB=10\text{cm}$.



36. Calcule el perímetro de las zonas sombreadas:

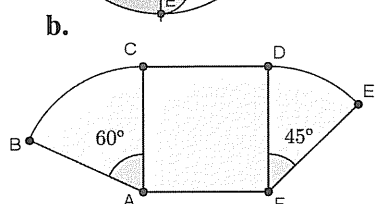


Los arcos AB, BD, DE y AE son semicircunferencias.

$$AB=BC=CD=DE$$

C: centro de la circunferencia

$$AD=24\text{cm}$$



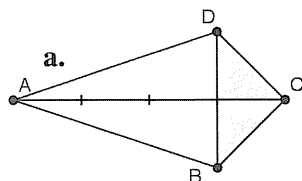
ACDF cuadrado

$$DF=8\text{cm}$$

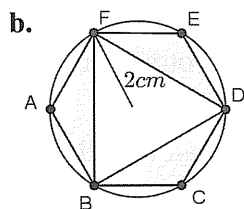
BC sector circular con centro en A

DE: sector circular con centro F

37. Calcule el área de las zonas sombreadas:



$$AC=21\text{cm}, OC=\frac{2}{5}AC, DB=10,5\text{cm}$$



ABCDEF es un hexágono regular.

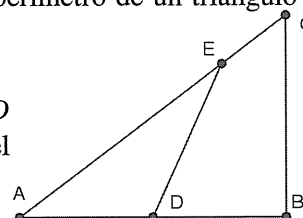
Recuerde: el lado del hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscripta

39. Calcule la base de un rectángulo de área 50m^2 y cuya altura es 4m.

40. ¿Cuánto mide el lado y el área de un cuadrado si la diagonal mide 8cm?

41. Sabiendo que un cuadrado tiene por lado 3cm, ¿cuál es el perímetro de un triángulo equilátero de igual área que el cuadrado?

42. En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B, se tiene que D es punto medio del segmento AB y que $4 \cdot EC = AE$. Además el área del $\triangle ADE = 30\text{cm}^2$. ¿Cuál es el área del BCED?



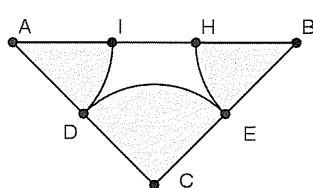
Resolución: Como $4 \cdot EC = AE$, tenemos que $EC = \frac{1}{5} AC$, también podemos afirmar que el triángulo rectángulo $\triangle AHE$ es semejante al $\triangle ABC$ (¿por qué?), con lo que $\frac{EC}{AC} = \frac{EH}{BC}$, luego $EH = \frac{1}{5} BC$ (1), también como D es punto medio de AB, tenemos que $AD = \frac{1}{2} AB$ (2).

$$a(ADE) = \frac{AD \times EH}{2} = 30 \Rightarrow AD \times EH = 60 \quad (3)$$

$$\text{Uso (1) y (2) en (3): } \frac{1}{2} AB \times \frac{1}{5} BC = 60 \Rightarrow \frac{1}{2} AB \times BC = 300 \Rightarrow a(ABC) = 300$$

$$a(DECB) = a(ABC) - a(ADE) = 300 - 30 = 270 \text{ cm}^2$$

43. Calcule el área de la zona sombreada



El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles con base AB. $AC = 10 \text{ cm}$.

D y E son puntos medios de los lados AC y BC respectivamente. HE, DE y DI son arcos de circunferencia con centro B, C y A respectivamente.

CUERPOS

Poliedros

Son poliedros los cuerpos cuyas caras son polígonos.

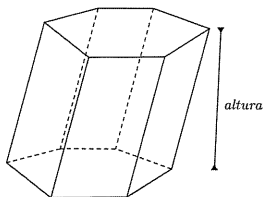
El teorema de Euler: establece que en un poliedro convexo el número de caras, más el número de vértices menos el número de aristas es siempre constante e igual a dos.

$$c + v - a = 2$$

Algunos poliedros particulares

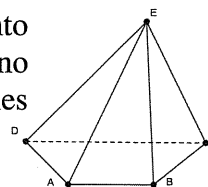
PRISMA es un poliedro que tiene dos caras (llamadas bases) que son polígonos congruentes, contenidas en planos paralelos. Mientras que las otras caras (caras laterales) son paralelogramos.

En particular se puede encontrar a los prismas rectos, serán aquellos cuyas caras laterales son rectángulos.



La altura de un prisma es la distancia entre las bases. (es decir, es la longitud de cualquier segmento con extremos en las bases y perpendicular a las mismas)

PIRÁMIDE es un poliedro que tiene una cara (llamada base) que es un polígono cualquiera y las otras caras (laterales) concurren en un punto (llamado vértice de la pirámide), en efecto son triángulos que tienen uno de sus lados común con un lado de la base, y son tantas caras laterales como lados tenga la base.

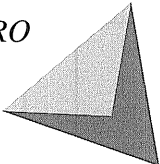
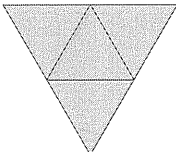
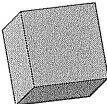
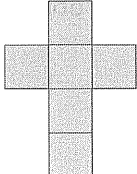
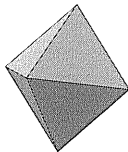
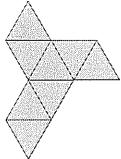
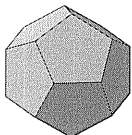
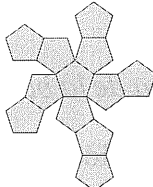
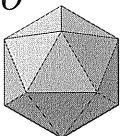
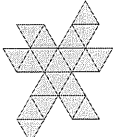


En particular se pueden encontrar las llamadas pirámides rectas, que son aquellas cuyas caras laterales son triángulos isósceles y el pie de la altura está en el centro de la base.

Poliedros regulares

Son poliedros regulares aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí.

Sólo hay cinco poliedros regulares. A continuación un cuadro donde se muestran también sus desarrollos.

Poliedro Regular	Desarrollo	Nº caras	Forma caras
TETRAEDRO 		4	Triángulo equilátero
CUBO 		6	Cuadrado
OCTAEDRO 		8	Triángulo equilátero
DODECAEDRO 		12	Pentágono regular
ICOSAEDRO 		20	Triángulo equilátero

Práctica:

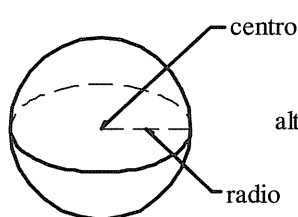
44. Coloque “siempre”, “a veces”, “nunca”, según corresponda a cada sentencia:

- Un prisma es un poliedro regular

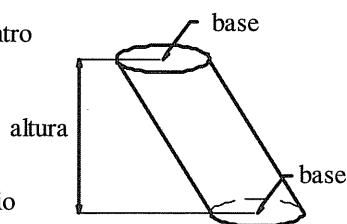
- b. Los cuerpos redondos son poliédricos.
- c. Un cilindro es un cuerpo redondo.
- d. Las pirámides tienen base cuadrada.
- e. Las caras de un paralelepípedo son paralelogramos.
- f. Si un cuerpo tiene base rectangular es un paralelepípedo.
- g. En un vértice de un poliedro concurren 3 o más caras.

Cuerpos redondos

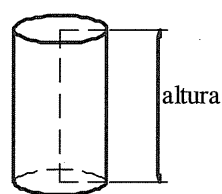
Son cuerpos redondos la esfera, el cilindro y el cono.



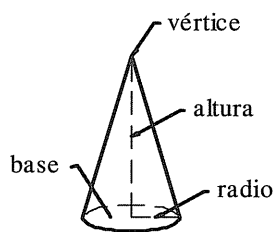
Esfera



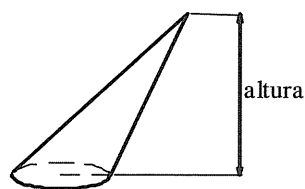
Cilindro oblicuo



Cilindro recto



Cono



Cono oblicuo

VOLÚMENES DE CUERPOS

- Los volúmenes de los prismas y los cilindros se obtienen mediante la fórmula:

$$\text{área de la base} \times \text{altura}$$

- Los volúmenes de las pirámides y los conos se obtienen:

$$\frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

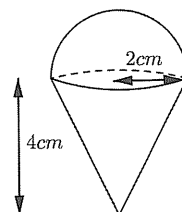
- El volumen de una esfera de radio r se obtiene:

$$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Práctica

45. ¿Cuál es volumen de un prisma recto de base cuadrada de lado 5cm y altura 4cm?
46. Se tiene un prisma recto con base rectangular, dicho rectángulo tiene su ancho el doble de su largo. Si el prisma tiene una altura de 10cm y volumen 100cm^3 , ¿cuáles son las dimensiones del prisma?
47. ¿Cuál es el volumen de una pirámide recta de base cuadrada de lado 8cm y de apotema 5cm? *Observación: la apotema de la pirámide es la altura de una cara lateral.*
48. Con 3m^3 de arena se llenan $\frac{2}{3}$ de un arenero cilíndrico de 1,5m de radio. ¿Qué altura tiene el arenero?

49. Obtenga el volumen del sólido de la figura compuesto por un cono recto de 4cm de altura y una semiesfera de radio 2cm



50. Un frasco tiene forma cilíndrica de radio 5cm y altura 12cm, está lleno de esferas metálicas de 1,5cm de diámetro. Se vierte hasta el tope del mismo un líquido lubricante del que luego se mide el volumen. ¿Cuántas bolitas hay en el frasco si se sabe que el líquido ocupa $\frac{2}{3}$ de su capacidad?

ÁREAS DE CUERPOS

- Si los cuerpos son poliedros, hallar el área de los mismos es sumar las áreas de cada una de las caras.
 - En el caso de prismas y pirámides el área total se divide en área lateral y área de las bases
- El área de una esfera de radio R se obtiene mediante la fórmula:

$$4 \times \pi \times R^2$$

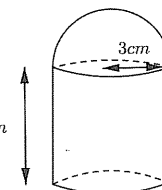
- El área de un cilindro recto de base de radio R y altura H se obtiene mediante la fórmula:

$$2\text{área}_{\text{base}} + \text{área}_{\text{lateral}} = 2 \times \pi \times R^2 + \pi \times R \times h$$

Práctica

51. Obtenga la altura de un prisma recto cuya base es un hexágono regular de lado 6cm, sabiendo que la superficie total es $360 + 108\sqrt{3}$.

52. Obtenga el área del cascaron del sólido de la figura, formado por un cilindro recto de altura 5cm, y una semiesfera de radio 3cm. ¿Cuál es volumen de dicho sólido?



53. Obtenga la superficie de un cilindro que tiene el mismo volumen y radio de un cono de altura 10cm y radio 4cm.
54. Obtenga el área de un tetraedro cuya arista mide 2cm.

CAPÍTULO 6: TRIGONOMETRÍA

6.1 - RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Queremos conocer la altura de un árbol.

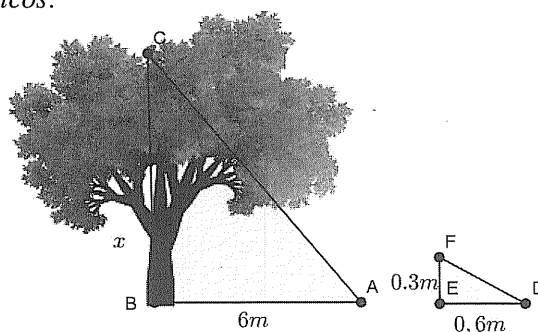
Para ello utilizaremos el método de Tales de Mileto. ¡Siempre y cuando contemos con un día soleado!!

Usaremos una varilla de longitud conocida: 0,3m la dispondremos verticalmente y mediremos la longitud de su sombra: 0,6m.

También medimos la longitud de la sombra del árbol: 6m

¿Cómo hacemos?

Nos disponemos, en primer medida, a modelizar el problema con esquemas gráficos:



Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son semejantes debido a que $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$, y $\hat{C} = \hat{F}$ (por la inclinación de los rayos solares)

Así, tendremos entonces que los lados homólogos son proporcionales, o sea:

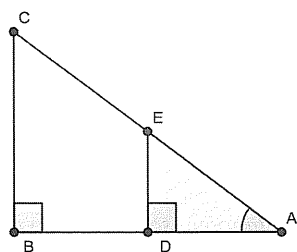
$$\frac{0,3}{0,6} = \frac{x}{6} \Rightarrow x = 6 \times \frac{0,3}{0,6} = 3$$

Rta. : la altura del árbol es, aproximadamente 3m.

¿Qué significa “resolver” un triángulo?

Simplemente consiste en obtener las medidas de cada uno de sus lados y sus ángulos interiores.

Triángulos rectángulos: “RAZONES TRIGONOMÉTRICAS de ángulos agudos”



Debido a que $\triangle ABC \approx \triangle ADE$ (¿por qué?), se tienen las siguientes proporciones:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE} \quad (1), \quad \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} \quad (2), \quad \text{y} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{DE}{AD} \quad (3)$$

El primer listado de proporciones (1) determina lo que llamaremos la razón seno del ángulo agudo $\hat{A}$, en general, en el triángulo rectángulo $\triangle ABC$:

$$\text{sen}(\hat{A}) = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

El listado de proporciones (2) determina lo que llamaremos la razón coseno del ángulo agudo $\hat{A}$, en general, en el triángulo rectángulo $\triangle ABC$:

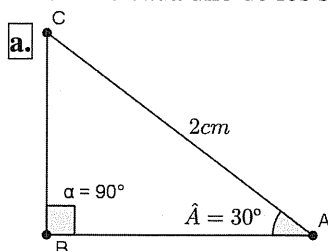
$$\cos(\hat{A}) = \frac{\text{cateto adyacente a } \hat{A}}{\text{hipotenusa}}$$

El listado de proporciones (3) determina lo que llamaremos la razón tangente del ángulo agudo $\hat{A}$, en general, en el triángulo rectángulo $\triangle ABC$:

$$\operatorname{tg}(\hat{A}) = \frac{\text{cateto opuesto a } \hat{A}}{\text{cateto adyacente a } \hat{A}}$$

Práctica:

1. Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:



Para obtener el ángulo restante, simplemente hago $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ$

Para obtener uno de los catetos uso alguna razón trigonométrica que involucre a la hipotenusa (porque es lo que tenemos de dato); una vez que obtengo uno de los catetos, el otro lo podré obtener usando Pitágoras.

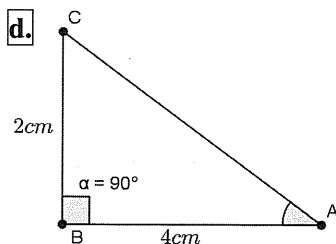
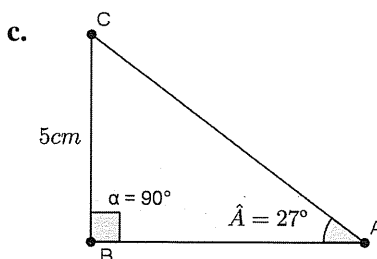
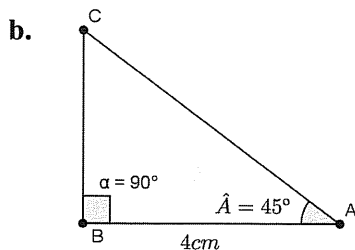
Entonces:

$$\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{BC}{AC} \Rightarrow 0,5 = \frac{BC}{2} \Rightarrow BC = 0,5 \times 2 = 1\text{cm}$$

$$\text{Pitágoras: } AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 4 = 1 + AB^2 \Rightarrow AB = \sqrt{3}\text{cm}$$

$$\text{Rta.: } \hat{C} = 60^\circ, BC = 1\text{cm}, AB = \sqrt{3}\text{cm}$$

Por ahora, trabajaremos mucho con la calculadora científica.



Para obtener el lado que falta (la hipotenusa), simplemente uso Pitágoras: $AC = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}\text{ cm}$

Para obtener algún ángulo agudo deberemos recurrir al conocimiento de alguna razón trigonométrica que lo involucre, luego, usando la calculadora buscaremos el valor del ángulo en cuestión.

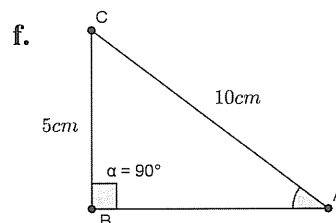
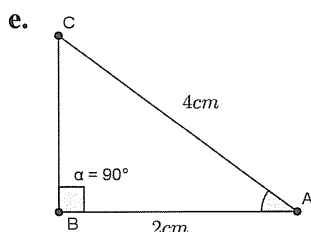
$$\text{Así, entonces: } \operatorname{tg}(\hat{A}) = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{4}, \text{ sabemos que la tangente del ángulo } \hat{A} \text{ es } 0,5. \text{ Para}$$

obtener el ángulo, tenemos que usar la "función inversa" de la tangente, nosotros la

llamamos arco tangente y en tu calculadora la veras con el símbolo $\tan^{-1}$. Usando, obtenemos que $\hat{A} = 26^\circ 33' 54''$ aproximadamente.

Luego obtenemos $\hat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 26^\circ 33' 54'' = 63^\circ 26' 6''$

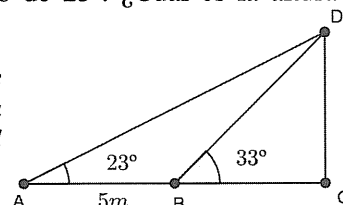
Rta.: $AC = \sqrt{20} \text{cm}$, $\hat{A} = 26^\circ 33' 54''$ y $\hat{C} = 63^\circ 26' 6''$



2. Un avión despega formando un ángulo de 20° con el suelo y recorre en esa dirección 25km. ¿A qué altura se encuentra?

3. Un árbol y un observador se encuentran en orillas separadas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 33° , retrocede 4m y mide el nuevo ángulo, resultando el mismo de 23° . ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?

Resolución: Luego de esquematizar, tenemos claro que lo que queremos obtener es la medida del lado DC (donde se encuentra el árbol). A y B son los distintos puntos donde se encuentra el observador.



$$\text{En el triángulo } \triangle BCD : \operatorname{tg}(\hat{B}) = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \operatorname{tg}(33^\circ) = \frac{DC}{BC} \Rightarrow \frac{BC}{DC} = \frac{1}{\operatorname{tg}(33^\circ)} \quad (1)$$

En el triángulo $\triangle ACD$:

$$\operatorname{tg}(\hat{A}) = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \operatorname{tg}(23^\circ) = \frac{DC}{5 + BC} \Rightarrow \frac{5 + BC}{DC} = \frac{1}{\operatorname{tg}(23^\circ)} \Rightarrow \frac{5}{DC} + \frac{BC}{DC} = \frac{1}{\operatorname{tg}(23^\circ)} \quad (2)$$

Substituímos (1) en (2) y nos queda:

$$\frac{5}{DC} + \frac{1}{\operatorname{tg}(33^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(23^\circ)} \Rightarrow DC = 5 \div \left(\frac{1}{\operatorname{tg}(23^\circ)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(33^\circ)} \right) \cong 6.13 \text{m}$$

Rta.: El árbol tiene aproximadamente 6,13m

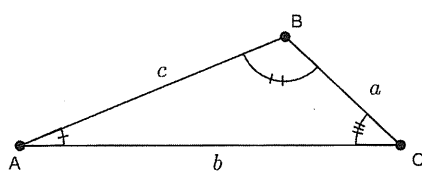
4. Calcule la longitud de la altura de un triángulo equilátero de lado 4cm.

5. Los lados de un paralelogramo miden 22cm y 40cm, respectivamente. Calcule la superficie del mismo, sabiendo que uno de sus ángulos mide 30° .

6. Un edificio proyecta una sombra de 20m cuando el sol se encuentra a 45° sobre el horizonte. ¿Cuál es su altura?

7. Una calle tiene una pendiente del 10%, esto significa que cada 100m recorridos el desnivel aumenta 10m. ¿Qué ángulo forma la calle con la horizontal?

Resolución de triángulos cualesquiera



Teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

Teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$

Observaciones:

El teorema del coseno se puede pensar como una ampliación del Teorema de Pitágoras

donde $\hat{A} = 90^\circ$

En el teorema del coseno se pueden realizar otras “combinaciones”, es decir:

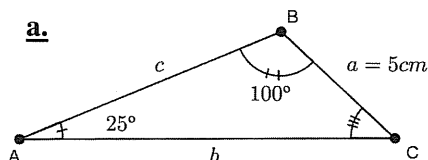
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C})$$

Práctica:

8. Resuelve los triángulos dados:

a.



Resolución: $\hat{C} = 180^\circ - 100^\circ - 25^\circ = 55^\circ$

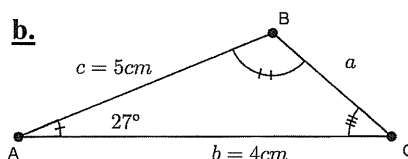
Al conocer todos los ángulos pero el valor de un solo lado, nos conviene utilizar el teorema del seno. Así, entonces tenemos: $\frac{5}{\operatorname{sen}(25^\circ)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(100^\circ)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(55^\circ)}$, con lo que si

tomamos: $\frac{5}{\operatorname{sen}(25^\circ)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(100^\circ)} \Rightarrow b = \operatorname{sen}(100^\circ) \times \frac{5}{\operatorname{sen}(25^\circ)} \cong 11,65 \text{ cm}$ y usando

$$\frac{5}{\operatorname{sen}(25^\circ)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(55^\circ)} \Rightarrow c = \operatorname{sen}(55^\circ) \times \frac{5}{\operatorname{sen}(25^\circ)} \cong 9,69 \text{ cm}$$

Rta.: 55° , 11,65 cm y 9,69 cm

b.



Resolución: Debido a que tenemos de dato, dos lados y un ángulo conviene “arrancar” con el teorema del coseno.

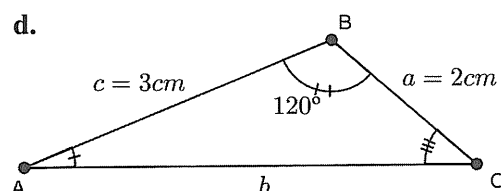
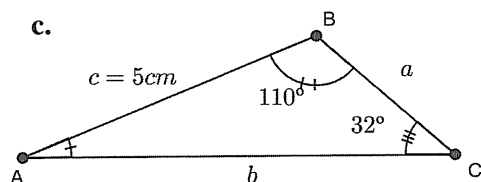
$$\text{Así: } a^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \cos(27^\circ) \Rightarrow a \cong 2,32 \text{ cm.}$$

Ahora para obtener uno de los ángulos que faltan usamos el teorema del seno

$$\frac{4}{\sin(\hat{B})} = \frac{2,32}{\sin(27^\circ)} \Rightarrow \sin(\hat{B}) = \frac{4\sin(27^\circ)}{2,32} \cong 0,783 \Rightarrow \arcsen(0,783) = 51^\circ 32' 9'' = \hat{B}$$

$$\text{Finalmente: } \hat{C} = 180^\circ - 27^\circ - 51^\circ 32' 9'' = 101^\circ 27' 51''$$

$$\text{Rta.: } 2,32\text{cm}; \hat{B} = 51^\circ 32' 9''; \hat{C} = 101^\circ 27' 51''$$



9. Alberto y Betina, que es una “agrimensora aficionada”, hablan por teléfono, cada uno desde su casa.

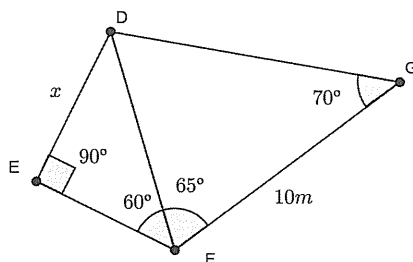
- Betina: “¿A qué distancia está tu casa de la mía?”

- Alberto: “La verdad que no sé, pero si sé que estoy a 200m de la casa de Carolina”

- Betina, haciendo gala de su afición: “Yo estoy a 250m de la casa de Carolina, y veo que las visuales a tu casa y a la de Carolina, forman un ángulo de 33° .”

¿A qué distancia se encuentran las casas de Betina y Alberto?

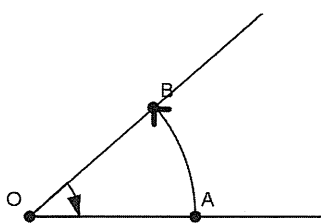
10. Obtenga el valor de x , con los datos de la figura:



11. Calcula el área de un pentágono regular inscripto en una circunferencia de radio 10cm.

6.2 – FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ángulos orientados

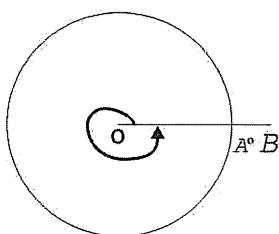


Consideremos la semirrecta $\overrightarrow{OA}$ girando alrededor de O (siempre en el mismo plano) hasta llegar a la posición $\overrightarrow{OB}$. Decimos que esta rotación ha generado el ángulo $\widehat{AOB}$, de vértice O y lado inicial $\overrightarrow{OA}$ y final $\overrightarrow{OB}$.

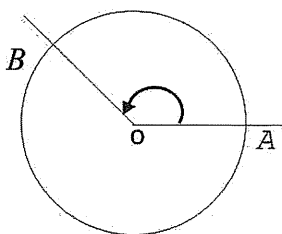
También se dice que, en este caso, el ángulo ha sido generado positivamente (por rotar en sentido contrario a las agujas del reloj)

Ahora bien, el mismo ángulo se podría haber obtenido rotando $\overrightarrow{OB}$ hacia $\overrightarrow{OA}$, de esta forma la rotación es negativa.

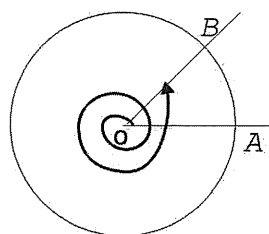
Si el arco $\widehat{AB}$ generado por la rotación del punto A es una circunferencia, diremos que el ángulo generado es de una vuelta.



Ángulo de
una vuelta



Ángulo menor
que una vuelta



Ángulo mayor
que una vuelta

Dos ángulos α y β son **congruentes** y se simboliza $\alpha \equiv \beta$ si tienen el mismo lado inicial y final.

Observaciones y ejemplos:

- El ángulo nulo y pleno serán congruentes
- En definitiva, para que ocurra la coincidencia de lados iniciales y finales, los ángulos congruentes deben diferir en una cantidad entera de vueltas. ¿Por qué “entera” y no “natural”? Porque el signo dependerá si la generación de los ángulos fue positiva (en el sentido contrario a las manecillas del reloj) o negativa.

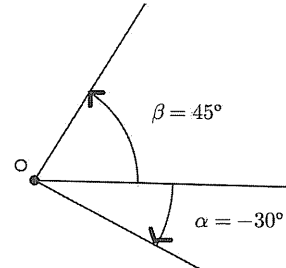
Sistemas de medición de ángulos

a) Sistema sexagesimal

Es el sistema que venimos usando hasta ahora, la unidad es el grado. Un ángulo de un grado equivale a $\frac{1}{360}$ del ángulo de una vuelta.

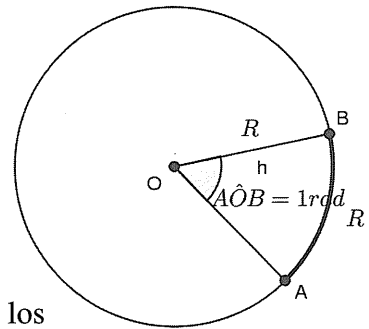
Agregaremos ahora, ángulos orientados, por lo que el signo del valor del ángulo dependerá de cómo ha sido generado, por ejemplo:

- Si $\alpha = -30^\circ$, significa que tiene una amplitud de 30° pero se generó en sentido negativo.
- Si $\beta = 45^\circ$, significa que tiene una amplitud de 30° pero se generó en sentido positivo.



b) Sistema radial

La unidad de medida de este sistema es el **radián**. Se define como la medida de un ángulo central de una circunferencia de radio R , cuyos lados finales e iniciales subtienden un arco de circunferencia cuya longitud es justamente R .



Al igual que en el sistema sexagesimal, los signos de los ángulos están relacionados por la forma en que se han generado.

➤ Veamos cómo podemos relacionar ambos sistemas...

Primero observemos, simplemente mirando más atentamente la definición de radián, que si llamamos x a la medida en radianes de un ángulo que subtiende un arco $\overset{\frown}{AB}$, y llamamos L a la longitud del mismo, tendremos que

$$L = x \cdot R$$

Es decir:

$$x = \frac{L}{R}$$

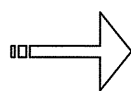
Consecuentemente, si llamamos α a un ángulo de una vuelta, la longitud del arco que subtiende coincide con la longitud de la circunferencia de radio R , por lo que:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi$$

De todo lo expuesto tendremos la relación $2\pi \text{ rad} \leftrightarrow 360^\circ$, dado que en el sistema sexagesimal el ángulo de una vuelta tiene una amplitud de 360° .

Veamos la conversión de un sistema a otro de ciertos “ángulos destacados” (los usaremos mucho!)

<i>grados sexagesimales</i>	0	30	45	60	90	180	270	360
<i>radianes</i>	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π


¿Por qué trabajar con radianes? Los radianes representan la forma de medir ángulos usando números reales, es un número real, por tanto está en nuestro sistema decimal.

En palabras más formales: “Existe una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los ángulos orientados”

Práctica:

1. En cada caso obtenga la longitud de arco subtendido por los ángulos centrales de las circunferencias respectivas.

a. $\alpha = 33^\circ$, $R=2cm$

Resolución: como primer medida debemos hacer el pasaje del valor del ángulo al sistema radian

$$180^\circ \rightarrow \pi$$

$$33^\circ \rightarrow \frac{33^\circ \times \pi}{180^\circ} = \frac{11}{60} \pi$$

Luego, la longitud de arco L será $L = \frac{11}{60} \pi \times 2 = \frac{11}{30} \pi cm \cong 1,15cm$

b. $\alpha = 31^\circ 17'$, $R=2cm$

Resolución: como primer medida debemos hacer el pasaje del valor del ángulo al sistema radian

$$180^\circ \rightarrow \pi$$

$$31^\circ 17' \rightarrow \frac{31^\circ 17' \times \pi}{180^\circ} \cong 0,546$$

Luego, la longitud de arco L será $L = 0,546 \times 2 \cong 1,092cm$

c. $\alpha = 27^\circ$, $R=4cm$

d. $\alpha = 25^\circ 12'$, $R=8cm$

2. Calcule, en radianes, la medida de los ángulos interiores de un hexágono regular.

3. Obtenga 3 ángulos congruentes con $\alpha = 25^\circ$.

Resolución: sabemos que un ángulo de una vuelta equivale a 360° , y también sabemos que los ángulos congruentes difieren en vueltas completas. Por lo que para obtener ángulos congruentes a uno dado sumaremos vueltas completas en distinto sentido. Así:

$$\beta = 25^\circ + 360^\circ = 385^\circ \equiv \alpha \rightarrow \text{Le sume una vuelta positiva}$$

$$\delta = 25^\circ + (-360^\circ) = -335^\circ \equiv \alpha \rightarrow \text{Le sume una vuelta negativa}$$

$$\varepsilon = 25^\circ + 2 \times 360^\circ = 25^\circ + 720^\circ = 745^\circ \equiv \alpha \rightarrow \text{Le sume dos vueltas positivas}$$

Generalicemos lo hecho en este último ejercicio:

Dado un ángulo α medido en sistema sexagesimal, si le sumo una cantidad entera de vueltas $360^\circ \times k$, donde k es el “contador” de vueltas por lo que $k \in \mathbb{Z}$, obtendré un ángulo β congruente con α .

En símbolos $\boxed{\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\beta = \alpha + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z})}$

Si este razonamiento lo hacemos con ángulos medidos en el sistema radian, tendremos

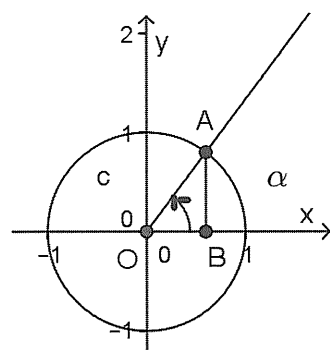
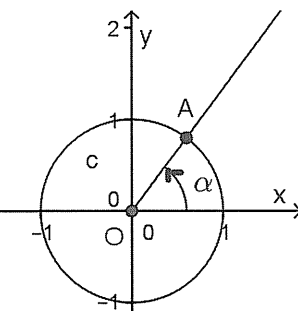
$$\boxed{\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow (\beta = \alpha + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z})}$$

Funciones trigonométricas

Las definiciones de las razones trigonométricas las podemos hacer extensivas a ángulos no agudos y orientados por medio de la llamada “Circunferencia Trigonométrica”

La misma es una circunferencia de radio 1 unidad cuyo centro está en el origen de coordenadas.

Asimismo, los ángulos orientados le fijaremos el lado inicial en el semieje positivo de las abscisas.



Si tomamos un ángulo α , cuyo lado final interseca a la circunferencia trigonométrica en un punto A con coordenadas positivas $(a; b)$, el punto B de coordenadas $(1; 0)$, tendremos el triángulo $\triangle AOB$ que es rectángulo en B. Por lo que tendremos que se cumplen las siguientes razones trigonométricas:

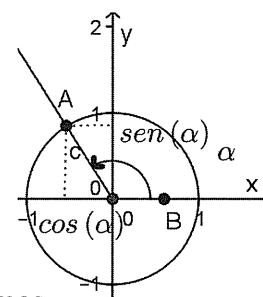
$$\text{sen}(\alpha) = \frac{AB}{OA} = \frac{b}{1} = b \quad \text{y} \quad \text{cos}(\alpha) = \frac{OB}{OA} = \frac{a}{1} = a$$

$$\text{Con lo que } \text{tg}(\alpha) = \frac{AB}{OB} = \frac{b}{a}$$

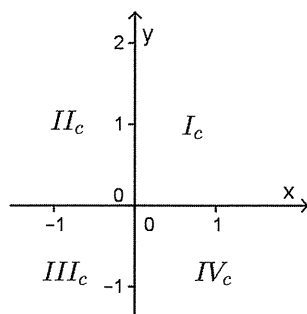
Generalicemos a cualquier ángulo α que interseque a la circunferencia trigonométrica en un punto A de coordenadas $(a;b)$ diremos que

$$a = \cos(\alpha) \text{ y } b = \sin(\alpha)$$

En los casos en que $a \neq 0$ definimos $\boxed{tg(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}}$



Los ejes coordenados dividen al plano en 4 zonas, que denominaremos cuadrantes



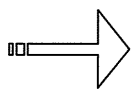
Sea $P(x; y)$:

$$P \in I_c \text{ si } x > 0 \text{ y } y > 0$$

$$P \in II_c \text{ si } x < 0 \text{ y } y > 0$$

$$P \in III_c \text{ si } x < 0 \text{ y } y < 0$$

$$P \in IV_c \text{ si } x > 0 \text{ y } y < 0$$



Diremos que un ángulo pertenece a algún cuadrante cuando el punto de intersección del lado final del ángulo con la circunferencia trigonométrica esté en dicho cuadrante.

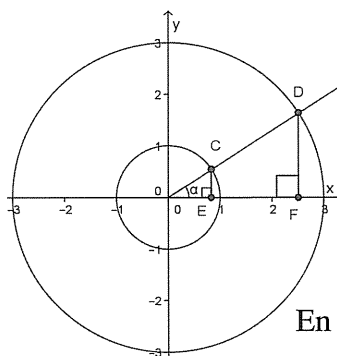
A continuación mostramos una tabla donde se ven los valores del seno y coseno de ángulos muy particulares:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1

También podemos armar una tabla con los signos que tendrá el coseno y seno de un ángulo según el cuadrante al cual pertenezcan

α	I_c	II_c	III_c	IV_c
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+

¿Qué puedes decir del signo de la tangente de un ángulo según el cuadrante al cual pertenecen?



El valor del seno y el coseno es independiente de la circunferencia que se tome (siempre con centro en el origen de coordenadas). Veamos con una circunferencia de radio R cualquiera

Esto tiene que ver con la semejanza de triángulos:

En efecto: $\triangle OEC \approx \triangle OFD$ con lo que tenemos:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{CE}{OC} = \frac{DF}{OD} \Rightarrow \operatorname{sen}(\alpha) = \frac{CE}{1} = \frac{DF}{R}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{OE}{OC} = \frac{OF}{OD} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{OE}{1} = \frac{OF}{R}$$

Práctica:

4. Obtenga los valores de $\operatorname{sen}(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ y $\operatorname{tg}(\alpha)$ de un ángulo α cuyo lado final contiene al punto:

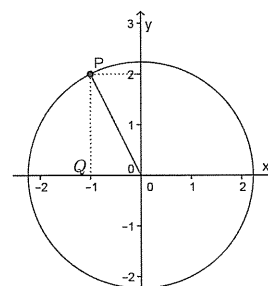
a. $P(-1, 2)$

Resolución: Primero debemos obtener el radio de la circunferencia, para ello vemos que el triángulo $\triangle OPQ$ es rectángulo, y el segmento OP es la hipotenusa del mismo. Con lo cual aplicando Pitágoras tendremos el radio, en efecto:

$$R = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Ahora estamos en condiciones de conocer las razones:

$$\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}; \quad \cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{1} = -2$$



b. $P(1, 3)$ c. $P(3, -2)$ d. $P(-1, -1)$

Propiedades del seno y el coseno

➤ Acotación del seno y el coseno. Por la misma definición que hemos realizado, se muestra que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(\alpha) \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq \cos(\alpha) \leq 1$$

➤ Periodicidad del seno y el coseno. Esto se relaciona con el hecho de que los ángulos congruentes tienen el mismo lado final, por eso:

$$\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{sen}(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$$

➤ Paridad del coseno e imparidad del seno.

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Demostración:

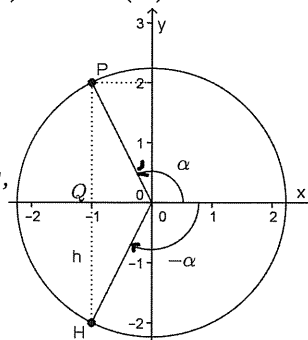
Los triángulos $\triangle QOP$ y $\triangle HOQ$ son congruentes, ¿por qué?

Entonces por ser lados homólogos, tenemos que

$$QP = QH \quad (1) \quad \text{y} \quad OQ = OQ \quad (2)$$

$$\text{De (1), tenemos } \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\text{De (2), tenemos } \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$



➤ Relación Pitágorica ¡Esta la usaremos mucho!

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

$$\sin^2(\alpha) = [\sin(\alpha)]^2$$

Se demuestra muy sencillamente en la circunferencia trigonométrica.

➤ Relación entre el seno y coseno de ángulos complementarios

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad \text{y} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

Demostración:

Si $\angle COB = \alpha$, hacemos $\angle EOD = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

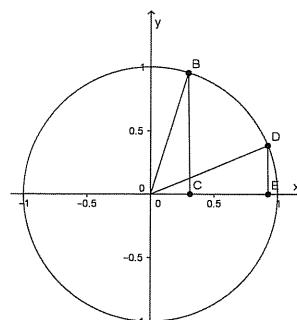
Los triángulos $\triangle COB$ y $\triangle EOD$ son congruentes, ¿por qué?

Entonces por ser lados homólogos, tenemos que

$$OC = DE \quad (1) \quad \text{y} \quad BC = OE \quad (2)$$

$$\text{De (1), tenemos } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\text{De (2), tenemos } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$



Práctica:

5. Determine, sin utilizar calculadora, si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a. $\sin(7\pi) = \sin(\pi)$, Verdadero, ya que $7\pi \equiv \pi$ porque $7\pi = \pi + (2\pi) \times 2$

b. $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ)$

c. $\sin(60^\circ) = \cos(-30^\circ)$

6. Obtenga el valor del $\text{sen}(x)$, en cada caso:

a. $\cos(x) = \frac{1}{5}$ y $x \in IV_c$, resolución: Usaremos la identidad pitagórica

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(x) + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen}^2(x) = \frac{24}{25}$$

$$\text{Así: } \text{sen}(x) = \pm \sqrt{\frac{24}{25}} = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \text{ y como } x \in IV_c: \text{sen}(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

b. $\cos(x) = -\frac{2}{5}$ y $x \in II_c$

c. $\text{tg}(x) = 2$ y $x \in I_c$

7. Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales:

a. $\text{sen} x = 0$

c. $\text{sen} x = 1$

e. $\text{sen} x = -1$

b. $\cos x = 0$

d. $\cos x = 1$

f. $\cos x = -1$

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) si $\text{sen} \alpha > 0$, entonces $\alpha \in Ic$.

b) si $\cos \alpha < 0$, entonces $\alpha \in Ic$. ó $\alpha \in IIIc$.

c) si $\alpha \in IIc$, entonces $\text{sen} \alpha > 0$

d) $\alpha \in IIc$. ó $\alpha \in IIIc \Rightarrow \cos \alpha < 0$

e) $\alpha \in IIc$. y $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{sen} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\text{sen} \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in Ic \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

g) $\alpha \in IIc$. ó $\alpha \in IVc \Rightarrow \text{sen} \alpha \cdot \cos \alpha > 0$

9. Demuestra las siguientes identidades:

a. $(1 - \text{sen} x) \cdot (1 + \text{sen} x) = \cos^2 x$

Resolución: $(1 - \text{sen} x) \cdot (1 + \text{sen} x) = 1^2 - \text{sen}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = \cos^2 x$

b. $\text{sen}^2(x + 4\pi) = 1 - \cos^2 x$

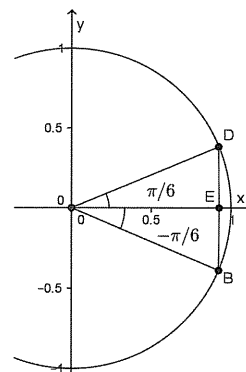
c. $1 + \text{tg}^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

10. Sabemos que $\text{sen}(x) = \frac{2}{3}$, obtiene $\cos(-x)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Seno, coseno y tangente de ángulos “destacados”

Seno, coseno y tangente de $x = \frac{\pi}{6}$

El triángulo $\triangle DOB$ es equilátero (notar que es isósceles y además $\widehat{DOB} = \pi/3$), entonces, como $\overrightarrow{OE}$ es bisectriz de , tenemos que E es punto medio de $\overline{DB}$.



Luego $DE = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$. Ergo: $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ (*)

Por (*) y la relación Pitágorica, tenemos que: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y luego

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

Seno, coseno y tangente de $x = \frac{\pi}{3}$

Por ser complementario de $\frac{\pi}{6}$, tenemos $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ y

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Seno, coseno y tangente de $x = \frac{\pi}{4}$

¿Te animas a encontrar tu solo? Ayuda: puedes determinar un triángulo isósceles rectángulo.

A partir de conocer las razones trigonométricas de estos ángulos del primer cuadrante puedes obtener la de ángulos como ser 120° , 210° , 135° , en un proceso llamado “reducción al primer cuadrante”

Funciones recíprocas del seno, coseno y tangente: “Secante, Cosecante y Cotangente”

A partir de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se definen:

- la **cotangente de x** ($\operatorname{ctg} x$), por: $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$
- la **secante de x** ($\sec x$), por: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- la **cosecante de x** ($\operatorname{cosec} x$), por: $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$,

donde, en cada caso, se consideran los $x \in \mathbb{R}$ que no anulen el denominador del segundo miembro.

Práctica:

11. Complete el cuadro con los signos (+) ó (-), según corresponda

	<i>Ic.</i>	<i>Iic.</i>	<i>IIic.</i>	<i>IVc.</i>
$\operatorname{sen} \alpha$				
$\cos \alpha$				
$\operatorname{tg} \alpha$				
$\operatorname{ctg} \alpha$				
$\sec \alpha$				
$\operatorname{cosec} \alpha$				

12. Complete el siguiente cuadro:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\operatorname{sen} \alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$					
$\operatorname{ctg} \alpha$					
$\sec \alpha$					
$\operatorname{cosec} \alpha$					

13. Halle, si existen, los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales:

a. $\operatorname{tg}(x)=0$

c. $\sec(x)=0$

b. $\operatorname{ctg}(x)=0$

d. $\operatorname{cosec}(x)=0$

14. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $tgx = \frac{1}{3} \Rightarrow senx = 1$ y $cosx = 3$

b) $senx = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $cosx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tgx = 1$

c) $cosx = \frac{3}{5}$ y $x \in IVc. \Rightarrow tgx + \frac{1}{cosx} = 1$

d) $cosx = \frac{3}{5}$ y $x \in Ic. \Rightarrow senx = 3cosx - 1$

15. Sin utilizar calculadora, obtenga x , si:

a) $x - 3 = tg \frac{\pi}{4} + 4cos^2 \frac{\pi}{4} + 3sec^2(\frac{\pi}{6} + 2\pi)$

b) $x = 3sen \frac{\pi}{2} + 5tg \frac{\pi}{4} - 2cos 0$

c) $x = 9cosec \frac{\pi}{2} - 12sen \frac{\pi}{6} + sec 0$

d) $2xsen^2 45^\circ = cos^2 30^\circ + cos^2 60^\circ - tg^2 45^\circ$

e) $x = (tg 45^\circ + ctg 45^\circ)(sen 90^\circ cos 45^\circ + cos 0^\circ sen 45^\circ)$

16. Obtenga ω , con $0 \leq \omega < 2\pi$:

a) $\omega \in IIc.$ y $cos \omega = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $sen \omega = -\frac{1}{2}$ y $cos \omega > 0$

c) $tg \omega = -1$ y $sen \omega < 0$

17. Demuestre las siguientes igualdades:

a) $tgx = senx \cdot secx$

b) $ctg x = cosec x \cdot cos x$

c) $sec^2 x = 1 + tg^2 x$

d) $cosec^2 x = 1 + ctg^2 x$

Resolución de a) $senx \cdot secx = senx \cdot \frac{1}{cosx} = \frac{senx}{cosx} = tgx$

Razones trigonométricas de suma o diferencia de ángulos

A partir de conocer valores exactos de razones trigonométricas de algunos ángulos, con una serie de propiedades podemos obtener valores exactos de razones de otros ángulos.

Aceptaremos, sin demostrar, la siguiente identidad:

(1)

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

A partir de esta propiedad se pueden demostrar otras, también más usadas, como ser:

(2)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

(3)

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

(4)

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Demostremos (2) y (3) a modo de ejemplo:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(-\beta) \\ &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot [-\sin(\beta)] = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

↑

Paridad del coseno, imparidad del seno

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right] = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos(\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\beta) \\ &= \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)\end{aligned}$$

Con las propiedades (1) y (3) podemos obtener las dos que siguen:

(5)

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

(6)

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Se demuestran simplemente usando el hecho de que $2\alpha = \alpha + \alpha$

Práctica

18. Sin utilizar calculadora, obtenga los valores exactos de:

a. $\text{sen}(75^\circ)$

$$\text{sen}(75^\circ) = \text{sen}(30^\circ + 45^\circ) = \text{sen}(30^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(30^\circ)\text{sen}(45^\circ) =$$

Resolución:

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

b. $\cos(75^\circ)$

c. $\cos(105^\circ)$

d. $\text{sen}(105^\circ)$

19. Determine $\text{sen}(\alpha + \beta)$ y $\text{sen}(\alpha - \beta)$ en cada caso, si:

a. $\text{sen}(\alpha) = \frac{2}{5}$, $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{10}$ y $\alpha, \beta \in I_c$

b. $\text{tg}(\alpha) = -\frac{2}{3}$, $\text{sen}(\beta) = \frac{1}{10}$, $\alpha \in IV_c$ y $\beta \in I_c$

Resolución:

$$\text{tg}(\alpha) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = -\frac{2}{3}\cos(\alpha), \text{ por lo que, con la relación pitagórica tendremos:}$$

$$\frac{4}{9}\cos^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \frac{13}{9}\cos^2(\alpha) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \quad (1)$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{100} + \cos^2(\beta) = 1 \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{\sqrt{99}}{10} \Rightarrow \cos(\beta) = \frac{3\sqrt{11}}{10} \quad (2)$$

Así, por el seno de la suma tendremos:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} + \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{-6\sqrt{11} + 3}{10\sqrt{13}},$$

Y el seno de la resta:

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = -\frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} - \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{10} = \frac{-6\sqrt{11} - 3}{10\sqrt{13}}$$

c. $\text{sen}(\alpha) = -\frac{3}{5}$, $\cos(\beta) = \frac{1}{5}$, $\alpha \in III_c$, y $\beta \in I_c$.

20. Demuestre las siguientes identidades:

a. $\frac{\cos(x-y)}{\cos(x) \cdot \text{sen}(y)} = \text{tg}(x) + \text{ctg}(y)$

Resolución:

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x-y)}{\cos(x) \cdot \text{sen}(y)} &= \frac{\cos(x)\cos(y) + \text{sen}(x)\text{sen}(y)}{\cos(x) \cdot \text{sen}(y)} = \frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x) \cdot \text{sen}(y)} + \frac{\text{sen}(x)\text{sen}(y)}{\cos(x) \cdot \text{sen}(y)} = \\ &= \frac{\cos(y)}{\text{sen}(y)} + \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \text{tg}(x) + \text{ctg}(y) \end{aligned}$$

b. $(\text{sen}x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}(2x)$

c. $\text{sen}(x+y) \cdot \text{sen}(x-y) = \text{sen}^2(x) - \text{sen}^2(y)$

$$\text{d. } \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}(2x)} = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) \quad \text{e. } \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{\cos(2x)}{\cos(x)} = \sec(x)$$

Otras identidades:

Sabiendo lo que sucede con el seno y coseno de suma de ángulos, es natural revisar qué sucede con la tangente. (Las siguientes identidades serán válidas si ambos miembros están definidos)

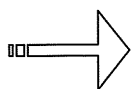
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) - \operatorname{tg}(\beta)}{1 + \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta)}$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}(\alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(\alpha)}$$

CAPÍTULO 7: FUNCIONES

7.1 – FUNCIÓN – DEFINICIÓN – REPRESENTACIONES

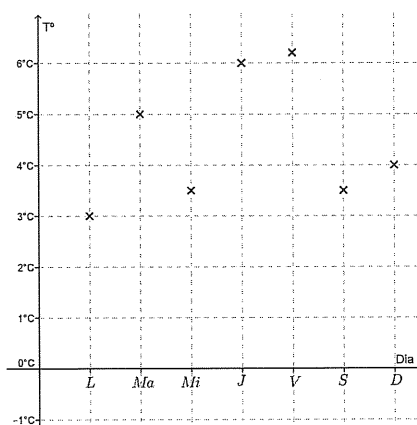


Se ha tomado nota de la temperatura máxima, en grado Celsius, acontecida en Rosario, anunciadas en una radio local, a lo largo de una semana completa. Se volcaron los datos en una tabla:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Tº máx.	3	5	3,5	6	6,2	3,5	4

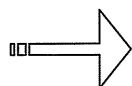
- ¿A qué estación parece corresponderse estas temperaturas?
- ¿Puede suceder que el día lunes en algún momento hubiese una temperatura de 2°C?
- ¿Puede suceder que el día jueves en algún momento hubiese una temperatura de 7°C?

Podríamos representar esta información en una gráfica:



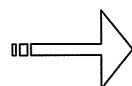
Muchas veces nos resulta “más fácil” sacar algunas conclusiones al poder graficar.

- ¿Qué día hizo más calor?
- ¿Cuál fue el día más fresco?



Completa la siguiente tabla, sabiendo la longitud l del lado del cuadrado, se pretende calcular su área:

Lado l (cm)	0,5	1	2	3	4	5	6
Área (cm ²)							



Alberto corta el pasto de su patio una vez por semana, en efecto, todos los domingos se dedica a eso. ¿Podrías realizar el esbozo de un gráfico que mostrará como varía la altura según los días de la semana durante el mes de marzo?

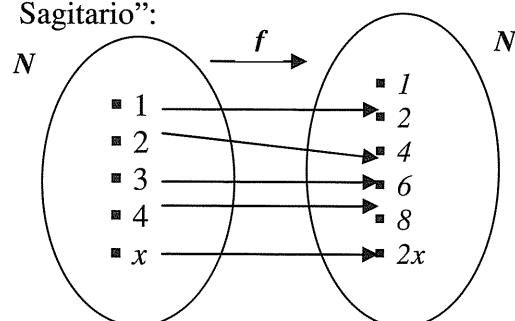
Los vistos anteriormente son relaciones entre variables que se constituyen en función.

FUNCIÓN

Una función es una terna (f, A, B) formada por dos conjuntos no vacíos A y B y una ley f que **a cada elemento** del conjunto A le hace corresponder **un único elemento** del conjunto B .

Observaciones y definiciones:

- Al conjunto A se lo llama “conjunto de partida” o “dominio de la función”. Suele simbolizarse $A = \text{Dom}(f) = \text{Dom}_f$.
- Al conjunto B se lo llama “conjunto de llegada” o “codominio de la función”
- Muchas veces escribimos “ $f : A \rightarrow B$ ”, esto se lee “ f de A a B ”
- $f : N \rightarrow N / f(x) = 2x$, esto se lee “ f va de los naturales a los naturales tal que f de x es el doble de x ”. Por ejemplo, podemos “mostrar” algo del comportamiento de esta situación en lo que llamamos “Diagrama Sagitario”:



El dominio de la función es el conjunto de los naturales, al igual que su codominio. Pero si observamos el comportamiento de esta función, notaremos que no todos los números del conjunto de llegada están relacionados con alguno del dominio.

Los que sí lo están, son denominados **imagen**, por ejemplo “6 es imagen de 3, ya que $f(3)=6$ ”.

El conjunto IMAGEN es el conjunto formado por todos estos elementos, es un subconjunto del codominio y se lo simboliza $\boxed{Im_f}$.

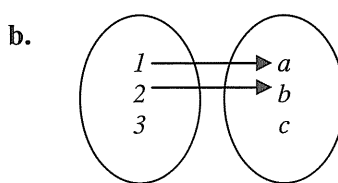
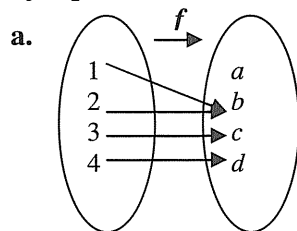
En este ejemplo, el conjunto imagen está formado por todos los naturales pares.

- Dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$ **son iguales** si:

$$\begin{cases} A = C \\ B = D \\ f(x) = g(x); \quad \forall x \in A \end{cases}$$

- Las variables del dominio se denominan “**variables independientes**”

Ejemplos:



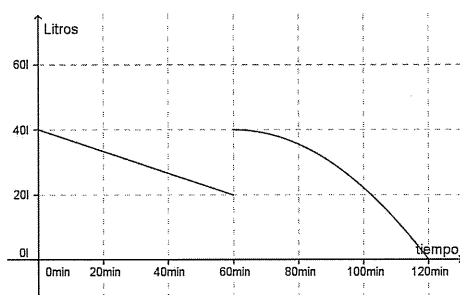
$$\text{Dom}_f = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$\text{Cod}_f = \{a; b; c; d\}$$

$$\text{Im}_f = \{b; c; d\}$$

Esta relación no es función porque el número 3 no tiene imagen

c. A continuación se muestra un gráfico que modeliza la situación “Litros de nafta que tiene el tanque de mi auto en el instante t , al ir de mi casa al pueblo de mi abuela”



¿Qué te parece que sucede a la hora? ¿Y a las dos horas?

La variable independiente es el tiempo t , por lo que se muestra en la gráfica, medido en minutos.

Llamemos a esta función $L(t)$

Analizando la gráfica podemos “ver” el dominio y el conjunto imagen de esta función. En efecto: $\text{Dom}_L = [0; 120] \text{ min}$, $\text{Im}_L = [0; 40] \text{ litros}$

¿Cuál, te parece, es la capacidad del tanque de nafta?

¿Cuántos litros de nafta tenía el tanque, aproximadamente, a la media hora de empezar el camino?

¿Cuántos litros de nafta se gastaron en todo el viaje?

d. Las funciones $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ y $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} / g(x) = x - 1$, son iguales.

En efecto sus dominios y codominios coinciden, y:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x + 1} = x - 1 = g(x)$$

Funciones inyectivas, suryectivas, biyectivas

$$f: A \rightarrow B$$

➤ Diremos que f es inyectiva si dados dos elementos distintos de A , sus imágenes resultan distintas. En símbolos:

$$\forall x, y \in A; x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

➤ Diremos que f es suryectiva si todos los elementos de B , son imágenes de algún elemento de A . En símbolos:

$$\text{Im}_f = B$$

➤ Diremos que f es *biyectiva* si f es simultáneamente inyectiva y suryectiva. Cuando esto sucede decimos que es una relación “biunívoca” entre A y B , o también “una relación uno a uno”

Práctica

1. Dada la terna (f, A, B) , donde $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $B = \{a; b; c; d; e\}$, determine si constituye función con la relación f que se indica en cada caso:

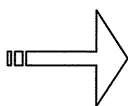
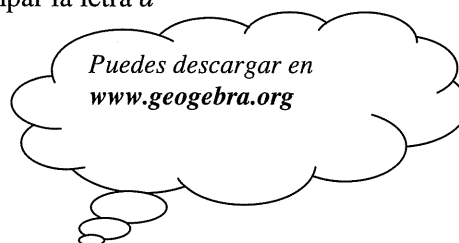
- “a cada número par de A asigna la letra b ”
- “al número 1 asigna las letras a y b , y a los demás números la letra d ”
- “a cada número par se le asigna la letra c t a cada impar la letra d ”

2. $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = x^2 + x + 1$

a. Calcule $f(1)$, $f(0)$, $f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$

b. Determine el dominio y el codominio de la función

Gráfica → c. Realiza la grafica de la función usando el GeoGebra, ¿podrías determinar si se trata de una función inyectiva?



*Funciones como la del ejercicio 2 se denominan **funciones reales a variable real**. Son así porque tanto el dominio como el codominio son subconjuntos de los números reales. Las mismas serán de mucho interés y de ahora en adelante sólo trabajaremos con este tipo de funciones.*

Práctica

3. En cada item determine el dominio de la función, $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$

a. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \sqrt{x^2 + 12}$

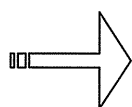
b. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{si } -5 \leq x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 < x \leq 5 \end{cases}$



Resolución: En estos casos el dominio lo “leemos” a la derecha de la ley, tenemos una fórmula válida para los x tales que están entre -5 y 0 incluyendo a ambos, y otra fórmula para los x mayores que 0 y menores o iguales que 5 . Uniendo estos dos intervalos, tenemos que $\text{Dom } f = [-5; 5]$. Después: $f(-1) = (-1)^3 - 1 = -2$, $f(0) = (0)^3 - 1 = -1$ y $f(2) = (2)^2 + 2 = 6$.

c. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ x^3 + 2x & \text{si } 0 < x \leq 8 \end{cases}$

d. $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 2}$



De ahora en adelante, cuando se muestre sólo la ley de la función, tomaremos como Dominio al conjunto maximal de números reales donde es factible $f(x)$, *dominio natural*. Y se tomará como codominio al conjunto imagen, con esto todas estas funciones resultarán suryectivas.

Práctica:

4. Determina el dominio de la función en cada caso:

a. $f(x) = x^2 + 3x + 1$

e. $w(x) = \frac{x^3 + 2x + 3}{x - 2} + 5x$

b. $f(x) = (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

f. $h(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2} + 6$

c. $h(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

g. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

Resolución: El único “problema” es que tenemos una división, no podemos dividir por cero, todas las demás “cuentas” son realizables para cualquier valor real que asuma la variable x .

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, por lo que
 $Dom_h = R - \{1\}$

Resolución: El “problema” que se presenta en este caso es la raíz cuadrada, como vimos en un capítulo anterior, las raíces de índice par sólo las puedo aplicar (en los reales) a números reales no negativos. Así:

$3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$, por lo que

$Dom_h = \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

d. $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 5x + 6}$

Resolución: El único “problema” es que tenemos una división.

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x = 2 \vee x = 3)$, por lo que
 $Dom_h = R - \{2; 3\}$

h. $f(x) = \sqrt{-x + 2}$

i. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

5. En cada uno de los ítems, exprese la fórmula de la ley de la función y establezca su dominio (en el contexto del problema planteado)

a. ¿Cuál es el área de un cuadrado de lado l ?

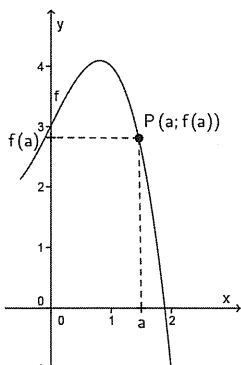
b. Un rectángulo perímetro 20cm. Exprese el área del mismo en función de uno de sus lados.

c. Un tanque tiene la forma de un prisma recto de base cuadrada. Tiene una capacidad de $8m^3$. Exprese el área total del mismo (sabiendo que no tiene tapa) en función del lado de la base.

6. Alberto corta en verano el césped todos los domingos a la misma hora. Esboza el gráfico de la función $h(t)$: “altura del césped en función del tiempo t ”.

7. Sea $f(x) = x + 2$. Determine $f(0)$; $f(-3)$; $f(a)$; $f(3a)$ y $f(b^2)$.

Ej.: $f(3a) = (3a) + 2 = 3a + 2$



Definición de gráfico de una función:

Si tenemos una función cuya ley es f , su gráfica es el conjunto de puntos:

$$G_f = \{(x; f(x)) : x \in \text{Dom}_f\}$$

Los mismos determinan una curva en el plano coordenado xy .

Práctica:

8. Sea la función $f(x) = \begin{cases} |x+3| & \text{si } x \leq 0 \\ x^3 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Responda:

- ¿Cuál es el dominio de la función?
- Calcule $f(-5)$; $f(0)$ y $f(8)$
- ¿Está el punto $(2;5)$ en la gráfica de f ?
- ¿Podrían eventualmente estar los puntos de coordenadas $(0;3)$ y $(0;0)$ en la gráfica de una función?

9. Determine la intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados (si existen).
 $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

Resolución:

Intersección con el eje x : Los puntos de este eje tienen la característica de tener ordenada igual a cero, entonces nuestra búsqueda es buscar los x tales que $f(x) = 0$. Así planteado, nos queda una ecuación cuadrática por resolver: $x^2 - 3x + 2 = 0$, eso nos da $x=1$, $x=2$. Conclusión, los puntos de intersección con el eje x son dos: $(1;0)$ y $(2;0)$.

Intersección con el eje y : Los puntos de este eje tienen la característica de tener abscisa igual a cero, entonces nuestra búsqueda es buscar la imagen de $x=0$. Así planteado, nos queda simplemente resolver $f(0) = 2$. Conclusión, el punto de intersección con el eje y es: $(0;2)$.

10. En cada caso, determine la intersección de la gráfica de f con los ejes coordenados (si existen).

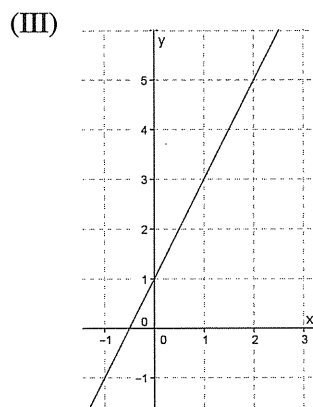
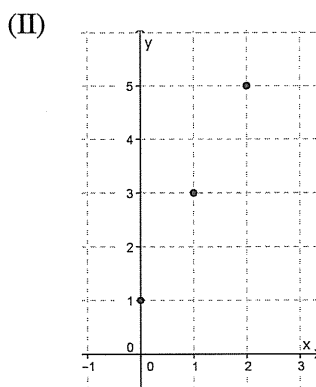
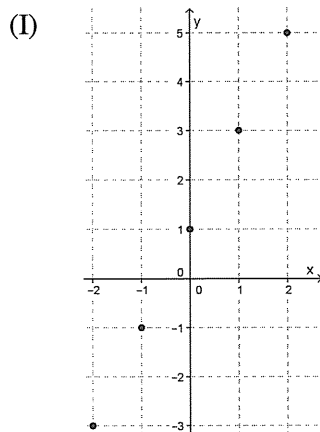
- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$ | d. $f(x) = 8x + 2$ |
| b. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ | e. $f(x) = \frac{x-2}{x}$ |
| c. $f(x) = x^2 - 9$ | f. $f(x) = x-9 - 27$ |

11. ¿Cuántos puntos de intersección con el eje y puede tener la gráfica de una función como máximo? ¿Por qué? ¿Y con el eje x ?

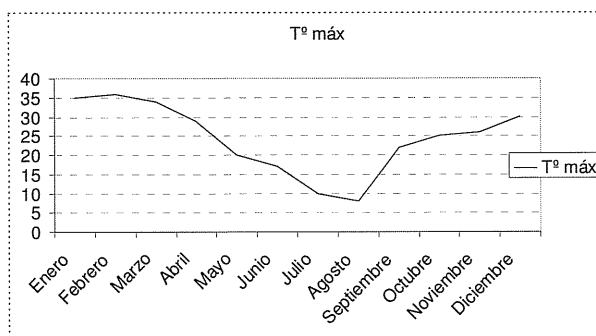
12. Igual ley, distinta gráfica. Indica, qué gráfica se corresponde con qué función:

$$f : R \rightarrow R / f(x) = 2x + 1 \quad g : \{0;1;2\} \rightarrow R / g(x) = 2x + 1$$

$$h : Z \rightarrow R / h(x) = 2x + 1$$



Funciones crecientes y decrecientes



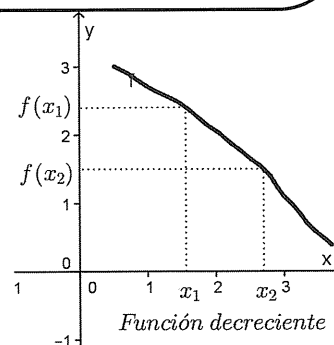
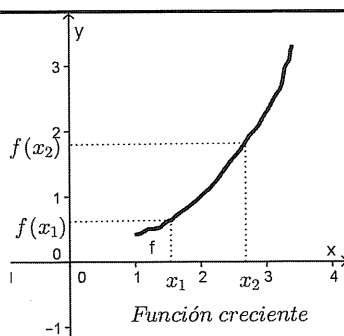
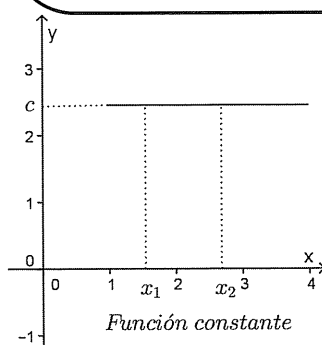
El gráfico de la izquierda nos muestra las temperaturas máximas que Pedro tomo en su casa desde el 15 de enero de 2013 al 15 de diciembre del mismo año. Podríamos decir que la gráfica corresponde a la función temperatura máxima en función del tiempo.

Podríamos decir que, desde aproximadamente el 14 de febrero al 15 de agosto la temperatura fue decreciendo.

En cambio desde el 15 de agosto hasta el 15 de diciembre la temperatura fue aumentando.

En términos analíticos decimos que en el intervalo de tiempo desde el 14/02 a 15/08, la función es decreciente. En tanto en el intervalo del 15/08 a 15/12 es una función creciente. En el caso de que la función no presente ningún cambio diremos que es constante —gráficamente se visualiza por una curva horizontal—

- Una función f se dice constante en un intervalo $I \subset \text{Dom}_f$, si para todo $x \in I : f(x) = c$, con c una constante real.
- Una función f se dice creciente en un intervalo $I \subset \text{Dom}_f$, si para todo $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$
- Una función f se dice decreciente en un intervalo $I \subset \text{Dom}_f$, si para todo $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$



Operaciones con funciones

Dadas dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$, podemos definir nuevas funciones a partir de ellas, usando operaciones elementales. Para ello debemos tener en cuenta como primer medida que $A \cap B \neq \emptyset$.

Así:

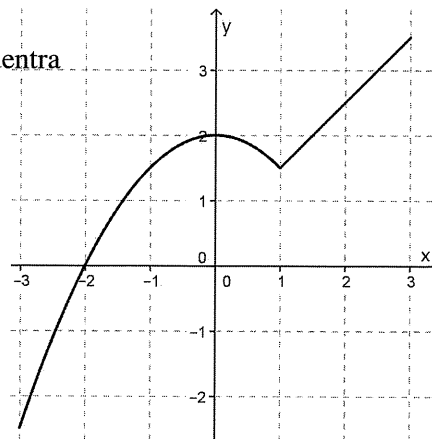
- $\forall x \in A \cap B$, definimos la función suma $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- $\forall x \in A \cap B$, definimos la función producto $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\forall x \in A \cap B$, definimos la función resta $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
- $\forall x \in A \cap B - \{x / g(x) = 0\}$, definimos la función cociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Práctica:

13. Dada la siguiente gráfica de una función f . Encuentra (aproxima):

- $x / f(x) = 0$
- La intersección con el eje y
- Los intervalos de crecimiento
- Los intervalos de decrecimiento
- El dominio y el conjunto imagen
- $x / f(x) > 0$



14. Dadas las funciones cuyas leyes se indican, resuelva:

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = x^2 + 2x + 1$$

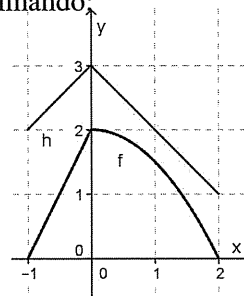
- $(f + g)(3)$
- $(f - g)(3) \cdot g(1)$
- $\left(\frac{g}{f}\right)(2)$, ¿puedes resolver $\left(\frac{g}{f}\right)(1)$? ¿Por qué?
- La función $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, indicando su dominio.

Resolución: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x^2+2x+1}$, el dominio $Dom = R - \{-1\}$

- La función $(f \cdot g)(x)$.

15. A partir de la gráfica de las funciones f y h resuelve, aproximando:

- $(f + h)(0)$
- $2 \cdot h(2) - f(1)$
- $(f \cdot h)(-1)$
- $\left(\frac{f}{h}\right)(0)$

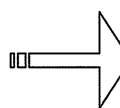


7.2 -FUNCIONES LINEALES

Una función $f : R \rightarrow R$ es llamada lineal (o lineal afín) si presenta la siguiente fórmula:

$$f(x) = ax + b \quad (\text{ó } y = ax + b)$$

donde a y b son coeficientes reales.



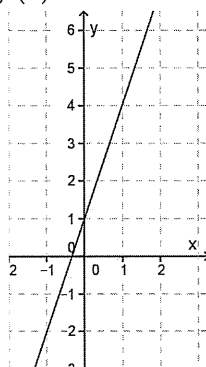
Lo interesante de estas funciones se da en su *gráfica*, la misma es una **recta**.

Dicho esto, para graficarla será suficiente ubicar dos puntos de la curva.

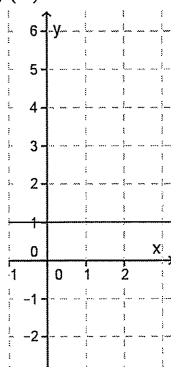
Nunca una recta vertical podrá ser la curva de una función lineal. ¿Por qué?

Algunos ejemplos:

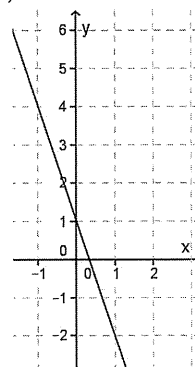
$$f(x) = 3x + 1$$



$$g(x) = 1$$



$$h(x) = -3x + 1$$



Analizamos los coeficientes a y b .

Intersección con el eje y

Los puntos del eje y son aquellos cuya abscisa es cero. Entonces, estamos buscando los puntos de la recta $y = ax + b$ cuya abscisa es cero. Así: $y = a \cdot 0 + b = b$. Es decir que la intersección de la recta con el eje y es el punto $(0; b)$

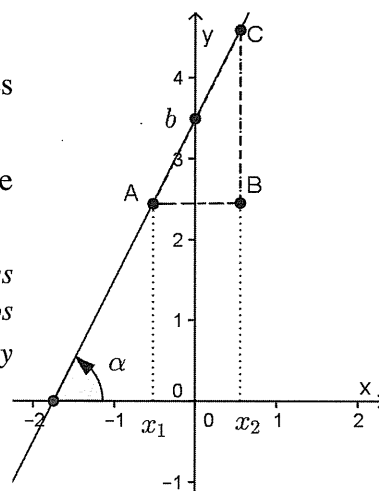
Por eso a b se lo denomina **ordenada al origen**.

Pendiente de la recta

El número a es la llamada pendiente de la recta, es lo que “mide” la inclinación de la recta.

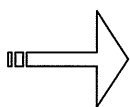
En efecto $a = \operatorname{tg}(\alpha)$, donde α es el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las x .

Veamos en nuestra gráfica: tomemos dos valores $x_1 < x_2$, entonces el triángulo formado por los puntos de coordenadas $A(x_1; f(x_1))$, $B(x_2; f(x_1))$ y $C(x_2; f(x_2))$, es rectángulo en B .



Además $\widehat{BAC} = \alpha$, ¿por qué?

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot x_2 + b - (a \cdot x_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$



Podemos decir, ahora, que si la pendiente es positiva, la función será creciente. En tanto, si es negativa, la función es decreciente.

¿Y si es cero? ¡Se tratará de una función constante!

También podemos concluir que si dos funciones tienen la misma pendiente, representarán rectas paralelas.

Práctica:

1. Obtenga las gráficas de las funciones lineales que se expresan a continuación:

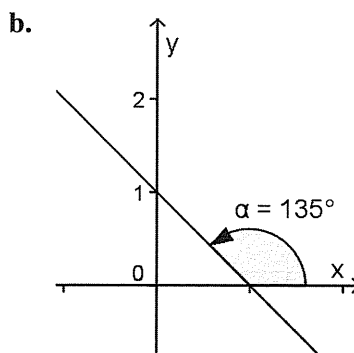
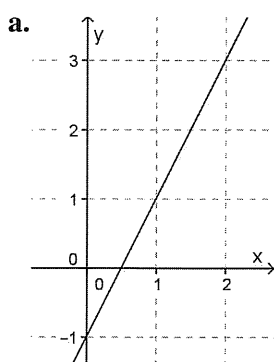
a. $f(x) = 2x + 5$

c. $f(x) = x - 5$

b. $f(x) = -2x + 5$

d. $f(x) = -x - 2$

2. Observando las gráficas obtenga las leyes de las funciones lineales



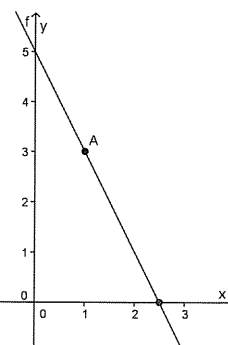
3. Dada la función, en cada caso, determine los valores de x tales que $f(x) > 0$.

Sugerencia: vélgase de la gráfica de la función.

a. $f(x) = -2x + 5$

Resolución:

Ya se puede “ver” la intersección de la recta con el eje y , esto se da en $y = 5$. Para obtener otro punto de paso: $f(1) = -2 \cdot 1 + 5 = 3$, es decir queda el punto $(1, 3)$. Notamos que desde la intersección de la recta con el eje x hacia la derecha, la función toma valores negativos, y hacia la izquierda, positivos. Entonces, buscaremos el valor de x tal que $f(x) = 0$.



$f(x)=0 \Rightarrow -2x+5=0 \Rightarrow x=5/2$. Por lo dicho anteriormente, tenemos que si tomo $x > 5/2 \Rightarrow f(x) < 0$, y que si tomamos $x < 5/2 \Rightarrow f(x) > 0$. Entonces nuestra respuesta será el intervalo: $\left(-\infty; \frac{5}{2}\right)$

b. $f(x) = -x + 2$

c. $f(x) = 3x + 6$

4. Determine la fórmula de las funciones lineales, según los datos de la gráfica dados:

a. Su pendiente es 3 y su ordenada al origen -2

b. Su pendiente es -5 y pasa por el punto $(0;8)$.

c. Su pendiente es 2 y pasa por el punto $(1;3)$

d. Su ordenada al origen es 4 y pasa por el punto $(2;5)$

e. Pasa por los puntos $(1;3)$ y $(2;7)$

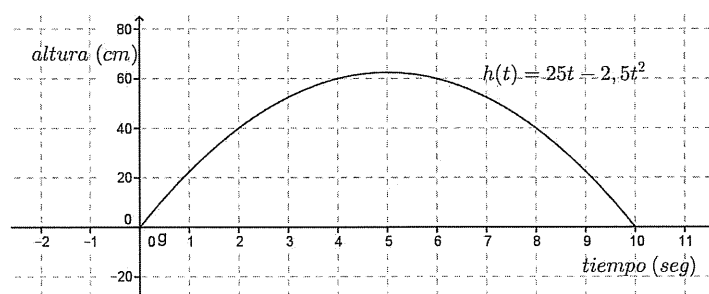
5. Dibuje las gráficas de las funciones $f_1(x) = 3x + 1$; $f_2(x) = 3x - 5$; $f_3(x) = x - 1$ y $f_4(x) = 3x + 2$. ¿Puedes conjeturar algo respecto a las rectas de igual pendiente?

7.3 - FUNCIONES CUADRÁTICA

Una función $f : R \rightarrow R$ es llamada cuadrática si presenta la siguiente fórmula:

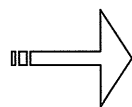
$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (\text{ó } y = ax^2 + bx + c)$$

donde a, b y c son coeficientes reales, donde $a \neq 0$



Trayectoria de una pelotita de tenis. Su altura es función del tiempo, su fórmula como se ve en la figura responde a una función cuadrática

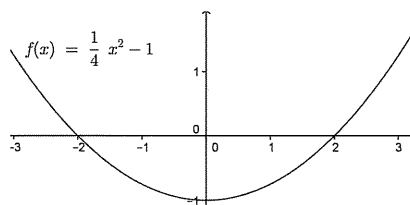
Lo interesante de estas funciones se da en su gráfica, la misma es una **parábola**. (Es una cónica)



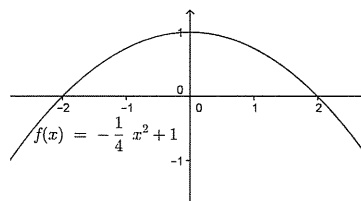
Los elementos que nos interesarán de la misma son su vértice (donde la función alcanzará su máximo o mínimo), eje de simetría (en el caso de funciones se tratará de una recta vertical) y sus ramas ("hacia arriba" ó "hacia abajo"). En la figura se constituye una parábola ramas "hacia abajo", el eje de simetría es la recta vertical $x=5$, y el vértice (donde se alcanza la máxima altura" es el punto de coordenadas $(5;62,5)$

Papel del coeficiente a

Las parábolas $y = ax^2 + bx + c$ con $a > 0$ son “ramas hacia arriba”. En su vértice se alcanzará el mínimo



Las parábolas $y = ax^2 + bx + c$ con $a < 0$ son “ramas hacia abajo”. En su vértice se alcanzará el máximo



Localización del vértice

Sabemos que en el vértice se alcanza el máximo o mínimo de la función según sea el signo de a . Con esto en mente “normalizaremos” la ecuación, para ello se completa cuadrados, este procedimiento ya lo hicimos cuando tuvimos que demostrar la fórmula de la resolvente. Habíamos obtenido lo siguiente:

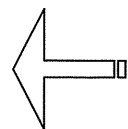
$$y = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Analizando esta fórmula se observa que el mínimo o máximo valor de y se alcanzará cuando $x = -\frac{b}{2a}$. Por lo que dicho valor será la abscisa del vértice. En definitiva el

vértice tendrá coordenadas: $V\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

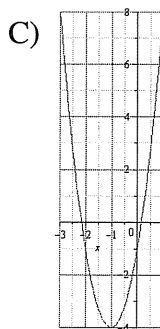
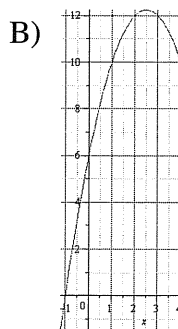
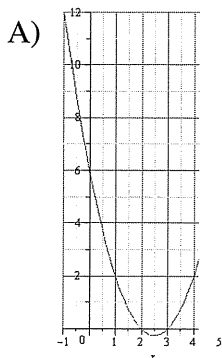
Asimismo el eje de simetría será la recta vertical: $x = -\frac{b}{2a}$.

Muchas veces sólo nos interesará simplemente realizar un “croquis” de la parábola, con lo cual los datos interesantes a obtener serán, mayormente, la intersección de la parábola con el eje x (los valores de x para los cuales $y=0$) y si la misma es ramas “hacia arriba” o “abajo”.



Práctica

1. Relaciona cada fórmula con su gráfica. Justifica adecuadamente:



(a) $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

(b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$

(c) $f(x) = x^2 - 5x + 6$

2. Indica, para cada una de las funciones del ejercicio 1, las coordenadas del vértice.

3. Indica, para cada una de las funciones del ejercicio 1, las intersecciones de la parábola con los ejes coordenados.

Resolución de $f(x) = -x^2 + 5x + 6$:

Intersección con el eje y ($x=0$): $f(0) = -0^2 + 5 \cdot 0 + 6 = 6 \rightarrow (0,6)$

Intersección con el eje x ($f(x)=0$): $-x^2 + 5x + 6 = 0$, usando resolvente nos quedan los valores de $x_1 = -1$ y $x_2 = 6 \rightarrow (6,0)$ y $(-1,0)$

4. Indica los intervalos, en cada caso, donde $f(x) > 0$:

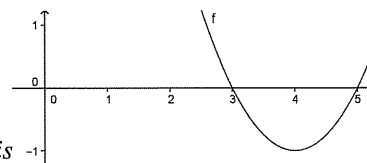
a. $f(x) = -x^2 + 5x + 6$

b. $f(x) = x^2 - 8x + 15$

Resolución: Como $a = 1 > 0$, es ramas hacia arriba.(1)

$$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x_1 = 5; x_2 = 3 \quad (2)$$

Con (1) y (2) estamos en condiciones de tener un croquis de la gráfica.



Así, simplemente analizando la gráfica, tenemos que los intervalos son: $(-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$

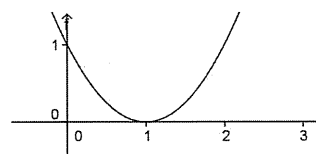
c. $f(x) = x^2 - x - 2$

d. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Resolución: Como $a = 1 > 0$, es ramas hacia arriba.(1)

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad (2)$$

Con (1) y (2) estamos en condiciones de tener un croquis de la gráfica.

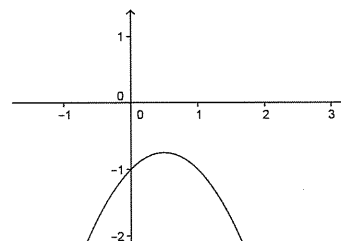


Así, simplemente analizando la gráfica, tenemos que el conjunto es: $R - \{1\}$

e. $f(x) = -x^2 + x - 1$

Resolución: Como $a = -1 < 0$, es ramas hacia abajo.(1)

$-x^2 + x - 1 = 0$, tenemos que $\Delta < 0$, con lo que tenemos que no hay intersección con el eje x (porque no existe x tal que $f(x)=0$) (2)



Con (1) y (2) estamos en condiciones de tener un croquis de la gráfica.

Así, simplemente analizando la gráfica, tenemos que el conjunto es: $\emptyset$

f. $f(x) = x^2 - 4x$

i. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

g. $f(x) = x^2 - 9$

j. $f(x) = x^2 + 1$

h. $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

k. $f(x) = -x^2 - 4$

5. Un proyectil, después de ser lanzado, alcanza una altura de 210km . Su trayectoria fue parabólica, yendo a caer a 12km de la base de lanzamiento. ¿Qué ecuación rige su trayectoria?

6. Interprete geoméricamente las posibles soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ estudiadas en el capítulo 4.

7. Una masa de aire frío entra a la ciudad a la medianoche. La temperatura T desde la 00:00hs. hasta las 12:00hs. responde a un modelo cuadrático: $T(t) = 0,1 \cdot (2t^2 - 32t + 200)$, donde t es el tiempo medido en horas; por lo dicho anteriormente $0 \leq t \leq 12$.

¿A qué hora se alcanza la temperatura mínima?. ¿Cuál es la temperatura mínima?

8. En cada ítem, obtenga el dominio de la función:

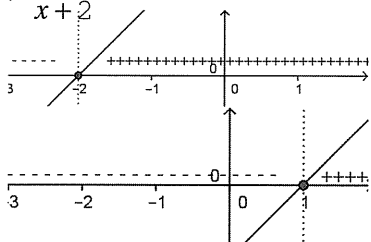
a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ b. $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 6x + 9}$ c. $h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

d. $m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$ e. $k(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$ f. $s(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

Una aplicación a inecuaciones:

Podemos resolver algunas inecuaciones de forma muy rápida usando el análisis de las gráficas de funciones lineales y cuadráticas:

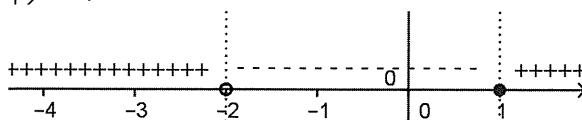
(*) $\frac{x-1}{x+2} \geq 0$



Observando la gráfica de $f(x) = x - 1$, vemos que $f(x) > 0$ si $x > 1$, si $x < 1$, tenemos $f(x) < 0$

Análogamente, la gráfica de $g(x) = x + 2$, vemos que $g(x) > 0$ si $x > -2$, si $x < -2$, tenemos $g(x) < 0$

$\frac{x-1}{x+2}$



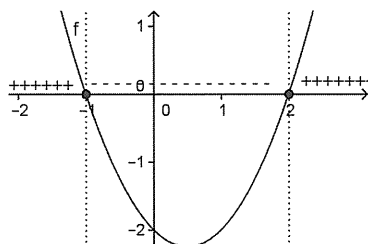
De esta forma podemos determinar rápidamente el signo del cociente ya que sabemos que si numerador y denominador tienen igual signo entonces el cociente será positivo; en tanto el cociente será cero donde el numerador lo sea.

Así, la solución a la inecuación planteada será: $S = (-\infty; -2) \cup [1; +\infty)$

$$(**) x^2 - x - 2 < 0$$

Para resolver esta inecuación lo que haremos es analizar la gráfica de $f(x) = x^2 - x - 2$.

Así:



Vemos que es ramas hacia arriba, y por medio de la resolvente obtenemos los ceros de la función, que resultan ser -1 y 2. Hacemos un croquis de la gráfica y con eso analizamos el signo de las imágenes. Entonces la solución será:
 $S = (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Práctica:

9. Resuelva las siguientes inecuaciones:

a. $\frac{x-3}{x-1} \leq 0$

c. $\frac{2x+4}{x-1} < 0$

b. $x^2 + 8x + 15 > 0$

d. $x^2 + 8x + 16 > 0$

CAPÍTULO 8: SISTEMAS DE ECUACIONES

Se buscan las dimensiones de un rectángulo cuyo área es 100cm^2 y su perímetro 140cm .

Procedemos a esquematizar nuestro problema

 Llamamos “b” a su base, y “a” su altura.

$$\text{Área} \rightarrow a \cdot b = 100$$

$$\text{Perímetro} \rightarrow 2 \cdot (a + b) = 140$$

Ambas condiciones deben cumplirse simultáneamente. Esto lo anotamos así:

$$\begin{cases} a \cdot b = 100 \\ 2 \cdot (a + b) = 140 \end{cases}$$

Esto es lo que denominamos un sistema de ecuaciones

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

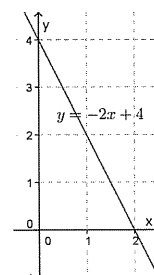
Nosotros hemos analizado la ecuación lineal de una sola incógnita en el capítulo 4. En general, una ecuación lineal de n incógnitas tendrá la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b$$

Donde los $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ son números reales llamados coeficientes y b (también real) se denomina término independiente. En tanto las $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ son las n incógnitas de la ecuación.

Por ejemplo: $x + 2y + 3z = 18$ es una ecuación lineal donde los coeficientes son los números 1, 2 y 3; el término independiente es 18, las incógnitas (que son tres) son $x; y; z$. Serán solución de la misma la terna de números $(x; y; z)$ que la verifiquen. Por ejemplo son solución las ternas: $(18; 0; 0); (0; 9; 0); (0; 0; 6)$ y $(3; 6; 1)$; por decir sólo algunas porque en realidad tenemos infinitas soluciones.-
-Verás en cursos superiores de Álgebra que, geométricamente, constituyen un plano-

Otro ejemplo de ecuación lineal sería: $2x + y = 4$, la misma tiene dos incógnitas. Tiene tantas soluciones como punto una recta. En efecto nosotros hemos analizado este tipo de ecuaciones cuando trabajamos funciones lineales. ¿No te acuerdas? ¿Y si lo escribimos así: $y = -2x + 4$?



Un sistema de ecuaciones será lineal cuando las ecuaciones que lo conforman resulten ser lineales.

Así quedará lo siguiente:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

(S) es un sistema de m ecuaciones lineales, con n incógnitas $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$, donde los coeficientes $a_{ij} \in R$, para todo $i = 1; 2; \dots; m$ y $j = 1; 2; \dots; n$.

Muchas veces decimos directamente que (S) es un sistema $m \times n$.

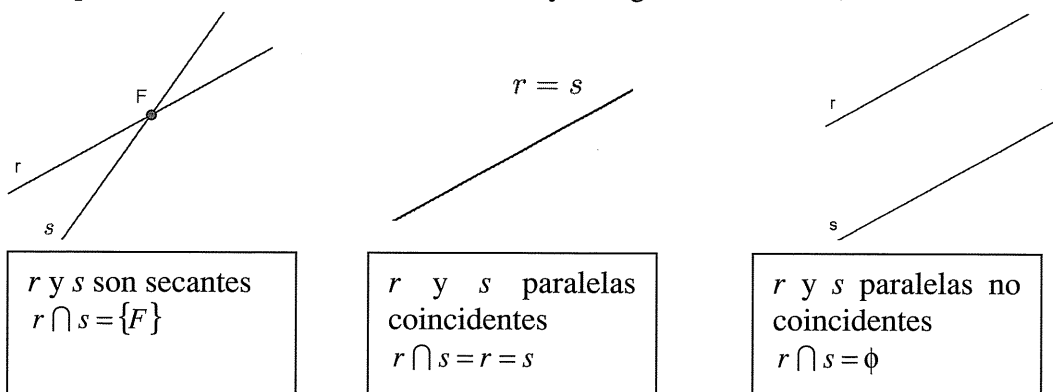
Sistemas 2x2

$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, usualmente cuando son sólo dos incógnitas, escribimos:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Cada una de las ecuaciones del sistema, como comentamos en el ejemplo, representa la ecuación de una recta en el plano xy . Así, podemos interpretar geoméricamente qué significa “resolver” un sistema de este estilo. En efecto, buscar el o los pares ordenados de números $(x; y)$ que cumplen ambas ecuaciones, geoméricamente se traduce a obtener el o los puntos de coordenadas $(x; y)$ que están en ambas rectas. Entonces para discutir cuántas soluciones a (S) posibles existen, analizamos: ¿Cuáles son las posiciones relativas entre dos rectas en el plano?.

Si la primer ecuación determina la recta r y la segunda, la recta s , tenemos:

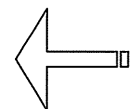


No hay más opciones que esas tres. Analíticamente esto significa:

- Si r y s son secantes, el sistema tiene una única solución $(x_F; y_F)$
- Si r y s son paralelas coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones.
- Si r y s son paralelas no coincidentes, el sistema no tiene solución.

A partir de esto podemos clasificar cada uno de los sistemas según la cantidad de soluciones que posea.

Cuando un sistema (S) tenga solución diremos que es **COMPATIBLE**. Cuando la solución sea única, será **DETERMINADO**, en cambio si son infinitas diremos que es **INDETERMINADO**.



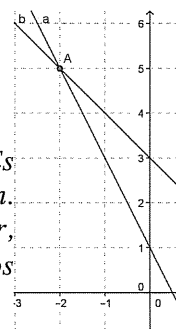
Cuando el sistema (S) no tenga solución diremos que es **INCOMPATIBLE**.

Práctica:

1. Resuelva los siguientes sistemas y clasifíquelos:

a.
$$\begin{cases} 2x + y = 1 & (E_1) \\ x + y = 3 & (E_2) \end{cases}$$

Resolución: Graficamos para “ver” y “aproximar” la solución. Es bastante claro que estamos frente a un sistema con única solución. Es decir, sistema compatible determinado. Podemos advertir, también que la solución será $(-2;5)$. Es más, podríamos “verificar” esta solución. En efecto:



En (E_1) : $2 \cdot (-2) + 5 = -4 + 5 = 1 \checkmark$

En (E_2) : $-2 + 5 = 3 \checkmark$

¿Cómo demostramos, analíticamente, que se tiene una única solución?

Veremos varios métodos analíticos para resolver sistemas, por lo pronto lo haremos con el denominado **MÉTODO POR SUSTITUCIÓN**, dicho método es de lo que más frecuentemente has utilizado. Consiste en “despejar” una de las incógnitas en función de la otra en una ecuación y usar esa igualdad en la otra ecuación, sustituyendo la incógnita. Así:

En (E_1) : $y = 1 - 2x$, sustituyo en (E_2) $x + y = 3 \Rightarrow x + (1 - 2x) = 3$. Con lo que tendremos $x + 1 - 2x = 3 \Rightarrow -x + 1 = 3 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow y = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$. En definitiva, tendremos que $x = -2$ e $y = 5$.

Entonces el conjunto solución será $S = \{(-2;5)\}$.

Otro método usualmente usado es el llamado **MÉTODO POR IGUALACIÓN**. Consiste en “despejar” la misma incógnita en función de la otra en ambas ecuaciones, y finalmente, por propiedad transitiva, igualar. Así, en nuestro sistema, por ejemplo, tendríamos:

En (E_1) : $y = 1 - 2x$

En (E_2) : $y = 3 - x$

Con lo que tendríamos: $y = 1 - 2x = 3 - x \Rightarrow 1 - 2x = 3 - x \Rightarrow x = -2$

b.
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

d.
$$\begin{cases} 5x - 2y = 31 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

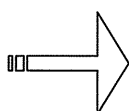
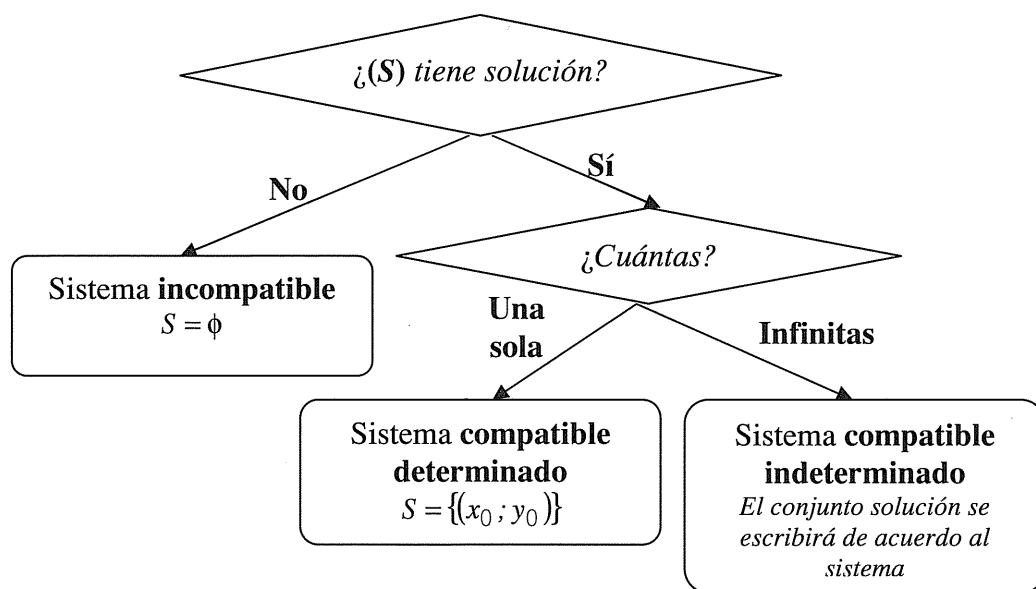
c.
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

e.
$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$$

Volvemos a los sistemas de ecuaciones lineales $m \times n$.

Vamos a generalizar lo dicho en sistema 2×2 acerca de las soluciones.

Dado un sistema: (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$, tendremos:



- Cuando los términos independientes son todos nulos, decimos que el sistema es **homogéneo**. Tiene la característica de ser siempre compatible por tener al menos como solución la solución trivial $(0,0;\dots,0)$.
- Dos sistemas son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto solución.
- Un sistema es escalonado es aquel en el cual cada ecuación, a partir de la segunda, empieza con, al menos, un coeficiente nulo

más que la anterior. Por ejemplo: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2y + z = 5 \\ 6z = 6 \end{cases}$

El procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones lineales es tratar de sustituirlos por sistemas equivalentes más sencillos. Los sistemas más sencillo son los escalonados. En el ejemplo de arriba podemos notar que de la última ecuación obtenemos $z = 1$, a partir de ahí vamos “subiendo escalones” para obtener x e y ; así en la segunda ecuación tenemos: $2y + 1 = 5 \Rightarrow y = 2$, “subimos” un escalón más y nos queda: $x + 2 + 1 = 3 \Rightarrow x = 0$; con lo cual el sistema del ejemplo resulta ser compatible determinado y su conjunto solución es $S = \{(0,2,1)\}$.

¿Cómo sabemos que sustituimos un sistema por otro equivalente?

Lo podremos asegurar en tanto apliquemos operaciones elementales a las ecuaciones que conforman el sistema.

A saber:

- Intercambiar ecuaciones
- Multiplicar las ecuaciones del sistema por un número real no nulo.
- Sumar ecuaciones
 - Las últimas dos se pueden resumir: cambiar una ecuación por una combinación lineal de otras.

A partir de esto podemos generalizar ciertos procesos ya que a veces ciertas modelizaciones de problemas (generalmente no matemáticos) necesitan de resoluciones de sistemas relativamente grandes. Es muy importante entonces, disponer de un método de resolución automático de tales sistemas de cuya realización se puede encargar, por ejemplo, un ordenador. Un procedimiento que conduzca con seguridad, paso a paso, de los datos de un problema a su solución se llama **Algoritmo**. El método de Gauss es un algoritmo muy simple para resolver casi cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Método de eliminación gaussiana

Intentemos escalar y resolver el siguiente sistema usando operaciones

$$\text{elementales: } (S) \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ 2x - y + 2z = 8 & (E_2) \\ 3x + 3y + 4z = 5 & (E_3) \end{cases}$$

(1) *Vamos a multiplicar (E_1) por 2, a eso le vamos a restar (E_2) , esta nueva ecuación la usamos para reemplazar (E_2) . Simbólicamente: $(E_1) \times 2 - (E_2) \mapsto (E_2)$*

$$\begin{array}{rcl} 2 \times (E_1): & 2x + 4y - 2z = -10 \\ (E_2): & 2x - y + 2z = 8 \\ \hline 2 \times (E_1) - (E_2): & 0x + 5y - 4z = -18 \end{array}$$

(2) *Vamos a multiplicar (E_1) por 3, a eso le vamos a restar (E_3) , esta nueva ecuación la usamos para reemplazar (E_3) . Simbólicamente: $(E_1) \times 3 - (E_3) \mapsto (E_3)$*

$$\begin{array}{rcl} 3 \times (E_1): & 3x + 6y - 3z = -15 \\ (E_3): & 3x + 3y + 4z = 5 \\ \hline 3 \times (E_1) - (E_3): & 0x + 3y - 7z = -20 \end{array}$$

(3) Nos queda este nuevo sistema S' equivalente a S

$$S' \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ 5y - 4z = -18 & (E_2) \\ 3y - 7z = -20 & (E_3) \end{cases}$$

(4) Ahora vamos a terminar el último escalón en la última ecuación. Para ello realizaremos lo siguiente: $(E_2) \times 3 - (E_3) \times 5 \mapsto (E_3)$:

$$\begin{array}{rcl} 3 \times (E_2): & 15y - 12z = -54 \\ 5 \times (E_3): & 15y - 35z = -100 \\ \hline 3 \times (E_2) - 5 \times (E_3): & 0y + 23z = 46 \end{array}$$

(5) Ahora sí nos queda el siguiente sistema escalonado equivalente a S' y por tanto a S :

$$S'' \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ 5y - 4z = -18 & (E_2) \\ 23z = 46 & (E_3) \end{cases}$$

De (E_3) y sabiendo que en estos casos la ecuación lineal tendrá única solución, obtenemos que $z=2$, “subimos” a (E_2) y obtenemos $y=-2$, finalmente en (E_1) nos queda $x=1$. Entonces el sistema S es compatible determinado y su conjunto solución es $S = \{(1, -2, 2)\}$.

Observando detenidamente el proceso aplicado en el ejemplo, notarás que en definitiva toda la información y las operaciones se realizan con los coeficientes y términos independientes. Teniendo en cuenta este hecho, podemos simplemente trabajar con ellos, armando una adecuada tabla y, para obtener las nuevas ecuaciones, resolveremos ciertos **determinantes 2×2** .

Algoritmo de Gauss

Vamos a resolver por este método el sistema que utilizamos para mostrar la eliminación gaussiana:

x	y	z	$t.i.$	
1	2	-1	-5	E_1
2	-1	2	8	E_2
3	3	4	5	E_3
-5	4		18	E_2'
-3	7		20	E_3'
-23			-46	E_3''

El número -5 de la fila de E_2' se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 2 \times 2 = -5$.

El número 18 de la misma fila se obtuvo del determinante: $\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - (-5) \times 2 = 18$.

Y así vamos obteniendo los distintos números, para completar dicha fila hacemos:

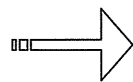
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - (-1) \times 2 = 4$$

Para obtener los números de la fila E_3' se va a obtener resolviendo determinantes armados con los números de la fila E_1 y E_3 . Siempre se usa la primer columna (la de x) y la otra columna corresponderá a la columna en la que esté ubicado el número.

Luego procedemos de igual manera con E_2' y E_3' quedándonos E_3'' .

Para armar el sistema escalonado usamos E_1 ; E_2' y E_3'' . Es decir, queda:

$$S'' \begin{cases} x + 2y - z = -5 & (E_1) \\ -5y + 4z = 18 & (E_2') \\ -23z = -46 & (E_3'') \end{cases}$$



Siempre debes tener en cuenta que el número que se ubica en la primer fila y primer columna del cuadro debe ser distinto de cero. En caso de que esto no suceda, intercambia ecuaciones!

Veamos más ejemplos:

I. $S \begin{cases} 7y - 17z = -21 \\ x - 3y + 7z = 10 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases}$ lo primero que debemos realizar es un intercambio entre la

primera y segunda ecuación (ya que en la primera el coeficiente de x es cero). Así las

cosas el sistema nos queda: $S \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \\ 5x - y + z = 8 \end{cases}$. Ahora escalonamos con Gauss:

x	y	z	$t.i.$	
1	-3	7	10	E_1
0	7	-17	-21	E_2
5	-1	1	8	E_3
	7	-17	-21	E_2'
	14	-34	-42	E_3'
	0	0	0	E_3''

$$\longrightarrow S \begin{cases} x - 3y + 7z = 10 \\ 7y - 17z = -21 \\ 0z = 0 \end{cases}$$

analizando la última ecuación notamos que hay infinitas soluciones. Cualquier valor real z la cumple. Entonces hacemos $z = \lambda$; $\lambda \in \mathbb{R}$, con lo que $y = -3 + \frac{17}{7}\lambda$, y luego $x = 1 + \frac{2}{7}\lambda$.

Tendremos entonces, por un lado, un sistema compatible INDETERMINADO, y por otro

su conjunto solución es: $S = \left\{ \left(1 + \frac{2}{7}\lambda, -3 + \frac{17}{7}\lambda, \lambda \right), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

II. $S \begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 2x - y + 15z = 3 \\ x - 8y - 21z = 11 \end{cases}$

x	y	z	$t.i.$
1	-3	-2	7
2	-1	15	3
1	-8	-21	11
	5	19	-19
	14	-34	4
	0		-35

$$\longrightarrow S \begin{cases} x - 3y - 2z = 7 \\ 5y + 19z = -19 \\ 0z = -35 \end{cases}$$

Analizando la última ecuación notamos que **NO HAY SOLUCIÓN**. Entonces estamos ante un sistema INCOMPATIBLE. Y su conjunto solución es $S = \emptyset$

Práctica

2. Resuelva cada uno de los sistemas y clasifíquelos:

$$\text{a. } S \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d. } S \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{g. } S \begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ -x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } S \begin{cases} 2x + y - z = 7 \\ x + 3z = 9 \\ 3x - y + 4z = 8 \end{cases}$$

$$\text{e. } S \begin{cases} v + 3w = 16 \\ 3u - v = -1 \\ 2u + w = 5 \end{cases}$$

$$\text{h. } S \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 6y - 5z = -4 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c. } S \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{f. } S \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\text{i. } S \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

3. Indique cuál de los tres conjuntos es el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales S. Justifique su elección y clasifique el sistema.

$$S \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$S_1 = \{(1, 1, 0)\}$$

$$S_2 = \emptyset$$

$$S_3 = \{(1, 1 - t, t) : t \in \mathbb{R}\}$$

4. Demuestra que el sistema $S \begin{cases} x - 2y + z = b_1 \\ 3x - y + 4z = b_2 \\ x + y + z = b_3 \end{cases}$ es compatible determinado cualquiera

sean los valores de b_1 , b_2 y b_3 .

5. Resuelva los siguientes problemas:

a. Tres hermanas Ximena, Yanina y Zoe suman sus edades y obtienen por resultado 39 años. Dentro de 5 años la edad de Zoe será las tres cuartas partes de la de Ximena. Se sabe también, que Yanina es cuatro años mayor que Zoe. ¿Cuántos años tienen actualmente cada una de las hermanas?

b. Calcule tres números sabiendo que la suma entre ellos 124 que si a la mitad del mayor le sumo una unidad obtengo el doble del más chico y si al triple del más chico le sumo los otros dos obtengo el número 160.

c. En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos: A, B y C. Un chico fue dos veces a A, una vez a B y una vez a C y gastó \$290; otro asistió tres veces a A y una vez a B y gastó \$360 y un tercero entró una vez a cada espectáculo, lo que le costó \$220. ¿Alguno de los tres espectáculos tenía entrada gratuita?

d. Un señor acertó 5 números de la lotería, dos de los cuales eran 23 y 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en 2 unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era 10 unidades menos que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

e. De una fiesta se van 21 chicas y quedan 2 varones por mujer. Más tarde se van 63 chicos y quedan 5 mujeres por cada varón. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio?

f. Andrea es 12 años mayor que su hermano Bruno. Dentro de 4 años Bruno tendrá dos terceras partes de la edad de Andrea. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

g. El sábado pasado una tienda vendió 45 camisetas de dos colores amarillo, blanco. Las blancas costaban \$150 cada una y las amarillas \$230, en total recaudaron \$7500. ¿Cuántas camisetas de cada uno de estos colores se vendieron el sábado?

e. De una fiesta se van 21 chicas y quedan 2 varones por mujer. Más tarde se van 63 chicos y quedan 5 mujeres por cada varón. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio?

SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTOS

Son sistemas no lineales porque algunas de sus ecuaciones no lo son. Un ejemplo de este estilo de sistema es el del ejemplo inicial del capítulo. Los métodos más frecuente para resolverlos son los de sustitución.

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 21 & (E_1) \\ x + y = 7 & (E_2) \end{cases}$$

Resolución: teniendo en cuenta que en (E_1) se tiene una diferencia de cuadrados a la izquierda del “igual”, la reescribo: $(x - y) \cdot (x + y) = 21$. Con lo que $(x - y) \cdot 7 = 21 \Rightarrow x - y = 3$ (E_3) . Con (E_3) y (E_2) armo un nuevo sistema de ecuaciones (en este caso lineal).

$\begin{cases} x - y = 3 & (E_3) \\ x + y = 7 & (E_2) \end{cases}$, el resultado de esto es $x = 5 \wedge y = 2$. Como los métodos utilizados no han sido operaciones elementales corresponde verificar si estos resultados son solución del sistema original.

Así en (E_1) : $5^2 - 2^2 = 21$ ✓ y en (E_2) : $5 + 2 = 7$ ✓

Por lo tanto la solución de dicho sistema será $S = \{(5; 2)\}$.

¡No hay clasificación de sistemas mixtos!

Práctica:

6. Resuelve el problema inicial del capítulo.

7. Resuelve el sistema $(S) \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$.

8. Encuentre el número fraccionario que es igual a $\frac{7}{3}$ cuando se suma 2 al numerador, e igual a $\frac{5}{4}$ cuando se aumenta en una unidad al denominador.

9. Resuelva los siguientes sistemas:

a.
$$\begin{cases} x^2 - 2x - 3 = -\frac{4}{3}y \\ y = \frac{3}{2} \cdot (x + 1) \end{cases}$$

sugerencia: puedes primero resolver gráficamente, notar que se tiene una función cuadrática y otra lineal.

b. $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y = 4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x + y = 6 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$

10. Calcule el valor del coeficiente k para que el sistema a continuación sea compatible indeterminado:

$$S \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + ky + 2z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

CAPÍTULO 9: POLINOMIOS

¿Recuerdas como sumabas en la primaria? ¿Y cómo multiplicabas?

$\begin{array}{r} + 2456 \\ 5231 \\ \hline 7687 \end{array}$	ó bien	$\begin{array}{r} + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \\ 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \\ \hline 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 \end{array}$
$\begin{array}{r} \times 2110 \\ 123 \\ \hline 6330 \\ + 4220 \\ 2110 \\ \hline 259530 \end{array}$	ó bien	$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 0 \\ \times 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \\ \hline 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0 \\ + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 \\ 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 \\ \hline 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0 \end{array}$

¡¡Con los polinomios sumaremos y multiplicaremos de la misma forma!!

Las expresiones como $5x^2y^3$; $(2+i)xy^3$; $5xyz^4$ o $2\pi r$ se denominan **monomios**. La característica principal es que entre los elementos involucrados (números y letras) sólo hay multiplicaciones. En el primer y segundo monomio decimos que tienen 2 variables (“x” e “y”), en el tercero tres (“x”, “y” y “z”), y en el cuarto una sola variable (“r”). Los números que aparecen son los coeficientes del monomio (en orden de aparición: 5; (2+i); 5; 2π).

La suma de varios monomios será un polinomio.

En particular trabajaremos en este capítulo con polinomios de una sola variable. Definamos:

Un polinomio en una variable es una expresión de la forma:

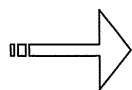
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde n es un número entero no negativo, x es la **variable** y los $n+1$ números: $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_1; a_0$ son llamados **coeficientes** del polinomio

Algunos ejemplos:

1) $p(x) = (1+i)x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2ix - 5$, en este caso $n=5$ y los coeficientes son: $(1+i); 2; 1; -1; 2i$ y -5 .

2) $p(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$, en este caso $n=4$ y los coeficientes son: $1; 0; -3; 1$ y 1 .



Cuando los coeficientes del polinomio sean números complejos, diremos que es “a coeficientes complejos” y simbolizaremos $\mathbb{C}[x]$ al conjunto de los polinomios con coeficientes complejos.

Si son todos números reales, diremos que es “a coeficientes reales” y simbolizaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de los polinomios con coeficientes reales.

Al número a_n se lo llama coeficiente principal y al a_0 término independiente.

Práctica:

1. Indique cuales de las siguientes expresiones son polinomios.:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a. $3x + 2$ | d. $x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{5}} - x + 1$ |
| b. $8^x - x^3 + 2x^2$ | e. $\sqrt{x} \cdot i + 2$ |
| c. $(1 + 2i)x^4 - x^2 + 3x - (1 + i)$ | f. $(x + 1)^2$ |

El símbolo sumatoria

Vamos a trabajar un poco con esta notación que suele ser tan práctica para escribir resumidamente algunos procesos de suma que posean en sus términos ciertas regularidades.

Por ejemplo, queremos describir la suma de los primeros 50 números naturales: $1 + 2 + 3 + \dots + 50$, en vez de poner esos “tres puntos suspensivos tan inquietantes, y si se quiere, rodeados de un poco de sospecha”, podemos usar el símbolo sumatoria, el mismo

se describe con la letra griega sigma: Σ . Aquí: $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \sum_{k=1}^{50} k$.

En este ejemplo vemos que iniciamos en 1 y terminamos en 50. Siempre pondremos el valor inicial abajo y el final arriba del símbolo Σ .

Otro ejemplo: queremos describir la suma de los primeros veinticinco cuadrados perfectos naturales, es decir $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2 = \sum_{k=1}^{25} k^2$

Práctica:

2. Escribe, en cada caso, utilizando el símbolo de sumatoria:

- a. La suma de los primeros 20 números pares.

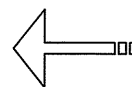
Resolución:

$$0 + 2 + 4 + \dots + 38 = 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 19 = \sum_{k=0}^{19} 2 \times k$$

- b. La suma de los primeros 30 cubos perfectos naturales

- c. $1 + 2 + 8 + 16 + \dots + 1024$

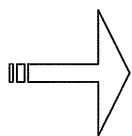
Investiga las distintas propiedades que tiene el uso de este símbolo. Notarás que todas tienen relación con el asunto de que lo estamos, en definitiva, haciendo son sumas.



Ahora que tenemos una mejor noción de lo que este símbolo representa, podemos reescribir al polinomio de una sola variable como sigue:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$$

La notación del polinomio como “ p de x ” no es caprichosa, en efecto, si $p \in \mathbb{R}[x]$, se tratará de una función real a valores reales.



- Cuando el polinomio tiene dos términos decimos que es un **binomio**.
- Cuando el polinomio tiene tres términos decimos que es un **trinomio**.
- Cuando el polinomio tiene cuatro términos decimos que es un **cuatrinomio**.

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos. Si el polinomio se reduce a un número decimos que es un polinomio **constante**, si dicho número NO es cero, decimos que el grado del polinomio es cero.

El polinomio constante igual a cero se llama **polinomio nulo** y carece de grado.

Un polinomio de grado uno se llama polinomio lineal (de hecho, se trata de una función lineal), y el polinomio de grado dos se llama polinomio cuadrático (es una función cuadrática)

Práctica

3. Completa

- $4x^6 + 2x^5 + 3x^3 - 1$ es un polinomio de grado.....y su coeficiente principal es.....
- $1 - i$ es un polinomio.....de grado.....
- $x - (2 + i)$ es un polinomio.....y su término constante es.....
- 0 es el polinomio..... y carece de.....

Igualdad de polinomios

Dos polinomios a coeficientes complejos son iguales si tienen igual grado y los coeficientes de los términos homólogos son iguales. En símbolos:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k ; q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow (n = m \wedge a_k = b_k ; k = 0, 1, \dots, n)$$

Práctica

4. Determine, en cada ítem, los valores de a , b , c y d de forma que $p(x) = q(x)$:

- $p(x) = (1 - i)x^4 - x^2 + 3x - 2 ; q(x) = (a + b)x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + d$
- $p(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - x^3 + \frac{3}{5}x + 6 ; q(x) = (a - b)x^5 + (a + b)x^4 + cx^3 + (c + d)x + 6$
- $p(x) = 2ix^3 - 3x^2 + 2x ; q(x) = (a - b)x^4 + bx^3 + (2c - d)x^2 + 2x + d$

5. Dado $p(x) = ix^4 + 5x^2 - x + (1 + i)$, obtenga: $p(0)$; $p(2i)$; $p(1 + i)$ y $p(2)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y Multiplicación

Veamos algunos ejemplos (notarás que son “procesos” conocidos)

$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6; \quad q(x) = x^4 + 10x^2 - x + 3, \quad r(x) = x^3 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) + (x^4 + 10x^2 - x + 3) = \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 + x^4 + 10x^2 - x + 3 = \\ &= (3x^4 + x^4) + (-2)x^3 + (5x^2 + 10x^2) + (x - x) + (6 + 3) = \\ &= 4x^4 + (-2)x^3 + 15x^2 + 0 + 9 \\ &= 4x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) + (-3)q(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) + (-3)(x^4 + 10x^2 - x + 3) = \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 + (-3)x^4 + (-3) \cdot 10x^2 - (-3)x + (-3) \cdot 3 = \\ &= (3x^4 + (-3)x^4) + (-2)x^3 + (5x^2 + (-30)x^2) + (x + 3x) + (6 - 9) = \\ &= 0x^4 + (-2)x^3 + (-25)x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^3 + (-25)x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Una forma relativamente rápida es resolver como hicimos con la suma de números naturales en el ejemplo inicial del capítulo. Así en el primer caso quedaría:

$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{r} p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 \\ q(x) = x^4 + 0x^3 + 10x^2 - x + 3 \end{array} \\ \hline p(x) + q(x) = (3+1)x^4 + (-2)x^3 + (5+10)x^2 + (1-1)x + (6+3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot r(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot (x^3 - 2x + 3) = \\ &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot x^3 + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot (-2x) + \\ &\quad + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot 3 \\ &= 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 6x^3 - 6x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 12x + \\ &\quad + 9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x + 18 \\ &= 3x^7 - 2x^6 - x^5 + 14x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 9x + 18 \end{aligned}$$

Más sencillo:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 \\ \times \quad \quad \quad x^3 - 2x + 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x + 6 \\ + \quad \quad \quad -6x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 12x \\ 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 6x^3 \end{array} \\ \hline 3x^7 - 2x^6 - x^5 + 14x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 9x + 6 \end{array}$$

A continuación, generalizaremos estos resultados:

Dados los polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$

• Definimos el polinomio **suma** de $p(x)$ y $q(x)$ al polinomio que se indica $p(x) + q(x)$ tal que:

*.Si $m=n$ entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

*.Si $m \neq n$ se puede suponer, sin perder generalidad, que $m > n$.

Entonces, llamando $p^*(x)$ a:

$$p^*(x) = 0x^m + 0x^{m-1} + \dots + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad \text{definimos:}$$

$$p(x) + q(x) = p^*(x) + q(x)$$

• El polinomio que se indica $p(x) \cdot q(x)$ es el polinomio **producto** cuyos términos son de la forma: $a_i b_j x^{i+j}$ donde $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

$$p(x) \cdot q(x) = a_n b_m x^{n+m} + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

Práctica

6. Indica qué propiedades de la suma y multiplicación de números complejos cumplen la suma y multiplicación de polinomios. ¿Existe el elemento recíproco de cualquier polinomio? (es decir, ¿todo polinomio tiene un polinomio recíproco?)

7. ¿Cómo definiría la resta de polinomios? (Recuerda la definición de resta de números complejos)

8. Resuelva, en cada caso determine el grado del polinomio resultante:

a. $(x^3 - 2x^2 + ix) \cdot (x - 2)^2$

b. $(x - 2i) \cdot (x + 2i) + 3x \cdot (x - 1 + i)$

c. $(x^4 - (2 + i)x^3 - x^2 + x + 1) \cdot x + 5x$

9. Enuncie la propiedad del grado del polinomio suma de dos polinomios, y del polinomio producto.

10. Justifique el enunciado: " $p(x) \times q(x) = 0 \Leftrightarrow (p(x) = 0 \vee q(x) = 0)$ "

11. Obtenga el valor de las constantes a y b de forma que $(3x^a - 2x^2 + x) \cdot (x + b) = 3x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$

División de polinomios

La división de polinomios tiene similitud con la división de números enteros.

¿Recuerdas cuando no conocías los números decimales?

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 4} \\ - 48 \\ \hline 2 \end{array}$$

Teníamos un cociente (12) y un resto (2), el resto debía ser siempre menor que el divisor (4). Para verificar que estaba bien resuelta la cuenta hacíamos:

$$12 \times 4 + 2 \text{ y eso debía darnos el dividendo (50)}$$

Cuando resolvamos la división de dos polinomios obtendremos un polinomio cociente y un polinomio resto, la condición que deberá cumplir este último es que sea nulo o su grado sea menor que el del divisor.

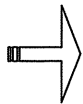
En general si tenemos un polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual al del polinomio $q(x)$ podremos realizar la división $p(x) \div q(x)$, obteniendo un polinomio cociente $c(x)$ y un polinomio resto $r(x)$.

Cumpléndose lo siguiente:

$$(*) \boxed{p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

Donde $gr[r(x)] < gr[q(x)]$ ó $r(x) \equiv 0$

La división será válida para toda $x / q(x) \neq 0$



Tener en cuenta que el grado del cociente será la resta de los grados de p y q

¿Cómo obtenemos los polinomios cociente y resto? Veamos lo que denominamos la "división clásica"

$$\bullet (2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2) \div (x^2 - 3x + 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ - 2x^4 - 6x^3 + x^2 \\ \hline 3x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \\ - 3x^3 - 9x^2 + 3x \\ \hline 11x^2 + 2x + 2 \\ - 11x^2 - 33x + 11 \\ \hline 35x - 9 \end{array}$$

El polinomio p en este caso está completo, sino debe completarse!

Cálculos auxiliares

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2 \quad \frac{3x^3}{x^2} = 3x$$

$$\frac{11x^2}{x^2} = 11$$

Tenemos entonces que:

$$c(x) = 2x^2 + 3x + 11 \text{ y}$$

$$r(x) = 35x - 9$$

$$\bullet (3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$$

Tenemos entonces que:

$$c(x) = 3x^3 + 6x + 4 \quad \text{y} \quad r(x) = -9$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \overline{) x^2 + 0x - 2} \\ - 3x^5 + 0x^4 - 6x^3 \\ \hline 6x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \\ - 6x^3 + 0x^2 - 12x \\ \hline 4x^2 + 0x - 17 \\ - 4x^2 + 0x - 8 \\ \hline -9 \end{array}$$

Cálculos auxiliares

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \quad \frac{6x^3}{x^2} = 6x$$

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Teniendo en cuenta lo que escribimos en (*) en la página 128, podemos reescribir:

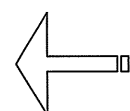
$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{ quedando entonces, en los ejemplos de la misma página:}$$

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 3x + 11 + \frac{35x - 9}{x^2 - 3x + 1}$$

$$\frac{3x^5 + 4x^2 - 12x - 17}{x^2 - 2} = 3x^3 + 6x + 4 + \frac{-9}{x^2 - 2}$$

Como vemos en estas expresiones, la división entre polinomios no siempre nos devuelve un polinomio (como la división entre dos números naturales no tiene porque dar un número natural!). Para que esto suceda el resto deberá ser cero... ¿No te resulta conocido esto?

Cuando al dividir un polinomio p por otro polinomio q el resto de dicha operación resulte ser cero, diremos que p es divisible por q , también se dice que p es múltiplo de q , o que q divide a p .



Práctica

12. Indica, en cada caso, si el polinomio p es divisible por el polinomio q :

a. $p(x) = x^2 + 8x - 12$ y $q(x) = x - 5$

b. $p(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 6i$ y $q(x) = x^2 + x + 1$

c. $p(x) = 2x^5 + x^4 + (-2 - 7i)x^3 - (1 + i)x^2 + (25i - 25)x$ y $q(x) = x^2 - (1 + i)$

Cuando el divisor tenga la forma $x - \alpha$, donde $\alpha \in C$, el resto será un resto numérico.

Además tenemos al alcance otro procedimiento para obtener el cociente y resto, dicho procedimiento es la denominada **“Regla de Ruffini”**

A continuación veremos el paso a paso de cómo se utiliza esta regla.

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x - 12}{x - 3}$$

1º. Escribimos el dividendo en potencias decrecientes de x . Luego listamos todos los coeficientes de cada término en el dividendo. Si falta alguno, de cualquier exponente (menor al grado, claro está), se pone como coeficiente 0.

En nuestro ejemplo, los coeficientes son: 2; -5; 1 y -12

2º. Al dividir entre un binomio de la forma $x - \alpha$, colocamos α a la izquierda de los coeficientes y una fila más abajo.

Así:

2	- 5	1	- 12
3			

3º. En la tercera fila, debajo de la horizontal trazada copiamos el primer coeficiente.

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & \downarrow & & & \\ 3 & 2 & & & \end{array}$$

4º. Multiplicamos este número por α , lo colocamos debajo del segundo coeficiente y los sumamos al mismo.

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & + & & \\ 3 & 2 & 6 & & \end{array}$$

5º. Repetimos este proceso hasta el último coeficiente inclusive, es decir hasta el término independiente:

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & 6 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

6º. El número que se ubica en la última columna y fila es el resto de la división

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & 6 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

7º. Los otros números de la última fila constituyen los coeficientes del polinomio cociente, que tendrá un grado menos que el polinomio dividendo.

Entonces en nuestro ejemplo tenemos:

$$c(x) = 2x^2 + 1x + 4 = 2x^2 + x + 4$$

$$r(x) = 0$$

En definitiva, tenemos que:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x - 12}{x - 3} = 2x^2 + x + 4 + \frac{0}{x - 3} = 2x^2 + x + 4$$

Ejemplos:

i. $\frac{5x^4 + x^2 + 3x + 4}{x - 2} = 5x^3 + 10x^2 + 21x + 45 + \frac{94}{x - 2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ & & 10 & 20 & 42 & 90 \\ 2 & 5 & 10 & 21 & 45 & 94 \end{array}$$

ii. $\frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1}{x + 2} = 2x^2 - 5x + 13 - \frac{25}{x + 2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ & & -4 & 10 & -26 \\ -2 & 2 & -5 & 13 & -25 \end{array}$$

$$\text{iii. } \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1}{x + i} = 2x^2 - (1 + 2i)x + 1 + i + \frac{2 - i}{x + i}$$

2	-1	3	1
	-2i	-2 + i	1 - i
-i	2	-1 - 2i	2 - i

$\mathcal{R}$

Práctica

13. En cada caso, encuentre los polinomios cociente y resto:

- | | |
|--|--|
| <p>a. $(3x^4 - 2x^2 + 5x + 1) \div (x - 2)$</p> <p>b. $(x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x) \div (x - 1)$</p> <p>c. $(x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2) \div (x + 1)$</p> | <p>d. $(x^4 + x^3 + ix^2 + x + 1) \div (x - i)$</p> <p>e. $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x - (1 + i))$</p> <p>f. $(x^5 + 1) \div (x - 1)$</p> |
|--|--|

14. Dado el polinomio p , obtenga el valor numérico que se pide:

- | | |
|--|---|
| <p>a. $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 1$; $p(2)$</p> <p>b. $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x$; $p(1)$</p> <p>c. $p(x) = x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2$; $p(-1)$</p> | <p>d. $p(x) = x^4 + x^3 + ix^2 + x + 1$; $p(i)$</p> <p>e. $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$; $p(1 + i)$</p> <p>f. $p(x) = x^5 + 1$; $p(1)$</p> |
|--|---|

→ Si observas detenidamente, los polinomios p indicados en cada ítem son los mismos que figuran como dividendo en el ejercicio 13. Compara los restos obtenidos en el ejercicio 13 con los valores numéricos que obtuviste recién. ¿Puedes conjeturar alguna propiedad?

Lo observado en este ejercicio no es casual, en efecto, tomando el primer ítem del 13, tenemos que el cociente es: $c(x) = 3x^3 + 6x^2 + 10x + 25$ y el resto es 51. Con lo cual podríamos reescribir el dividendo de la siguiente forma:

$$p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 1 = (3x^3 + 6x^2 + 10x + 25) \cdot (x - 2) + 51.$$

Entonces:

$$p(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = (3 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 25) \cdot (2 - 2) + 51 = 0 + 51 = 51$$

Esta conjetura se generaliza en el denominado *Teorema del Resto*.

Teorema del resto

El **resto** de la división de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$; con $\alpha \in \mathbb{C}$ es igual a $p(\alpha)$.

Demostración:

Al dividir el polinomio p por otro de la forma $x - \alpha$, se obtiene un cociente $c(x)$ y un resto (numérico) r . Y podemos reescribir al polinomio p como:

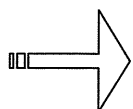
$$p(x) = c(x) \cdot (x - \alpha) + r.$$

Entonces, al reemplazar x por α nos queda:

$$p(\alpha) = c(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + r = c(\alpha) \cdot 0 + r = 0 + r = r$$

Raíces de un polinomio

Un número complejo α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si $p(\alpha)=0$.



Entonces, cuando resolvíamos ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, encontrábamos las raíces del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$

Relacionando todo lo que hemos aprendido hasta ahora sobre división de polinomios, podemos afirmar que:

Un número complejo α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(x)$ es **divisible** por $x - \alpha$

Práctica:

15. Determine el valor de la constante k , de modo que 2 sea raíz del polinomio $p(x) = x^4 + 3kx^3 - 6x^2 - 12$

16. Determine el valor de la constante k , de modo que el resto de dividir $p(x) = kx^3 - 4x^2 + 6x - 1$ por $q(x) = x - 3$ dé 62.

17. Realice varios ejemplos y, a partir de ellos, conjeture para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, el polinomio p resulta divisible por q .

$p(x)$	$q(x)$	$p(x)$ divisible por $q(x)$ para n
$x^n + a^n$	$x + a$	
$x^n + a^n$	$x - a$	
$x^n - a^n$	$x + a$	
$x^n - a^n$	$x - a$	

Esta ecuación se llama ECUACIÓN POLINÓMICA

18. Halle las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$. Sugerencia: Recuerda la condición de anulación del producto y factoriza el polinomio.

19. El polinomio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene sus coeficientes reales y positivos. Si este polinomio admite una raíz real, ¿cuál es su signo?

20. Demuestre que los polinomios $p(x)$ y $q(x) = k \cdot p(x)$, con k constante, tienen las mismas raíces.

Resolución:

Si α es raíz de p , significa que $p(\alpha) = 0$, entonces $q(\alpha) = k \cdot p(\alpha) = k \cdot 0 = 0$. Luego α es raíz de q .

Una forma de "verificar" las raíces reales de un polinomio es usando geogebra para graficar la función polinómica y viendo su intersección con el eje x

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Nuestros esfuerzos a continuación estarán focalizados en poder factorizar un polinomio, hemos visto en capítulos anteriores cómo factorizar una expresión algebraica con algunos métodos (factor común, trinomio cuadrado perfecto, y más), éstos serán válidos para polinomios también, pero a ellos sumaremos cuestiones relacionadas con la división.

Por eso es necesario analizar cuáles son las raíces de un polinomio, cuántas tiene. En el proceso de búsqueda de raíces serán de utilidad las propiedades que veremos a continuación. Tener en cuenta también que la Regla de Ruffini (conociendo además el Teorema del Resto) es una herramienta práctica para determinar si un número dado resulta raíz del polinomio o no.

Teorema Fundamental del Álgebra

Un polinomio $p(x)$, tal que $\text{gr}[p(x)] > 0$, admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$

Este teorema permite probar que todo polinomio de grado $n > 0$, tiene exactamente n raíces (no necesariamente distintas) y además se puede descomponer, de forma única, en producto de n factores.

Orden de multiplicidad de una raíz

α es raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$, si el mismo es divisible por $(x - \alpha)^k$ y no por $(x - \alpha)^{k+1}$

Teorema de la descomposición factorial

Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo, admite una única descomposición en factores de la forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_j)^{k_j}$$

Donde $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_j$ son j raíces distintas del polinomio y $k_1; k_2; \dots; k_j$ sus respectivas multiplicidades (por lo que $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$)

Ejemplos

- i. El polinomio $p(x) = 4x^2 + 8x - 12$ tiene las raíces 1 y -3 (se encuentran con la resolvente), entonces queda: $p(x) = 4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$
- ii. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 1$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 1^3 - 1 = 0$. Al dividir p por el polinomio $x - 1$, se obtiene el cociente $c(x) = x^2 + x + 1$. Con lo cual nos

queda el polinomio $p(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$. Debido a que uno de los factores es cuadrático podemos encontrar sus raíces usando resolvente. Las raíces de $c(x) = x^2 + x + 1$ son $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, con lo cual $c(x) = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$.

Así, entonces, el polinomio p queda factorizado de la siguiente forma:

$$p(x) = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot (x - 1)$$

iii. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$. Nos queda entonces: $p(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$. Luego, como en el ejemplo anterior, con la resolvente obtenemos las raíces de $x^2 - x - 6$, que son -2 y 3.

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 & \\ 1 & & 1 & -1 & -6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Así, nos queda factorizado: $p(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)$

iv. Sea el polinomio $p(x) = 3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 9x - 6$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 3 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 0$. Así nos queda: $p(x) = (3x^3 - 6x^2 - 3x + 6) \cdot (x - 1)$. El cociente también tiene como raíz a 1, y queda:

$$3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = (3x^2 - 3x - 6) \cdot (x - 1)$$

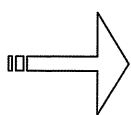
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & -9 & 3 & 9 & -6 \\ 1 & & 3 & -6 & -3 & 6 \\ \hline & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & & 3 & -3 & -6 & \\ \hline & 3 & -3 & -6 & 0 & \end{array}$$

Ahora tenemos un polinomio cuadrático $3x^2 - 3x - 6$, usando resolvente tenemos como raíces a 2 y -1, entonces $3x^2 - 3x - 6 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$.

Finalmente el polinomio p queda:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)^2$$

Tenemos ahora que las raíces de p son 2, -1 y la raíz 1 es de multiplicidad 2.



Como habrás notado en los ejemplos se hacen todos los esfuerzos para llegar a un polinomio cuadrático, al cual le podemos encontrar las raíces (sean de la naturaleza numérica que sea) usando una fórmula simple como es la resolvente.

Ahora bien, en estos últimos ejemplos detectamos a la raíz 1 rápidamente, porque, en definitiva, es fácil hacer “las cuentas” con este número. Pero no siempre es así.

Veremos algunos métodos para encontrar distintas raíces. Desde ya te vamos advirtiendo que no siempre podremos detectar todas las raíces de un polinomio cuando este no sea cuadrático.

Práctica

21. Dado el polinomio $p(x) = x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 28x + 60$, se sabe que 2 es raíz de multiplicidad doble. Factoriza de forma completa al polinomio p .

22. En cada caso, escribe el polinomio p dado:

a. Es de grado 3, tiene como coeficiente principal a 2 y sus raíces son 1; -3 y 5

b. Es de grado 3, sus raíces son 1; 3 y -1, y $p(5) = 10$.

Resolución: $p(x) = a_3 \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+1)$, esto lo pudimos escribir usando el dato que teníamos de las raíces del polinomio, para obtener el coeficiente principal usaremos el dato restante. $p(5) = a_3 \cdot (5-1) \cdot (5-3) \cdot (5+1) = 48a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$

$$\text{Luego } p(x) = \frac{5}{24} \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+1) = \frac{5}{24}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{24}x + \frac{5}{8}.$$

c. Es de grado 3, sus raíces son 2; 1 y -2, y $p(-1) = 6$.

23. Simplifique cada una de las expresiones

a. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

Resolución:

Factorizamos numerador y denominador. Éste último lo podemos resolver desde el capítulo 2, en efecto es un trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

El numerador, en cambio, se ajusta a lo último visto, en efecto se puede “ver” que 2 es una raíz de $x^3 - 8$, con Ruffini encontramos el polinomio cociente $x^2 + 2x + 4$, a su vez las raíces de éste son $-1 \pm i$. Finalmente: $x^3 - 8 = (x-2) \cdot (x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))$

Ahora que tenemos numerador y denominador factorizados, reescribimos la fracción y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 4} &= \frac{(x-2) \cdot (x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))}{(x-2)^2} = \frac{(x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))}{x-2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 4}{x-2} \end{aligned}$$

c. $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

POLINOMIOS A COEFICIENTES REALES

Cuando se tenga un polinomio a coeficientes reales, y éste admita una raíz compleja, entonces admite también como raíz a su conjugada.

-Como habrás notado en los ejemplos de las páginas 133 y 134 que eran todos polinomios a coeficientes reales-

En símbolos:

$$\text{Si } p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in R[x] \text{ y } \alpha \in C \text{ es raíz de } p, \\ \text{entonces } p(\bar{\alpha}) = 0$$

Demostración:

Como $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, y $\alpha \in C$ es raíz, se

tiene $p(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0$, entonces

$$p(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^n a_k \bar{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{\alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = \bar{0} = 0$$

Práctica

24. Obtenga la descomposición factorial del polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 26x - 24$, sabiendo que una de sus raíces es $-1 - i$.

25. Obtenga el polinomio a coeficientes reales de menor grado posible que admite como raíces a $2 + i$, 3 de multiplicidad 2 y 5 como raíz simple. También se sabe que el coeficiente principal es 1.

26. Determine el valor de β para que el polinomio p sea a coeficientes reales. *Sugerencia:* evite hacer cálculos innecesarios. $p(x) = (x - (2 + i))(x - \beta)(x + 2)^3$

POLINOMIOS A COEFICIENTES ENTEROS

Para polinomios cuyos coeficientes son todos números enteros tenemos una forma de detectar posibles raíces racionales del mismo. Dicho método es debido a Gauss.

Teorema de Gauss

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in Z[x]$ admite la raíz $\frac{p}{q}$ con p y q enteros coprimos y $q \neq 0$, entonces:

- a_0 es múltiplo de p
- a_n es múltiplo de q

Con este método tenemos una herramienta para “empezar” la búsqueda de las raíces de un polinomio dado (a coeficientes enteros)

Veamos cómo con un ejemplo:

Sea $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 27x - 18$. Como se trata de un polinomio a coeficientes enteros es posible aplicar el Teorema de Gauss; entonces;

Divisores de $a_0 = -18$: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18$

Divisores de $a_n = 2$: $\pm 1; \pm 2$

Posible raíces racionales: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{9}{2}; \pm \frac{1}{2}$

$\alpha_1 = -1$ es raíz, pues $P(-1) = 0$.

Con esto sabido, aplicamos Ruffini para obtener el cociente, que será cuadrático y para hallar sus raíces, por tanto, usaremos resolvente.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -27 & -18 \\ -1 & & -2 & 9 & 18 \\ \hline & 2 & -9 & -18 & 0 \end{array}$$

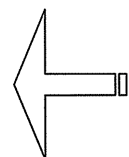
Las raíces de $2x^2 - 9x - 18$ son $-\frac{3}{2}$ y 6 .

Así, el polinomio factorizado queda

$$p(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot (x - 6) \cdot (x + 1)$$

Sea un polinomio $P(x)$ a coeficientes enteros:

- Si el coeficiente principal es 1 y P tiene raíces racionales, éstas serán enteras.
- Si p es un divisor del término independiente y q lo es del coeficiente principal, $\frac{p}{q}$ no necesariamente será raíz del polinomio P .
- Si el término independiente es cero, entonces una raíz del polinomio es cero.



Práctica

27. Calcule las raíces de los polinomios y factorice:

a. $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$

b. $s(x) = 2x^3 + 5x^2 - 23x + 10$

c. $h(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$

d. $q(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 12x + 4$

Funciones Racionales

Llamaremos Función Racional a aquella cuya fórmula es el cociente entre dos polinomios. Es decir:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ donde } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios.}$$

El dominio de definición de una función racional es de todos los valores reales tales que $q(x) \neq 0$.

Polinomio Mínimo común múltiplo de varios polinomios

Será aquel polinomio de menor grado posible que es simultáneamente divisible por cada uno de ellos.

Práctica

28. Encuentre el mínimo común múltiplo, en cada caso.

a. $x^2 - 1$; $x^2 - 2x + 1$ y x

Resolución:

Primero se debe factorizar a cada uno de los polinomios, así:

$$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = x$$

Así, el polinomio mínimo común múltiplo es $(x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot x$

b. $x^2 - 9$; $x^2 + 6x + 9$

c. $x^2 - 4$; $x - 2$ y x^2

Operaciones con funciones racionales.

Multiplicación

Veamos con un ejemplo:

$$\frac{x-2}{3x} \cdot \frac{x^2-5x}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2) \cdot (x^2-5x)}{3x \cdot (x^2-7x+10)} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot x \cdot \cancel{(x-5)}}{3 \cdot x \cdot \cancel{(x-2)} \cdot \cancel{(x-5)}} = \frac{1}{3}$$

Para multiplicar, usaremos la siguiente regla: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, donde $b \neq 0 \wedge d \neq 0$

Y realizaremos el siguiente proceso:

1. Usamos la regla para multiplicar
2. Factorizamos numerador y denominador
3. Cuando sea posible, simplificamos.

División

Veamos con un ejemplo para recordar

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x + 2}{x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x}{x + 2} = \frac{(x^2 - 4) \cdot x}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot x}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(x - 2) \cdot x}{x + 1}$$

Suma y resta

Veamos con ejemplos:

i.
$$\frac{x+1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = \frac{x+1}{(x-3) \cdot (x+3)} + \frac{x}{x+3} = \frac{(x+1) + x \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x+3)} =$$

$$= \frac{x+1+x^2-3x}{(x-3) \cdot (x+3)} = \frac{x^2-2x+1}{(x-3) \cdot (x+3)}$$

Descomponer en factores los denominadores

Denominador común: mínimo común múltiplo

Las igualdades son válidas en tanto $x \neq -3$ y $x \neq 3$

ii.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x^2-1} &= \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{(x+1) \cdot (x^2-1) - x \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \\ &= \frac{x^3 + x^2 - x - 1 - x^3}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

Las igualdades son válidas en tanto $x \neq -1$; $x \neq 1$ y $x \neq 0$.

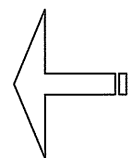
Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad c \neq 0 \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}; \quad c \neq 0$$

Entonces cuando se suman (o restan) funciones racionales con denominador común, lo que debemos hacer es sumar (o restar) los numeradores.

En caso de ser posible se simplifica.

Cuando no el denominador no sea común a todos los términos, entonces, se debe obtener. Para ello tener en cuenta que el “más” sencillo para adoptar como denominador común es el polinomio mínimo común múltiplo de los polinomios denominadores de cada uno de los términos.



Práctica

29. Resuelva las operaciones indicadas:

a.
$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1}$$

b.
$$\frac{2}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{c. } 3 - \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{d. } \frac{x^3}{x^3 - 1} \div \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{e. } \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x^2}{x^3 + 8}} \times \frac{1}{x}$$

$$\text{f. } \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + 3x + 6}$$

30. En cada caso encuentre los valores de las constantes reales A, B y C.

$$\text{a. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{5x+1}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

$$\text{b. } \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{5x^2+3x+4}{(x^2+1) \cdot (x+1)}$$

Resolución:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{(Ax+B) \cdot (x+1) + C(x^2+1)}{(x^2+1) \cdot (x+1)} = \frac{5x^2+3x+4}{(x^2+1) \cdot (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ax+B) \cdot (x+1) + C(x^2+1) = 5x^2 + 3x + 4 = (A+C)x^2 + (A+B)x + (B+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=5 \\ A+B=3 \Rightarrow A=2; B=1; C=3 \\ B+C=4 \end{cases}$$

$$\text{c. } \frac{A}{x-1} - \frac{B}{x+1} = \frac{3-x}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

$$\text{d. } \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{3x^2+5x+4}{(x^2+x+1) \cdot (x+2)}$$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones. Verifica los resultados

$$\text{a. } \frac{(x-2)^2}{x-1} + 3 = \frac{x+1}{x-1}$$

Resolución:

$$\left[\frac{(x-2)^2}{x-1} + 3 \right] \cdot (x-1) = x+1 \Rightarrow (x-2)^2 + 3 \cdot (x-1) = x+1$$

$$x^2 - 4x + 4 + 3x - 3 = x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\text{Ahora se debe verificar: } x=0: \frac{(0-2)^2}{0-1} + 3 = -4 + 3 = -1 = \frac{0+1}{0-1} \checkmark$$

$$x=2: \frac{(2-2)^2}{2-1} + 3 = 0 + 3 = 3 = \frac{2+1}{2-1} \checkmark$$

Rta.: $x=0, x=2$

$$\text{b. } \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{c. } \frac{x+1}{x} = 2 - \frac{x-1}{x}$$

AUTOEVALUACIONES

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 1

1. Dados los siguientes conjuntos por comprensión, escríbalos por extensión:

$$A = \{x / x \text{ es un número real y } x^2 = 0\}$$

$$B = \{x / x \text{ es una letra de la palabra "matemática" y no es vocal}\}$$

2. Expresa los siguientes conjuntos por comprensión:

$$C = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$$

$$D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\}$$

3. Dados los conjuntos $U = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge -10 < x < 15\}$ $A = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 10\}$
y $A = \{x / x \in \mathbb{Z} \wedge x \geq -4\}$

a. Calcula $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $\overline{A}$

b. Indique verdadero o falso (V o F), según corresponda:

i. $A \subset B$

iv. $0 \in A$ y $0 \in B$

ii. $A \in U$ y $B \in U$

v. $-5 \notin B$

iii. $(A \cap B) \subset B$

vi. $\{-4\} \subset B$

4. A la entrada de la escuela, se les aplicó a 156 niños una encuesta respecto a sus juguetes favoritos. La encuesta arrojó los siguientes resultados:

▪ A 52 niños les gustaba la pelota; a 63 les gustaban los autos; a 87 les gustaban los videojuegos.

▪ Además algunos de ellos coinciden en que les gustaba más de un juguete: 26 juegan con la pelota y autos; 37 juegan con autos y videojuegos; 23 juegan con la pelota y los videojuegos; por último 7 expresaron su gusto por los tres.

a) ¿A cuántos niños les gusta otro juguete no mencionado en la encuesta?

b) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con los videojuegos?

c) ¿A cuántos niños les gusta solamente jugar con la pelota?

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 2

1. Resuelve, racionalizando los denominadores cuando corresponda y simplifique:

a. $\frac{(-2)^3 \cdot \sqrt{144}}{3 - \sqrt{3}} =$

c. $\frac{25}{\sqrt[3]{5}} + \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4} - \frac{1}{\sqrt{5}} =$

b. $\frac{3\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - \sqrt{45}}{3 - \sqrt{5}} =$

d. $\left(25 \cdot 5^3 + 5^5\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^{-9} =$

2. Resuelve los siguientes logaritmos, aplicando propiedades:

a) $\log_2 \left(\frac{\sqrt[3]{16} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3}{\sqrt[3]{2}} \right)$

b) Si $\log m = \log n = 1$ halle $\log \sqrt[3]{\left(\frac{m+n}{m \cdot n}\right)^2}$

3. Simplifica las siguientes expresiones indicando las restricciones de la variable:

a) $\frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

b) $\frac{x^3 - 4x}{x^3 + 2x^2}$

c) $\frac{6x^2 + 24x + 24}{2x^2 - 8}$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente su conjunto solución:

a) $6\left(\frac{x+1}{8} - \frac{2x-3}{16}\right) \geq 3\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{8}(2x-2)$

b) $\left|2 - \frac{3}{5}x\right| \geq |-3|$

c) $|9x-3| \leq 1$

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 3

1. Resuelve las siguientes operaciones:

a. $-1 + i - \overline{(-3i + 2)} + \frac{1}{2}i^5 =$

b. $\frac{i^{151} - i}{3 - 2i} + \sqrt{-16} =$

2. Hallar el valor de “a” para que z sea real : $z = \frac{a + 3i}{2 - 5i}$

3. ¿Cuánto ha de valer x, real, para que $(2 + xi)^2$ sea imaginario puro?

4. Calcule x e y en la siguiente expresión:

$$2x - 4yi = \frac{(3 + 2i) \cdot (2 - i)}{1 + i}$$

5. Siendo $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 4 - 3i$ y $z_3 = -1 - 2i$ Calcular:

a. $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$

b. $\frac{z_1^2}{-z_3}$

c. $(z_2 - z_1)^2 + \frac{z_3}{2}$

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 4

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{3(x-4)}{2} + \frac{5(2x+1)}{3} = \frac{\sqrt{4}x}{4}$

b. $\frac{3(2x-4+x)}{2} - \frac{5(2x-1)}{3} = \frac{2(x-3)}{4}$

c. $\frac{x^2 - x - 4}{4} = \frac{x^2 + 2x - 2}{2}$

d. $18 = 6x + x(x-13)$

e. $3x^2 + 2x + 4 = 10$

f. $x^4 + 16x^2 = 17x^2$

g. $x + \sqrt{5x+10} = 8$

h. $x - \sqrt{169 - x^2} = 17$

2. Halla el valor de k y q, de modo que el producto de las raíces de la ecuación

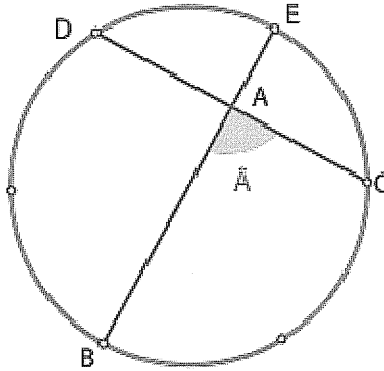
$3kx^2 - qx - 9 = 0$ sea -3 y su suma 4.

3. Resuelve el problema:

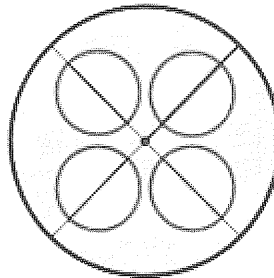
Se mezclan 40 litros de alcohol de 90% de pureza con X litros de alcohol al 50% y 30 litros al 80% de pureza. Halle X si se sabe que la mezcla tiene 75% de pureza.

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 5

- 1) La circunferencia de la figura se ha dividido en 6 partes iguales, calcula la medida del ángulo interior A.



- 2) Determinar el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de longitud 18.84 m.
- 3) A un hexágono regular 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Hallar el área de la corona circular así formada.
- 4) Calcula el área de la parte sombreada, si el radio del círculo mayor mide 6 cm y el radio de los círculos pequeños miden 2 cm.



- 5) La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de radio 50 m. Si restaurarla tiene un coste de \$300 el m^2 , ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?
- 6) Calcula el área lateral, el área total y el volumen de un prisma cuya base es un rombo de diagonales 12 y 18 cm.

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 6

1) Sabiendo que $\sec \alpha = 2$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, calcular las restantes razones trigonométricas.

2) Comprobar las identidades:

a) $\operatorname{ctg}^2 a = \cos^2 a + (\operatorname{ctg} a \cdot \cos a)^2$

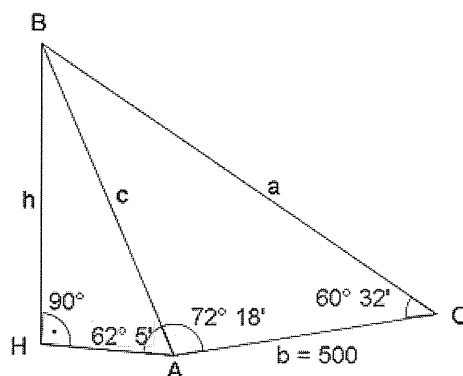
b) $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \frac{1}{\sin^2 a \cdot \cos^2 a}$

c) $\sin b \cdot \cos(a-b) + \cos b \cdot \sin(a-b) = \sin a$

d) $\operatorname{ctg}(a+b) = \frac{\operatorname{ctg} a \cdot \operatorname{ctg} b - 1}{\operatorname{ctg} a + \operatorname{ctg} b}$

e) $\frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x} + \frac{\operatorname{ctg}^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - 1} = \frac{1}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

3) Calcula la altura, h, de la figura:



4) Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\frac{\sin^2 x \cdot (1 + \cos x)}{1 - \cos x}$

b) $\frac{\cos x}{\operatorname{tg} x \cdot (1 - \sin x)}$

5) Se quiere medir la altura de una estatua colocada en el centro de un lago circular. Para ello, se mide la visual al extremo superior de la estatua desde el borde del lago y resulta ser de 50° ; nos alejamos 45 dm y volvemos a medir la visual, obteniendo un ángulo de 35° . Averigua la altura de la estatua y la superficie del lago.

6) Dos torres de 198 m y 203 m de altura están unidas en sus puntos más altos por un puente bajo el cual hay un río. Calcula la longitud del puente y la anchura del río sabiendo que el ángulo que hay entre el puente y la torre más alta es de 75° .

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 7

- 1) Por el alquiler de un coche cobran \$100 diarios más \$ 0.30 por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el costo diario con el número de kilómetros y represéntala.

Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar? Y si otro cliente abona \$266.50. ¿Cuántos kilómetros hizo?

- 2) Dada las siguientes funciones: $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$ y $g(x) = \frac{\sqrt{4 - 3x}}{x}$

Para cada una de ellas;

- a) Indique su dominio
- b) Indique los puntos donde la función interseca a los ejes coordenados.

- 3) Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x \leq -3 \\ x^2 & \text{si } -3 < x < 2 \\ |x+2| & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

- a) Indique su dominio
- b) Represente gráficamente
- c) Indique cuál es la imagen de 2 y la o las pre imágenes de 0

- 4) Resuelve las inecuaciones:

a) $\frac{x-5}{x} \leq 0$

b) $-3 \cdot (x+2) \cdot (x-3)^2 \leq 0$

c) $\left| \frac{2x}{x+1} \right| > 0$

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 8

- 1) El perímetro de un rectángulo es 28 m y la diagonal excede en 2 m al lado mayor. Hallar el área del rectángulo.
- 2) Calcula las edades de dos hermanos, sabiendo que la edad de uno es el triple que la del otro, y que de aquí a 5 años la suma de las dos edades será el triple de la edad actual del más grande.
- 3) Hallar un número de dos cifras sabiendo que el doble de las decenas más las unidades es 8 y el producto del número con el que resulta de invertir sus cifras es 736.
- 4) El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de \$ 500 (sin impuestos). El valor del vino es \$ 60 menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por El vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de \$592.4, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.
- 5) Discutir y resolver el sistema cuando sea compatible.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ kx + 5y - 4z = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

- 6) Estudiar el siguiente sistema según los distintos valores de a y b.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases}$$

AUTOEVALUACIÓN al Capítulo 9

- 1) Dados los siguientes polinomios:

$$p(x) = 3x^2 + 5x^4 - i = 0$$

$$q(x) = -x^6 + 4x$$

$$r(x) = -2ix + 1$$

$$s(x) = x + 3i$$

Calcule:

a) $p(x) + q(x) - s(x)$

b) $p(x) : s(x)$

c) $[q(x) : r(x)] \cdot s(x)$

- 2) Calcule el cociente y el resto de cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^5 + 7x^3 - 5x + 1) : (x^3 + 2x)$

b) $(x^3 - 5x^2 + x) : (x^2 - 1)$

- 3) Hallar a y b para que el polinomio $x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

- 4) Hallar un polinomio de cuarto grado que sea divisible por $x^2 - 4$ y se anule para $x = 3$ y $x = 5$.

- 5) Calcular el valor de a para que el polinomio $x^3 - ax + 8$ tenga la raíz $x = -2$, y calcular las otras raíces.

- 6) Calcule:

a) $\frac{3x-3}{x^2} + \frac{3x}{18 \cdot (x-1)} =$

b) $\left(\frac{1}{4x-2} + \frac{x+1}{x^2-2x+1} \right) : \frac{1}{2x} - \frac{3}{x-1} =$

c) $\frac{2a^2-3}{10a+10} - \frac{a+1}{50} - \frac{9a^2-14}{50a+50} =$

MISCELÁNEA

1. Analiza la veracidad o falsedad de cada enunciado. Justifica adecuadamente:

a. El complejo $(x + xi)^2$ es un imaginario puro para cualquier valor real de x .

b. $\left| \frac{-2x+6}{-3} \right| = 4 \Rightarrow |x| = 3$

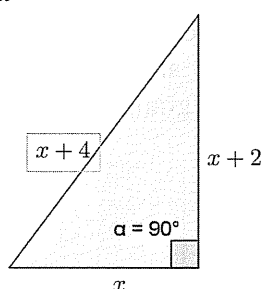
c. $(2xy - z) \cdot (3xy + 7z) = 6x^2y^2 - 7z^2$

d. $\frac{(-2i)^2 \cdot (1-i)}{(2+i)} = -\frac{4}{5} + \frac{12}{5}i$

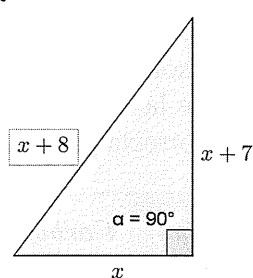
e. $\forall n \in \mathbb{N} : 2^{-n} \cdot (2^{n+1} - 5 \cdot 2^n) = -3$

2. Halla el valor de x en cada caso:

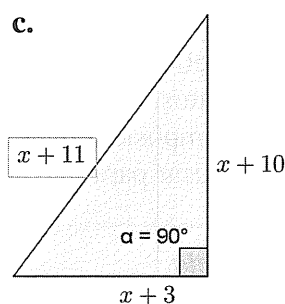
a.



b.



c.



3. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo cuyo perímetro es 48 y posee mayor área?

4. Un boxeador que ha peleado en 72 ocasiones ganó 16 peleas más de las que perdió. Si sólo empató en 4 ocasiones, ¿cuántas peleas perdió?

5. En el triángulo $\triangle ABC$ se trazan las bisectrices de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ que se cortan en P . Por P se traza una paralela a $\overline{BC}$ que corta al lado $\overline{AB}$ en D y al lado $\overline{AC}$ en E . Se sabe que $BD = 5,3$ y $CE = 7,8$. Calcule la medida del segmento $\overline{DE}$.

6. Determine los valores de k para que el sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} (2k+1)x - 2y = 5+k \\ -5kx + (k+2)y = 11 \end{cases}$$

7. Halle el dominio de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^5 - x^2 + 3$

c. $h(x) = \sqrt[3]{x+1}$

b. $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

d. $j(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

8. Demuestra la identidad: $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, y con ello determina el valor exacto del $\cos(120^\circ)$.

9. ¿Pueden ser los puntos $A(1,2)$; $B(0,3)$ y $C(3,0)$ ser colineales?

10. Obtenga el polinomio p a coeficientes reales de menor grado posible que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

- Sea divisible por $(x - 2i)^2$
- El número 3 sea raíz de p
- $p(0) = 144$

11. La Pirámide de Keops (s. 25 a.c.) es una pirámide recta de base cuadrada. Tiene una altura de $138m$ y una arista lateral de $219m$.

- Calcula su volumen
- Calcula su superficie lateral

12. En un experimento, se ha impuesto una dieta estricta a un grupo de animales. Cada uno de ellos recibe, entre otros nutrientes, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidratos. El científico a cargo sólo tiene dos mezclas de alimento, cada una con la composición que se detalla en la tabla abajo. ¿Cuántos gramos de cada mezcla debe usar para obtener la dieta correcta para cada animal?

<i>Mezcla</i>	<i>Proteína (%)</i>	<i>Carbohidratos (%)</i>
Mezcla A	8	4
Mezcla B	12	2

13. Simplifique

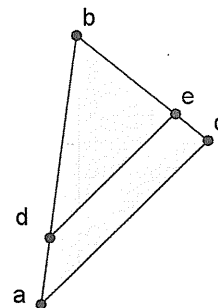
$$\begin{array}{ll} \text{a. } \frac{x^{-1} + y^{-1}}{\frac{4}{xy}} & \text{c. } \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x^2}} \\ \text{b. } \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{y}}{(2y + x)^3} & \text{d. } \frac{\frac{x^2 - y^2}{x}}{\frac{x + y}{x^2}} \end{array}$$

14. Si el área de un rectángulo es $\frac{x^2 + 9x + 18}{x + 1}$ y su largo es $\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 2x + 1}$, obtenga su ancho (en función de x)

15. Una pecera en forma de prisma tiene $92cm$ de largo, $75cm$ de ancho y $56cm$ de alto. ¿Cuántos cm^3 de agua caben en la pecera?

Si llenamos la pecera hasta la mitad. Después echamos los peces y el nivel aumenta en $2cm$. ¿Qué volumen ocupan los peces?

16. Halle el valor de $x=be$, sabiendo que $\vec{de} \parallel \vec{ac}$, $db=4$, $ab=12$ y $ec=3$:



17. ¿Cuáles son las edades de Alejandra y Benicio, si él es el más chico, la diferencia de los cuadrados de las mismas es 27 y la suma de sus edades es 9?
18. Resuelva la ecuación $6\cos^2(x) + \cos(2x) = 1$
19. Obtenga todas las razones trigonométricas de 212° tomando que la $\operatorname{tg}(32^\circ) \approx 0,625$
20. Determina la ecuación de la recta que es paralela a la recta $r) y = 4x + 3$ y que pasa por el punto $(0,5)$.
21. ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo cuyos lados miden 3cm , 7cm y 5cm ?
22. ¿Es el polinomio $p(x) = 2x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 15x + 10$ múltiplo del polinomio $q(x) = x - i$?
23. En el sitio de la municipalidad de Rosario (www.rosario.gov.ar) podemos obtener la siguiente información acerca de los taxis:

Taxis

A partir del 1º de marzo de 2014, están vigentes las siguientes tarifas:

- Bajada de bandera: \$10,14
- Ficha (cada 100 m.): \$0,50

- a. Modeliza, a través de una función lineal, la función “Costo según los metros recorridos”.
- b. Si Alberto cuenta con \$50, ¿cuántas cuadras como máximo podrá realizar en un taxi? (Tomar 1cuadra=100m)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- GUZMÁN, M.: “Curso Introductorio” UNR; Rosario 2013
- ANGEL, A.: “Álgebra intermedia” Sexta Edición; Editorial Pearson Educación; México, 2004.
- BOCCO, M.: “Funciones elementales para construir modelos matemáticos” – Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática” Primera Edición; Buenos Aires; Ministerio de Educación de la Nación; Instituto Nacional de Educación Tecnológica - 2010
- CARNELLI, G.; FALSETTI, M.; FORMICA, A.; RODRÍGUEZ, M.: “Matemática para el Aprestamiento Universitario” Segunda Edición; Los Polvorines; Universidad Nacional de Gral. Sarmiento - 2010
- ANIDO M., GUZMÁN M., KATZ R., SAGRISTÁ R.: “Módulos para Ingresantes: N°2 – Complejos y N° 3 – Polinomios”; FCEIA – UNR; Rosario – 1993
- BUSCHIAZZO, N.; FONGI, E.; GONZÁLEZ, M.; Lagreca, L.: “Matemática II”; Editorial Santillana; Buenos Aires – 2000
- DE GUZMÁN, M.; COLERA, J.: “Matemática I y II – C.O.U.”; Editorial Anaya; Barcelona – 1989
- DE GUZMÁN, M.; COLERA, J.; SALVADOR, A.: “Matemáticas – Bachillerato 1, 2 y 3”; Editorial Anaya; Barcelona – 1987
- FONGI, E.; GONZÁLEZ, M.; GUZMÁN, M.: “Curso Introductorio Matemática 2da. Parte”; FCEIA – UNR; Rosario – 2005
- GUZMÁN, M., DI GIORNO, D.: “Período introductorio” UNR; Rosario – 1998
- GUZMÁN, M.: “Curso Introductorio Matemática 1ra. parte” UNR; Rosario – 2005
- STEWART, J., REDLIN, L., WATSON, S.: “Precálculo” Tercera Edición; Editorial Thomson Learning; México – 2001

Quiero agradecer profundamente la colaboración de Raúl Katz, quien me ayudó a dar los primeros pasos en este libro, también la de Flavia Sibuet y Beatriz Vital.

No quiero olvidarme tampoco de los distintos docentes que han pasado por el ingreso y cuyas opiniones y construcciones han servido para “formatear” este material, por cierto inicial y, por tanto, claramente mejorable.

Una mención especial quiero hacer para Marisa Piraino, quién desde un primer momento me tendió su mano colaborar en lo que fuera necesario.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de Julio de 2014
en los talleres de Sudamérica Impresos.
Cólón 3063 - 2000, Rosario - Santa Fe - República Argentina.
Tel.: (0341) 4820125
E-mail: info@sudamericaimpresos.com.ar