FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática

Álgebra y Geometría Analítica

Práctica N° 1 - Vectores

1. *a)* Marca en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:
   $A(2,3)$; $B(0,4)$; $C(-2,3)$; $D(3,-3)$; $E(-1,-1)$; $F(-\frac{3}{2},0)$

   b) A partir del gráfico anterior, halla las coordenadas de los puntos:
   i. simétricos de A y B respecto al eje y.
   ii. simétricos de C y D respecto al eje x.
   iii. simétricos de E y F respecto al origen.
   iv. proyecciones de A y E sobre los ejes coordenados.

   c) Calcula la distancia entre los puntos A y E.

2. *a)* Marca en un sistema de coordenadas cartesianas los siguientes puntos:
   $A(1,1,1)$; $B(1,-1,2)$; $C(0,3,2)$; $D(2,-1,-2)$; $E(0,0,-3)$

   b) A partir del gráfico anterior, halla las coordenadas de los siguientes puntos:
   i. simétrico de A respecto al plano xy.
   ii. simétrico de B respecto al plano xz.
   iii. simétrico de C respecto al eje x.
   iv. simétrico de D respecto al eje z.
   vii. simétricos de A y E respecto al origen.
   viii. proyecciones de D sobre cada uno de los ejes y planos coordenados.

   c) Calcula la distancia entre los puntos A y D.

3. Grafica los siguientes conjuntos del plano, en distintos sistemas de coordenadas.

   a) $\{P(x,y)/y=2\}$
   b) $\{P(x,y)/-1<x\leq 3\}$
   c) $\{P(x,y)/\,|x|\leq 3 \wedge |y|\leq 1\}$
   d) $\{P(x,y)/d(O,P=3\}$

4. Dibuja en tu hoja dos vectores $\bar{u}$ y $\bar{u}$ tales que $|\bar{u}|=1$, $|\bar{v}|=5$ y $(\bar{u}\,\hat{,}\,\bar{v})=\frac{\pi}{3}$ y obtén gráficamente los siguientes vectores:

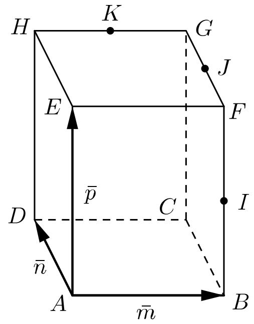
   a) $\bar{x}=2\bar{u}+\bar{v}$
   b) $\bar{y}=3\bar{u}-\frac{2}{5}\bar{v}$
   c) $\bar{z}=-\bar{u}$
   d) $\bar{w}=\bar{z}+\bar{x}$

5. Resuelve las siguientes ecuaciones vectoriales en la incógnita $\bar{x}$:

   a) $\bar{u}-\bar{w}+\bar{x}=\bar{v}$
   b) $3\bar{x}+\bar{u}=\bar{w}-2\bar{u}$
   c) $\bar{v}+2\bar{x}=\bar{u}-4(\bar{x}+\bar{v})$

6. Observa la figura, donde I, J y K son puntos medios de los lados a los que pertenecen, y escriba los siguientes vectores en función de $\bar{m}$, $\bar{n}$ y $\bar{p}$:

$$\overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AI},\ \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{BK},\ \overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{ED},\ \overrightarrow{FH},\ \overrightarrow{CE} \text{ y } \overrightarrow{JD}$$



7. Las fuerzas $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$ están aplicadas en un punto y tienen direcciones perpendiculares entre sí. Halla la magnitud de la resultante $\overrightarrow{R}$ sabiendo que: $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 10$ y $\left|\overrightarrow{F_1}\right| = 11$.

8. Sean $\bar{u}$ y $\bar{u}$ vectores paralelos, de sentidos opuestos y tales que $|\bar{u}| = 5$ y $|\bar{u}| = \frac{4}{3}$. Halla $\lambda \in \mathbb{R}$ en cada caso, de manera que verifique las condiciones pedidas:

$$a)\bar{u} = \lambda\bar{v} \qquad b)\bar{u} = \lambda(-\bar{v}) \qquad c)\bar{u} = \lambda(3\bar{v})$$

9.
   a) Calcula la proyección escalar de un vector $\bar{a}$ de módulo 3 sobre un vector $\bar{c}$, sabiendo que $(\bar{a}\,\hat{;}\,\bar{c}) = 30°$.
   b) Calcula el módulo del vector $\bar{b}$ que determina un ángulo de 45° con $\bar{c}$, sabiendo que $proy_{\bar{c}}\ \bar{a} = proy_{\bar{c}}\ \bar{b}$.

10. Si $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 1$ y $(\bar{u}\,\hat{;}\,\bar{v}) = \frac{\pi}{6}$, calcula $(2\bar{u} + \bar{v}) \times (3\bar{u} - \bar{v})$.

11. Analiza si son válidas las siguientes afirmaciones y justifica tus respuestas:
   a) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{a} + \bar{c} \Longrightarrow \bar{b} = \bar{c}$
   b) $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{a} \times \bar{c} \Longrightarrow \bar{b} = \bar{c}$
   c) $\exists\ \bar{a}, \bar{b}\ /\ \left(\bar{a}\,\hat{;}\,\bar{a} + \bar{b}\right) = 45°$
   d) $\exists\ \bar{a}\ /\ \bar{a} \times \bar{a} = -1$
   e) $\alpha \cdot \bar{a} = \alpha \cdot \bar{b} \Longrightarrow \bar{a} = \bar{b}$
   f) $\alpha \cdot \bar{a} = \beta \cdot \bar{a} \Longrightarrow \alpha = \beta$

12. Dados los puntos $A(2, 3)$; $B(7, 5)$; $C(4, -1)$; $D(9, 1)$; $E(-1, -3)$; $F(-6, -5)$:
   a) halla las componentes de los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{BA}$,;
   b) halla las coordenadas del punto P tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ (siendo O el origen de coordenadas);
   c) grafica todos los puntos y vectores mencionados. ¿Cómo resultan éstos entre sí?;
   d) calcula el módulo de los vectores $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{ED}$ y $\overrightarrow{EF}$;
   e) calcula las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

13. Dados los puntos $A(-2, 3, 1)$ y $B(-2, 1, 0)$, halla de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$:
   a) sus componentes;
   b) sus módulos;
   c) las componentes de sus versores asociados;
   d) las coordenadas del punto M tal que $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

14. Dados los vectores $\bar{a} = (1, -3, 2)$, $\bar{b} = 5\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = 4\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$ y $\bar{d} = (-3, 4, -1)$, halla:
   a) las componentes de los vectores $3\bar{a} - \bar{b}$, $-\frac{1}{2}\bar{c} + 2\bar{d}$ y $\bar{a} + \bar{b} - (\bar{c} + \bar{d})$;
   b) el vector $\bar{x} \in V_3\ /\ \bar{b} = \bar{a} + \bar{x}$;
   c) $|\bar{x} + \bar{e}|$, donde $\bar{x}$ es el del apartado anterior y $\bar{e} = (-6, 3, -2)$.

15. Encuentra cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\bar{u} = (6, -8)$:

$$\bar{v_1} = (-2, 4),\ \bar{v_2} = (-3, 4),\ \bar{v_3} = (3, 4),\ \bar{v_4} = (1, -\frac{4}{3}),\ \bar{v_5} = (6, 0),\ \bar{v_6} = (-8, 6),\ \bar{v_7} = (6, 8)$$

16. Verifica que los vectores $\bar{u} = (2, -1, 3)$ y $\bar{v} = (-6, 3, -8)$ son colineales. Determina cuál es el de mayor longitud y si tienen sentidos iguales o distintos.

17. Halla α si se sabe que $P_1(3, 5, 2)$, $P_2(9, 2, \alpha)$ y $d(P_1, P_2) = 7$.

18. *a*) Dados los puntos $P(1, 5)$ y $Q(4, 2)$, determina las coordenadas de un punto R de modo que los vectores $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$ tengan ambos módulo 5. Interpreta gráficamente y encuentra todas las soluciones del problema.

    b) Si en el apartado *a*) se pide que ambos vectores tengan módulo d, analiza si este problema tiene o no solución para todo valor positivo de d.

19. Si $\bar{x} = 4\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$, $\bar{a} = 2\bar{u} - \bar{v}$, $\bar{b} = \bar{u} + \bar{v} + \bar{w}$ y $\bar{c} = 5\bar{a} + 3\bar{w}$, muestra que $\bar{x}$ es combinación lineal de $\bar{u}$, $\bar{v}$ y $\bar{w}$. ¿Cuáles son los escalares de dicha combinación lineal?

20. *a*) El centro de gravedad de una varilla homogénea está en el punto $C(1, -1, 5)$ y uno de sus extremos en $A(-2, -1, 7)$. Averigua las coordenadas del otro extremo. (Obs.: el centro de gravedad de una varilla homogénea se encuentra en su centro, punto medio de sus extremos).

    b) Determina las coordenadas de los extremos del segmento que es dividido en tres partes iguales por los puntos $B(2, 0, 2)$ y $D(5, -2, 0)$.

21. Dados $\bar{u} = (1, 1, 1)$, $\bar{v} = (0, 1, 1)$ y $\bar{w} = (2, 1, 1)$:

    a) encuentra, si existe, $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha \cdot \bar{u} - \bar{v} - \bar{w} = \bar{0}$;

    b) deduce que $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ no es base de V_3;

    c) analiza si $\bar{s} = (1, 2, 2)$ y $\bar{t} = (1, 2, 3)$ son combinación lineal de $\bar{u}, \bar{v}$ y $\bar{w}$.

22. Encuentra las componentes del vector $\bar{u} = \bar{i} + 10\bar{j}$ en la base $\{\bar{v_1}, \bar{v_2}\}$, siendo $\bar{v_1} = (2, 3)$ y $\bar{v_2} = (5, -1)$.

23. *a*) Halla los cosenos directores y el versor asociado al vector $\bar{u} = (-3, 7, 2)$.

    b) Ídem para $\bar{v} = \frac{1}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$.

    c) Halla además el vector $\bar{w}$ que tiene los mismos cosenos directores que $\bar{u}$ y módulo 14.

24. Determina si existen uno o más vectores de módulo 5 que formen con los versores $\bar{i}$ y $\bar{k}$ ángulos de $45°$ y $120°$ respectivamente. En caso afirmativo, determine las componentes de cada uno.

25. Halla las componentes del vector $\bar{v}$ de módulo 32 que es colineal con $\bar{a} = (3, -2, -\frac{1}{3})$ y que forma un ángulo agudo con el versor $\bar{j}$.

26. Dados $\bar{u} = (3, -1, -2)$ y $\bar{v} = (1, 2, -1)$ calcula:

    $a)\bar{u} \wedge \bar{v}$ $\qquad$ $b)(\bar{v} + 2\bar{u}) \wedge \bar{v}$ $\qquad$ $c)(\bar{v} - 2\bar{u}) \wedge (4\bar{u} - 2\bar{v})$

27. Determina las componentes de un versor que sea simultáneamente perpendicular a los vectores $\bar{a} = (3, -1, 5)$ y $\bar{b} = (-2, 1, 0)$. ¿Hay otras soluciones? ¿Cuáles?

28. Halla las componentes de un vector $\bar{v}$ del que se sabe que $|\bar{v}| = 8$, $\bar{v} \perp \bar{a} = (7, -2, 4)$, $(\widehat{\bar{v}; \bar{i}})$ es agudo y $\bar{v}$ es perpendicular al eje z.

29. Dados los vectores $\bar{u} = (2, -1, 4)$, $\bar{v} = (1, 2, \alpha)$ y $\bar{w} = (2, -2, 3)$, halla α de manera que el volumen del paralelepípedo que ellos determinan sea igual a 31 unidades. Antes de iniciar el cálculo de α, discuta cuántas soluciones podría tener un problema como éste (0; 1; 2 o más) y a qué casos geométricos corresponderían. Obtenga todos los α posibles en este caso.