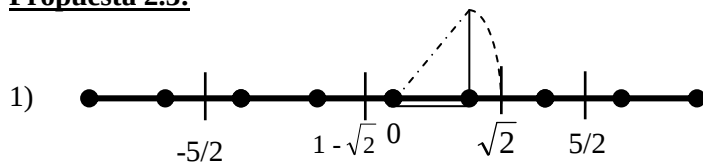


Las respuestas fueron elaboradas por las Profesoras Luciana Calderón y María de los Ángeles Fernandez quienes realizan una adscripción en la Cátedra.

Propuesta 2.3:

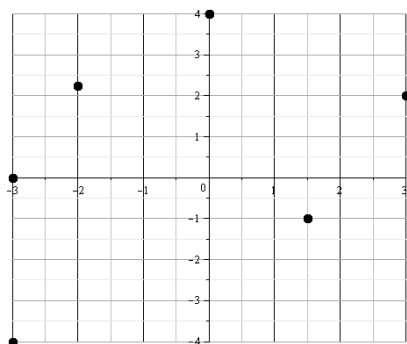


2) La distancia es 5

3) $x = 1$

Propuesta 2.5:

1)



3) $Q(3, -2)$ $R(-3, 2)$ $S(-3, -2)$



2) Los puntos están alineados. Pertenecen a la recta que contiene al punto $(2, 0)$ y es paralela al eje y .

4) a) V
b) F

Propuesta 2.7:

2) Pertenecen al plano coordenado YZ .

3) Pertenecen al plano que es paralelo al plano coordenado YZ y corta al eje x en el punto $(1, 0, 0)$

4) Están sobre el plano que es paralelo al plano coordenado YZ y corta al eje x en el punto $(3, 0, 0)$

5) El punto B está “más cerca” del plano XZ . El punto del plano XZ más cercano a B es $(5, 0, 3)$

6) Sea $P(a, b, c)$

El simétrico de P respecto del plano XY es el punto $(a, b, -c)$

El simétrico de P respecto del plano XZ es el punto $(a, -b, c)$

El simétrico de P respecto del plano YZ es el punto $(-a, b, c)$

El simétrico de P respecto del eje X es el punto $(a, -b, -c)$

El simétrico de P respecto del eje Y es el punto $(-a, b, -c)$

El simétrico de P respecto del eje Z es el punto $(-a, -b, c)$

El simétrico de P respecto del origen de coordenadas es el punto $(-a, -b, -c)$

Propuesta 3.5:

- 1) a) Falso, basta considerar cualquier vector de módulo menor a uno.
- b) Falso, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no tienen igual dirección.
- c) Falso, los módulos de los versores asociados son ambos iguales a uno.
- d) Verdadero.

Demostración:

Sabemos que:

$$\checkmark \left. \begin{array}{l} \text{Por hipótesis } \vec{u} // \vec{v} \\ \vec{u}_0 // \vec{u} \\ \vec{v}_0 // \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u}_0 // \vec{u} // \vec{v} // \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{u}_0 // \vec{v}_0 \Rightarrow \text{tienen igual dirección}$$

$$\checkmark \left. \begin{array}{l} \text{Sentido } (\vec{u}) = \text{Sentido } (\vec{u}_0) \\ \text{Sentido } (\vec{v}) = \text{Sentido } (\vec{v}_0) \\ \text{Por hipótesis } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ tienen igual sentido} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sentido } (\vec{u}_0) = \text{Sentido } (\vec{u}) = \text{Sentido } (\vec{v}) = \text{Sentido } (\vec{v}_0)$$

$$\checkmark \quad |\vec{v}_0| = |\vec{u}_0| = 1$$

Por lo tanto $\vec{u}_0 = \vec{v}_0$

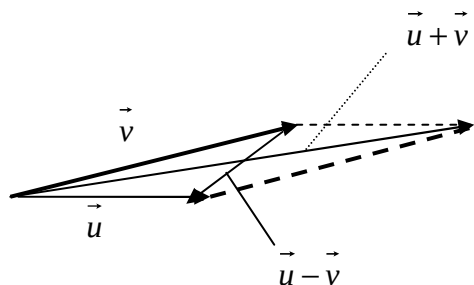
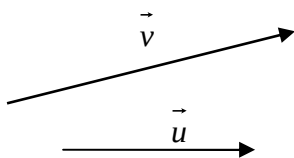
e) Verdadero.

$$2) \quad \left(\vec{a}, \vec{b} \right) = \frac{\pi}{4} \qquad \left(\vec{a}, \vec{c} \right) = \frac{3\pi}{4} \qquad \left(\vec{b}, \vec{c} \right) = \frac{\pi}{2}$$

3) Es falso pues $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$. Por lo tanto el $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 0$

Propuesta 3.7:

1) Un ejemplo en particular podría ser el siguiente:



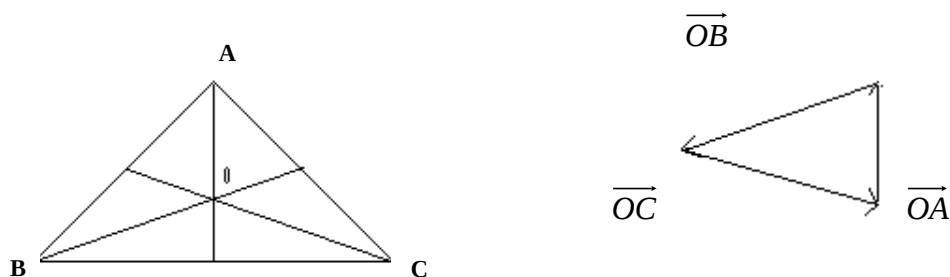
$$2) \quad |\vec{u} + \vec{v}| = 5, \quad |\vec{u} - \vec{v}| = 5$$

$$3) \quad \overrightarrow{CB} = \vec{u} - \vec{v} \qquad \overrightarrow{CA} = -\vec{v} \\ \overrightarrow{BC} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v} \\ \overrightarrow{CD} = -\vec{u}$$

$$\overrightarrow{DA} = -\vec{v} \\ \overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$$

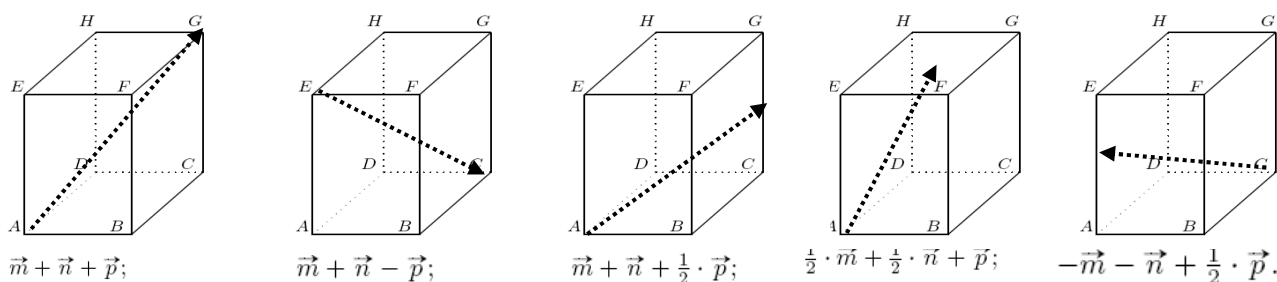
4)



5) Sugerencia:

$$\vec{x} + \vec{u} = \vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \vec{v} - \vec{u}$$

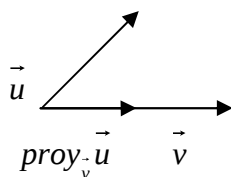
Propuesta 3.10:



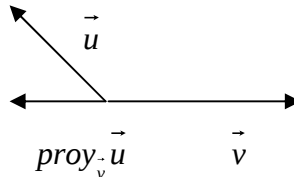
Propuesta 3.12:

1) Es el vector nulo

2) a)



b)



3) Sugerencia:

Considerar los siguientes casos:

Caso 1: $0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) < \frac{\pi}{2}$

Caso 2: $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$

Caso 3: $\frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$

Propuesta 3.14:

1) Demostración: Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \underset{(1)}{\left| \vec{u} \right| \left| \vec{v} \right| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0} \Leftrightarrow \underset{(2)}{\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0} \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

(1) Definición de producto escalar.

(2) $|\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$ pues los vectores no son nulos.

$$2) \quad | \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} | = \left| \left(\vec{u} \times \vec{v}_0 \right) \vec{v}_0 \right| \stackrel{(1)}{=} \left| \vec{u} \times \vec{v}_0 \right| \stackrel{(2)}{=} \left| \vec{u} \times \vec{v}_0 \right| \stackrel{(3)}{=} \left| \vec{u} \times \vec{v}_0 \right| = \left| \vec{u} \times \frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \right| = \frac{1}{|\vec{v}|} \left| \vec{u} \times \vec{v} \right|$$

(1) Por lo demostrado anteriormente en este ejercicio

(2) Definición de módulo de un vector por un número

(3) $|\vec{v}_0| = 1$

(4) Por propiedad E₃ del producto escalar y definición del módulo de un número por un vector

3)

a) 3

b) 3

c) -3

d) 3/2

e) -18

f) 13

g) -1

h) 11

4) El Teorema de Pitágoras se obtiene para $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ($\alpha = 90^\circ$)

5) Considerando vectores no nulos

$$a) \quad |\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$

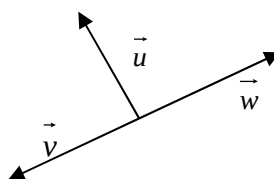
$$b) \quad |\vec{u} + \vec{v}| > |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow 0 \leq (\vec{u}, \vec{v}) < \frac{\pi}{2}$$

$$c) \quad |\vec{u} + \vec{v}| < |\vec{u} - \vec{v}| \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi$$

$$6) \quad |\vec{u} + \vec{v}| = 20$$

7) La proposición es falsa pues si $\vec{u} = \vec{0}$ entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$ y no necesariamente $\vec{v} = \vec{w}$

También se puede considerar el siguiente ejemplo



8) La igualdad se verifica cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son paralelos y de igual sentido. También se verifica cuando al menos uno de ellos es el vector nulo.

Propuesta 3.16:

✦ Si los tres vectores son paralelos tenemos dos casos:

Caso 1: si el vector que quiero expresar como combinación lineal de los otros tres es también paralelo a ellos, entonces existen infinitas combinaciones lineales.

Caso 2: si el vector que quiero expresar como combinación lineal de los otros tres no es paralelo a los vectores, entonces en este caso no es posible escribir al vector como combinación lineal de los otros tres.

- Si dos de estos tres vectores son paralelos hay infinitas formas de escribir un vector como combinación lineal de los tres vectores.
- Si ninguno de estos tres vectores son paralelos, un vector cualquiera se puede escribir como combinación lineal de estos tres de infinitas formas.

Propuesta 3.21:

$$1) \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos \beta = \frac{-1}{\sqrt{5}} \quad \cos \gamma = 0$$

$$2) \vec{v} = (1, -1, \sqrt{7})$$

3) Cosenos directores de $\vec{i}$

$$\cos \alpha = 1 \quad \cos \beta = 0 \quad \cos \gamma = 0$$

Cosenos directores de $\vec{j}$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \beta = 1 \quad \cos \gamma = 0$$

Cosenos directores de $\vec{k}$

$$\cos \alpha = 0 \quad \cos \beta = 0 \quad \cos \gamma = 1$$

$$4) a) \text{ No pues } \cos^2(45^\circ) + \cos^2(130^\circ) + \cos^2(60^\circ) \neq 1$$

$$b) \text{ Si pues } \cos^2(90^\circ) + \cos^2(150^\circ) + \cos^2(60^\circ) = 1$$

Propuesta 3.23:

$$1) a) P(8,0,3) \quad Q(2,-2,1) \quad R(-4,6,7) \quad b) \text{ La longitud de la mediana es } \sqrt{\frac{43}{2}}$$

$$c) \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{13}{7\sqrt{11}}$$

$$2) a) \text{ Sugerencia: Los vectores } \overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AC} \text{ son perpendiculares (el producto escalar es cero)}$$

$$b) \text{ El área es } \frac{\sqrt{286}}{2}$$

$$3) A(-1,2,4) \quad B(8,-4,-2)$$

$$4) \vec{v} = (-24, 32, 30)$$

Propuesta 3.25:

Directa-Directa-Inversa

Propuesta 3.271) a) $(5, 1, 7)$

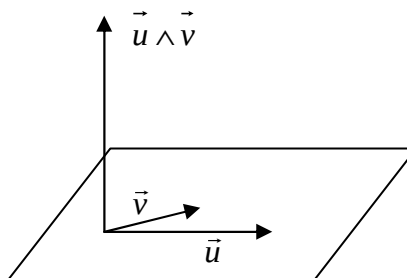
b) y c) se obtiene de a) aplicando las propiedades

b) $(10, 2, 14)$ c) $(20, 4, 28)$ **Propuesta 3.29:**

4) a) Verdadero. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos ni paralelos, el vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular al plano que determinan $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ es una base de V_3 .

b) Falso. $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, por lo tanto no se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Verdadero. $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u} \wedge \vec{v}$ son no coplanares

5) $D(0, -2, 0)$ ó $D(0, 8, 0)$ **PROPUESTA PARA LA REVISIÓN**

1) a) $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ $|\vec{v}| = \sqrt{5}$ $|\vec{w}| = \sqrt{14}$

b) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{14}}, 2 - \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{14}{3} - \frac{2}{\sqrt{14}} \right)$

c) $b = 18$

2) b) $(\vec{u}, \vec{v}) = 100^\circ 15' 48,34''$

c) $x = \frac{3}{2}$

d) $s = 3$

3) $-5 \left(\vec{v} - \frac{1}{5} \vec{w} \right) = -5 \vec{v} + \vec{w}$

4) a) $m = 3$

b) Para cualquier valor de m los vectores son ortogonales

5) $\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7} \right)$

$\text{proy}_{\vec{u}} \vec{v} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3} \right)$

6) $\text{Área del triángulo} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

7) $\vec{v} = (-8, 8, 6)$

8) Las componentes de $\vec{w}$ en dicha base son $(2, 5)$

9) $\vec{a} \wedge \vec{b} \times \vec{c} = \pm 27$

10) $|\vec{a} \wedge \vec{b}| = 16$

11) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es un vector perpendicular al plano coordenado YZ cuyo módulo es 8. $\vec{u} \wedge \vec{v} = \pm 8 \vec{i}$

- 12) a) Los vectores son coplanares.
b) Los vectores no son coplanares.
c) Se da en el caso b)

13) b) El conjunto $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ no forma una

c) $\overrightarrow{AD} = -1 \overrightarrow{AB} + 1 \overrightarrow{AC}$

d) $\text{Área} = \sqrt{98}$

- 14) a) Verdadero. Es igual a cero.
b) Verdadero. Realizar la demostración
c) Verdadero.

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}|^2 + (\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cdot \text{sen}^2(\vec{a}, \vec{b}) + |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\text{sen}^2(\vec{a}, \vec{b}) + \cos^2(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

15) $\alpha = 53^\circ 44' 8,2''$

16) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = -13$