Álgebra y Geometría Analítica

- Práctica adicional Polinomios -

1. Factoriza completamente los siguientes polinomios:
   a) $P(x) = x^6 + i$
   b) $Q(x) = x^5 + 64x^2$
   c) $R(x) = x^5 + 3x^3 - 4x$
   d) $S(x) = x^4 + 2 + 2\sqrt{3}$
   e) $T(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$
   f) $N(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 - 5x - 3$

2. a) Calcula todas las raíces cúbicas de $z = -\frac{8}{i}$
   b) Halla un polinomio de menor grado posible, a coeficientes reales, que tenga a dichas raíces cúbicas como raíces (puedes darlo factorizado).

3. Sea $P(x) = 2x^4 - x^3 - 4x^2 + 10x - 4$.
   a) Verifica que $1 - i$ es una raíz de $P(x)$.
   b) Halla las restantes raíces del polinomio.

4. Sea $Q(x) = x^7 + x^5 - x^2 - 1$.
   a) Verifica que i es una raíz de $Q(x)$.
   b) Halla las restantes raíces del polinomio.

5. a) Representa gráficamente el conjunto $A = \left\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 3,\ |argz| \leq \frac{\pi}{2}\right\}$.
   b) Halla todas las raíces de $P(x) = x^4 + 8x$.
   c) Indica cuáles de las raíces de P pertenecen al conjunto A.

6. Determina un polinomio de menor grado posible a coeficientes reales que verifique:
   a) tiene a -1 como raíz doble, y a 2 y $-1 + 2i$ como raíz simple. ¿Es única la respuesta?
   b) tiene a 1 como raíz triple, a $2i$ como raíz doble y $P(i) = 2 + 2i$. ¿Es única la respuesta?

7. Analiza si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.
   a) $z^3 = i^3 \Rightarrow z = i$
   b) $P(x) = (x - 2)(x - 3)^2$ es el único polinomio de grado 3 que tiene a 2 como raíz simple y a 3 como raíz doble.
   c) $P(i) = 0 \Rightarrow P(-i) = 0$, para todo polinomio P.
   d) Las raíces de $P(x) = (x - 1)(x^2 + 4)$ son también raíces de $Q(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + 4x - 8$.
   e) El polinomio $R(x) = x^6 + 32x$ no tiene raíces múltiples.