

CAPÍTULO 9: POLINOMIOS

¿Recuerdas como sumabas en la primaria? ¿Y cómo multiplicabas?

$\begin{array}{r} + 2456 \\ 5231 \\ \hline 7687 \end{array}$	ó bien	$\begin{array}{r} + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 6 \\ 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \\ \hline 7 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10 + 7 \end{array}$
$\begin{array}{r} \times 2110 \\ 123 \\ \hline 6330 \\ + 4220 \\ 2110 \\ \hline 259530 \end{array}$	ó bien	$\begin{array}{r} 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 0 \\ \times 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \\ \hline 6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0 \\ + 4 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 \\ 2 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 0 \\ \hline 2 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 0 \end{array}$

¡Con los polinomios sumaremos y multiplicaremos de la misma forma!!

Las expresiones como $5x^2y^3$; $(2+i)xy^3$; $5xyz^4$ o $2\pi r$ se denominan **monomios**. La característica principal es que entre los elementos involucrados (números y letras) sólo hay multiplicaciones. En el primer y segundo monomio decimos que tienen 2 variables (“x” e “y”), en el tercero tres (“x”, “y” y “z”), y en el cuarto una sola variable (“r”). Los números que aparecen son los coeficientes del monomio (en orden de aparición: 5 ; $(2+i)$; 5 ; 2π).

La suma de varios monomios será un polinomio.

En particular trabajaremos en este capítulo con polinomios de una sola variable. Definamos:

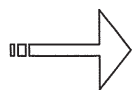
Un polinomio en una variable es una expresión de la forma:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde n es un número entero no negativo, x es la **variable** y los $n+1$ números: $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \dots; a_1; a_0$ son llamados **coeficientes** del polinomio

Algunos ejemplos:

- 1) $p(x) = (1+i)x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2ix - 5$, en este caso $n=5$ y los coeficientes son: $(1+i)$; 2 ; 1 ; -1 ; $2i$ y -5 .
- 2) $p(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$, en este caso $n=4$ y los coeficientes son: 1 ; 0 ; -3 ; 1 y 1 .



Cuando los coeficientes del polinomio sean números complejos, diremos que es “a coeficientes complejos” y simbolizaremos $\mathbb{C}[x]$ al conjunto de los polinomios con coeficientes complejos.

Si son todos números reales, diremos que es “a coeficientes reales” y simbolizaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de los polinomios con coeficientes reales.

Al número a_n se lo llama coeficiente principal y al a_0 término independiente.

Práctica:

1. Indique cuales de las siguientes expresiones son polinomios.:

a. $3x + 2$

b. $8^x - x^3 + 2x^2$

c. $(1 + 2i)x^4 - x^2 + 3x - (1 + i)$

d. $x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{5}} - x + 1$

e. $\sqrt{x} \cdot i + 2$

f. $(x + 1)^2$

El símbolo sumatoria

Vamos a trabajar un poco con esta notación que suele ser tan práctica para escribir resumidamente algunos procesos de suma que posean en sus términos ciertas regularidades.

Por ejemplo, queremos describir la suma de los primeros 50 números naturales: $1 + 2 + 3 + \dots + 50$, en vez de poner esos “tres puntos suspensivos tan inquietantes, y si se quiere, rodeados de un poco de sospecha”, podemos usar el símbolo sumatoria, el mismo

se describe con la letra griega sigma: Σ . Aquí: $1 + 2 + 3 + \dots + 50 = \sum_{k=1}^{50} k$.

En este ejemplo vemos que iniciamos en 1 y terminamos en 50. Siempre pondremos el valor inicial abajo y el final arriba del símbolo Σ .

Otro ejemplo: queremos describir la suma de los primeros veinticinco cuadrados

perfectos naturales, es decir $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2 = \sum_{k=1}^{25} k^2$

Práctica:

2. Escribe, en cada caso, utilizando el símbolo de sumatoria:

a. La suma de los primeros 20 números pares.

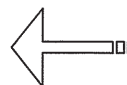
Resolución:

$$0 + 2 + 4 + \dots + 38 = 2 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2 \times 19 = \sum_{k=0}^{19} 2 \times k$$

b. La suma de los primeros 30 cubos perfectos naturales

c. $1 + 2 + 8 + 16 + \dots + 1024$

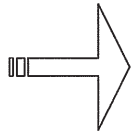
Investiga las distintas propiedades que tiene el uso de este símbolo. Notarás que todas tienen relación con el asunto de que lo estamos, en definitiva, haciendo son sumas.



Ahora que tenemos una mejor noción de lo que este símbolo representa, podemos reescribir al polinomio de una sola variable como sigue:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$$

La notación del polinomio como “ p de x ” no es caprichosa, en efecto, si $p \in \mathbb{R}[x]$, se tratará de una función real a valores reales.



- Cuando el polinomio tiene dos términos decimos que es un **binomio**.
- Cuando el polinomio tiene tres términos decimos que es un **trinomio**.
- Cuando el polinomio tiene cuatro términos decimos que es un **cuatrinomio**.

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos. Si el polinomio se reduce a un número decimos que es un polinomio **constante**, si dicho número NO es cero, decimos que el grado del polinomio es cero.

El polinomio constante igual a cero se llama **polinomio nulo** y carece de grado.

Un polinomio de grado uno se llama polinomio lineal (de hecho, se trata de una función lineal), y el polinomio de grado dos se llama polinomio cuadrático (es una función cuadrática)

Práctica

3. Completa

- $4x^6 + 2x^5 + 3x^3 - 1$ es un polinomio de grado.....y su coeficiente principal es.....
- $1 - i$ es un polinomio.....de grado.....
- $x - (2 + i)$ es un polinomio.....y su término constante es.....
- 0 es el polinomio..... y carece de.....

Igualdad de polinomios

Dos polinomios a coeficientes complejos son iguales si tienen igual grado y los coeficientes de los términos homólogos son iguales. En símbolos:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k ; q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow (n = m \wedge a_k = b_k ; k = 0, 1, \dots, n)$$

Práctica

4. Determine, en cada ítem, los valores de a , b , c y d de forma que $p(x) = q(x)$:

- $p(x) = (1 - i)x^4 - x^2 + 3x - 2$; $q(x) = (a + b)x^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + d$
- $p(x) = \frac{1}{3}x^5 + 2x^4 - x^3 + \frac{3}{5}x + 6$; $q(x) = (a - b)x^5 + (a + b)x^4 + cx^3 + (c + d)x + 6$
- $p(x) = 2ix^3 - 3x^2 + 2x$; $q(x) = (a - b)x^4 + bx^3 + (2c - d)x^2 + 2x + d$

5. Dado $p(x) = ix^4 + 5x^2 - x + (1 + i)$, obtenga: $p(0)$; $p(2i)$; $p(1 + i)$ y $p(2)$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma y Multiplicación

Veamos algunos ejemplos (notarás que son “procesos” conocidos)

$$p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6; \quad q(x) = x^4 + 10x^2 - x + 3, \quad r(x) = x^3 - 2x + 3$$

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) + (x^4 + 10x^2 - x + 3) = \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 + x^4 + 10x^2 - x + 3 = \\ &= (3x^4 + x^4) + (-2)x^3 + (5x^2 + 10x^2) + (x - x) + (6 + 3) = \\ &= 4x^4 + (-2)x^3 + 15x^2 + 0 + 9 \\ &= 4x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) + (-3)q(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) + (-3)(x^4 + 10x^2 - x + 3) = \\ &= 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 + (-3)x^4 + (-3) \cdot 10x^2 - (-3)x + (-3) \cdot 3 = \\ &= (3x^4 + (-3)x^4) + (-2)x^3 + (5x^2 + (-30)x^2) + (x + 3x) + (6 - 9) = \\ &= 0x^4 + (-2)x^3 + (-25)x^2 + 4x - 3 \\ &= -2x^3 + (-25)x^2 + 4x - 3 \end{aligned}$$

Una forma relativamente rápida es resolver como hicimos con la suma de números naturales en el ejemplo inicial del capítulo. Así en el primer caso quedaría:

$$\begin{array}{r} + \quad \begin{array}{r} p(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 \\ q(x) = x^4 + 0x^3 + 10x^2 - x + 3 \end{array} \\ \hline p(x) + q(x) = (3+1)x^4 + (-2)x^3 + (5+10)x^2 + (1-1)x + (6+3) \end{array}$$

$$\begin{aligned} p(x) \cdot r(x) &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot (x^3 - 2x + 3) = \\ &= (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot x^3 + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot (-2x) + \\ &\quad + (3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6) \cdot 3 \\ &= 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 6x^3 - 6x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 12x + \\ &\quad + 9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x + 18 \\ &= 3x^7 - 2x^6 - x^5 + 14x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 9x + 18 \end{aligned}$$

Más sencillo:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x + 6 \\ \times \quad \quad \quad x^3 - 2x + 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} 9x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 3x + 6 \\ + \quad \quad \quad -6x^5 + 4x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 12x \\ 3x^7 - 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 6x^3 \end{array} \\ \hline 3x^7 - 2x^6 - x^5 + 14x^4 - 10x^3 + 13x^2 - 9x + 6 \end{array}$$

A continuación, generalizaremos estos resultados:

Dados los polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$

• Definimos el polinomio **suma** de $p(x)$ y $q(x)$ al polinomio que se indica $p(x) + q(x)$ tal que:

*.Si $m=n$ entonces

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

*.Si $m \neq n$ se puede suponer, sin perder generalidad, que $m > n$.

Entonces, llamando $p^*(x)$ a:

$$p^*(x) = 0x^m + 0x^{m-1} + \dots + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad \text{definimos:}$$

$$p(x) + q(x) = p^*(x) + q(x)$$

• El polinomio que se indica $p(x) \cdot q(x)$ es el polinomio **producto** cuyos términos son de la forma: $a_i b_j x^{i+j}$ donde $i = 0, 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, 2, \dots, m$.

$$p(x) \cdot q(x) = a_n b_m x^{n+m} + \dots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + a_0 b_0$$

Práctica

6. Indica qué propiedades de la suma y multiplicación de números complejos cumplen la suma y multiplicación de polinomios. ¿Existe el elemento recíproco de cualquier polinomio? (es decir, ¿todo polinomio tiene un polinomio recíproco?)

7. ¿Cómo definiría la resta de polinomios? (Recuerda la definición de resta de números complejos)

8. Resuelva, en cada caso determine el grado del polinomio resultante:

a. $(x^3 - 2x^2 + ix) \cdot (x - 2)^2$

b. $(x - 2i) \cdot (x + 2i) + 3x \cdot (x - 1 + i)$

c. $(x^4 - (2 + i)x^3 - x^2 + x + 1) \cdot x + 5x$

9. Enuncie la propiedad del grado del polinomio suma de dos polinomios, y del polinomio producto.

10. Justifique el enunciado: " $p(x) \times q(x) = 0 \Leftrightarrow (p(x) = 0 \vee q(x) = 0)$ "

11. Obtenga el valor de las constantes a y b de forma que $(3x^a - 2x^2 + x) \cdot (x + b) = 3x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 5x$

División de polinomios

La división de polinomios tiene similitud con la división de números enteros.

¿Recuerdas cuando no conocías los números decimales?

$$\begin{array}{r} 50 \overline{) 48} \quad 4 \\ \underline{48} \quad 12 \\ 2 \end{array}$$

Teníamos un cociente (12) y un resto (2), el resto debía ser siempre menor que el divisor (4). Para verificar que estaba bien resuelta la cuenta hacíamos:

$$12 \times 4 + 2 \text{ y eso debía darnos el dividendo (50)}$$

Cuando resolvamos la división de dos polinomios obtendremos un polinomio cociente y un polinomio resto, la condición que deberá cumplir este último es que sea nulo o su grado sea menor que el del divisor.

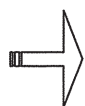
En general si tenemos un polinomio $p(x)$ de grado mayor o igual al del polinomio $q(x)$ podremos realizar la división $p(x) \div q(x)$, obteniendo un polinomio cociente $c(x)$ y un polinomio resto $r(x)$.

Cumpléndose lo siguiente:

$$(*) \boxed{p(x) = c(x) \cdot q(x) + r(x)}$$

Donde $gr[r(x)] < gr[q(x)]$ ó $r(x) \equiv 0$

La división será válida para toda $x / q(x) \neq 0$



Tener en cuenta que el grado del cociente será la resta de los grados de p y q

¿Cómo obtenemos los polinomios cociente y resto? Veamos lo que denominamos la "división clásica"

$$\bullet (2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2) \div (x^2 - 3x + 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2 \overline{) x^2 - 3x + 1} \\ \underline{2x^4 - 6x^3 + x^2} \\ 3x^3 + 2x^2 + 5x + 2 \\ \underline{3x^3 - 9x^2 + 3x} \\ 11x^2 + 2x + 2 \\ \underline{11x^2 - 33x + 11} \\ 35x - 9 \end{array}$$

El polinomio p en este caso está completo, sino debe completarse!

Cálculos auxiliares

$$\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2 \quad \frac{3x^3}{x^2} = 3x$$

$$\frac{11x^2}{x^2} = 11$$

Tenemos entonces que:

$$c(x) = 2x^2 + 3x + 11 \text{ y}$$

$$r(x) = 35x - 9$$

$$\bullet (3x^5 + 4x^2 - 12x - 17) \div (x^2 - 2)$$

Tenemos entonces que:

$$c(x) = 3x^3 + 6x + 4 \quad \text{y} \quad r(x) = -9$$

$$\begin{array}{r} 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \overline{) x^2 + 0x - 2} \\ \underline{3x^5 + 0x^4 - 6x^3} \\ 6x^3 + 4x^2 - 12x - 17 \\ \underline{6x^3 + 0x^2 - 12x} \\ 4x^2 + 0x - 17 \\ \underline{4x^2 + 0x - 8} \\ -9 \end{array}$$

Cálculos auxiliares

$$\frac{3x^5}{x^2} = 3x^3 \quad \frac{6x^3}{x^2} = 6x$$

$$\frac{4x^2}{x^2} = 4$$

Teniendo en cuenta lo que escribimos en (*) en la página 128, podemos reescribir:

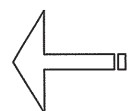
$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \text{ quedando entonces, en los ejemplos de la misma página:}$$

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2 + 5x + 2}{x^2 - 3x + 1} = 2x^2 + 3x + 11 + \frac{35x - 9}{x^2 - 3x + 1}$$

$$\frac{3x^5 + 4x^2 - 12x - 17}{x^2 - 2} = 3x^3 + 6x + 4 + \frac{-9}{x^2 - 2}$$

Como vemos en estas expresiones, la división entre polinomios no siempre nos devuelve un polinomio (como la división entre dos números naturales no tiene porque dar un número natural!). Para que esto suceda el resto deberá ser cero... ¿No te resulta conocido esto?

Cuando al dividir un polinomio p por otro polinomio q el resto de dicha operación resulte ser cero, diremos que p es divisible por q , también se dice que p es múltiplo de q , o que q divide a p .



Práctica

12. Indica, en cada caso, si el polinomio p es divisible por el polinomio q :

a. $p(x) = x^2 + 8x - 12$ y $q(x) = x - 5$

b. $p(x) = x^3 + 5x^2 - 3x + 6i$ y $q(x) = x^2 + x + 1$

c. $p(x) = 2x^5 + x^4 + (-2 - 7i)x^3 - (1 + i)x^2 + (25i - 25)x$ y $q(x) = x^2 - (1 + i)$

Cuando el divisor tenga la forma $x - \alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{C}$, el resto será un resto numérico.

Además tenemos al alcance otro procedimiento para obtener el cociente y resto, dicho procedimiento es la denominada **“Regla de Ruffini”**

A continuación veremos el paso a paso de cómo se utiliza esta regla.

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x - 12}{x - 3}$$

1º. Escribimos el dividendo en potencias decrecientes de x . Luego listamos todos los coeficientes de cada término en el dividendo. Si falta alguno, de cualquier exponente (menor al grado, claro está), se pone como coeficiente 0.

En nuestro ejemplo, los coeficientes son: 2; -5; 1 y -12

2º. Al dividir entre un binomio de la forma $x - \alpha$, colocamos α a la izquierda de los coeficientes y una fila más abajo.

Así:

2	- 5	1	- 12
3			

3º. En la tercera fila, debajo de la horizontal trazada copiamos el primer coeficiente.

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & \downarrow & & & \\ 3 & 2 & & & \end{array}$$

4º. Multiplicamos este número por α , lo colocamos debajo del segundo coeficiente y los sumamos al mismo.

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & + & & \\ 3 & 2 & 6 & & \end{array}$$

5º. Repetimos este proceso hasta el último coeficiente inclusive, es decir hasta el término independiente:

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & 6 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

6º. El número que se ubica en la última columna y fila es el resto de la división

Así:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & 1 & -12 \\ & & 6 & 3 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}$$

7º. Los otros números de la última fila constituyen los coeficientes del polinomio cociente, que tendrá un grado menos que el polinomio dividendo.

Entonces en nuestro ejemplo tenemos:

$$c(x) = 2x^2 + 1x + 4 = 2x^2 + x + 4$$

$$r(x) = 0$$

En definitiva, tenemos que:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + x - 12}{x - 3} = 2x^2 + x + 4 + \frac{0}{x - 3} = 2x^2 + x + 4$$

Ejemplos:

i. $\frac{5x^4 + x^2 + 3x + 4}{x - 2} = 5x^3 + 10x^2 + 21x + 45 + \frac{94}{x - 2}$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 5 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 10 & 20 & 42 & 90 & \\ \hline & 5 & 10 & 21 & 45 & 94 \end{array}$$

ii. $\frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1}{x + 2} = 2x^2 - 5x + 13 - \frac{25}{x + 2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & 10 & -26 & \\ \hline & 2 & -5 & 13 & -25 \end{array}$$

$$\text{iii. } \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 1}{x + i} = 2x^2 - (1 + 2i)x + 1 + i + \frac{2 - i}{x + i}$$

2	-1	3	1
$-i$	$-2i$	$-2 + i$	$1 - i$
2	$-1 - 2i$	$1 + i$	$2 - i$

$\mathcal{R}$

Práctica

13. En cada caso, encuentre los polinomios cociente y resto:

- | | |
|---|--|
| a. $(3x^4 - 2x^2 + 5x + 1) \div (x - 2)$ | d. $(x^4 + x^3 + ix^2 + x + 1) \div (x - i)$ |
| b. $(x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x) \div (x - 1)$ | e. $(x^3 + x^2 + x + 1) \div (x - (1 + i))$ |
| c. $(x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2) \div (x + 1)$ | f. $(x^5 + 1) \div (x - 1)$ |

14. Dado el polinomio p , obtenga el valor numérico que se pide:

- | | |
|--|---|
| a. $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 1$; $p(2)$ | d. $p(x) = x^4 + x^3 + ix^2 + x + 1$; $p(i)$ |
| b. $p(x) = x^5 + x^4 + x^3 - x^2 + x$; $p(1)$ | e. $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$; $p(1 + i)$ |
| c. $p(x) = x^5 + 2x^3 + 3x^2 + 2$; $p(-1)$ | f. $p(x) = x^5 + 1$; $p(1)$ |

→ Si observas detenidamente, los polinomios p indicados en cada ítem son los mismos que figuran como dividendo en el ejercicio 13. Compara los restos obtenidos en el ejercicio 13 con los valores numéricos que obtuviste recién. ¿Puedes conjeturar alguna propiedad?

Lo observado en este ejercicio no es casual, en efecto, tomando el primer ítem del 13, tenemos que el cociente es: $c(x) = 3x^3 + 6x^2 + 10x + 25$ y el resto es 51. Con lo cual podríamos reescribir el dividendo de la siguiente forma:

$$p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5x + 1 = (3x^3 + 6x^2 + 10x + 25) \cdot (x - 2) + 51.$$

Entonces:

$$p(2) = 3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = (3 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 10 \cdot 2 + 25) \cdot (2 - 2) + 51 = 0 + 51 = 51$$

Esta conjetura se generaliza en el denominado *Teorema del Resto*.

Teorema del resto

El **resto** de la división de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$; con $\alpha \in \mathbb{C}$ es igual a $p(\alpha)$.

Demostración:

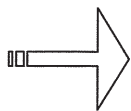
Al dividir el polinomio p por otro de la forma $x - \alpha$, se obtiene un cociente $c(x)$ y un resto (numérico) r . Y podemos reescribir al polinomio p como:

$p(x) = c(x) \cdot (x - \alpha) + r$. Entonces, al reemplazar x por α nos queda:

$$p(\alpha) = c(\alpha) \cdot (\alpha - \alpha) + r = c(\alpha) \cdot 0 + r = 0 + r = r$$

Raíces de un polinomio

Un número complejo α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si **$p(\alpha)=0$** .



Entonces, cuando resolvíamos ecuaciones cuadráticas $ax^2 + bx + c = 0$, encontrábamos las raíces del polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$

Relacionando todo lo que hemos aprendido hasta ahora sobre división de polinomios, podemos afirmar que:

Un número complejo α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(x)$ es **divisible** por $x - \alpha$

Práctica:

15. Determine el valor de la constante k , de modo que 2 sea raíz del polinomio $p(x) = x^4 + 3kx^3 - 6x^2 - 12$

16. Determine el valor de la constante k , de modo que el resto de dividir $p(x) = kx^3 - 4x^2 + 6x - 1$ por $q(x) = x - 3$ dé 62.

17. Realice varios ejemplos y, a partir de ellos, conjeture para qué valores de $n \in \mathbb{N}$, el polinomio p resulta divisible por q .

$p(x)$	$q(x)$	$p(x)$ divisible por $q(x)$ para n
$x^n + a^n$	$x + a$	
$x^n + a^n$	$x - a$	
$x^n - a^n$	$x + a$	
$x^n - a^n$	$x - a$	

Esta ecuación se llama ECUACIÓN POLINÓMICA

18. Halle las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$. Sugerencia: Recuerda la condición de anulación del producto y factoriza el polinomio.

19. El polinomio $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tiene sus coeficientes reales y positivos. Si este polinomio admite una raíz real, ¿cuál es su signo?

20. Demuestre que los polinomios $p(x)$ y $q(x) = k \cdot p(x)$, con k constante, tienen las mismas raíces.

Resolución:

Si α es raíz de p , significa que $p(\alpha) = 0$, entonces $q(\alpha) = k \cdot p(\alpha) = k \cdot 0 = 0$. Luego α es raíz de q .

Una forma de “verificar” las raíces reales de un polinomio es usando geogebra para graficar la función polinómica y viendo su intersección con el eje x

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Nuestros esfuerzos a continuación estarán focalizados en poder factorizar un polinomio, hemos visto en capítulos anteriores cómo factorizar una expresión algebraica con algunos métodos (factor común, trinomio cuadrado perfecto, y más), éstos serán válidos para polinomios también, pero a ellos sumaremos cuestiones relacionadas con la división.

Por eso es necesario analizar cuáles son las raíces de un polinomio, cuántas tiene. En el proceso de búsqueda de raíces serán de utilidad las propiedades que veremos a continuación. Tener en cuenta también que la Regla de Ruffini (conociendo además el Teorema del Resto) es una herramienta práctica para determinar si un número dado resulta raíz del polinomio o no.

Teorema Fundamental del Álgebra

Un polinomio $p(x)$, tal que $\text{gr}[p(x)] > 0$, admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$

Este teorema permite probar que todo polinomio de grado $n > 0$, tiene exactamente n raíces (no necesariamente distintas) y además se puede descomponer, de forma única, en producto de n factores.

Orden de multiplicidad de una raíz

α es raíz de multiplicidad k del polinomio $p(x)$, si el mismo es divisible por $(x - \alpha)^k$ y no por $(x - \alpha)^{k+1}$

Teorema de la descomposición factorial

Todo polinomio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo, admite una única descomposición en factores de la forma:

$$p(x) = a_n \cdot (x - \alpha_1)^{k_1} \cdot (x - \alpha_2)^{k_2} \cdot \dots \cdot (x - \alpha_j)^{k_j}$$

Donde $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_j$ son j raíces distintas del polinomio y $k_1; k_2; \dots; k_j$ sus respectivas multiplicidades (por lo que $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$)

Ejemplos

- i. El polinomio $p(x) = 4x^2 + 8x - 12$ tiene las raíces 1 y -3 (se encuentran con la resolvente), entonces queda: $p(x) = 4 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$
- ii. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 1$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 1^3 - 1 = 0$. Al dividir p por el polinomio $x - 1$, se obtiene el cociente $c(x) = x^2 + x + 1$. Con lo cual nos

queda el polinomio $p(x) = (x^2 + x + 1) \cdot (x - 1)$. Debido a que uno de los factores es cuadrático podemos encontrar sus raíces usando resolvente. Las raíces de $c(x) = x^2 + x + 1$ son $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, con lo cual $c(x) = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)$.

Así, entonces, el polinomio p queda factorizado de la siguiente forma:

$$p(x) = \left(x - \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) \cdot (x - 1)$$

iii. Sea el polinomio $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$. Nos queda entonces: $p(x) = (x^2 - x - 6) \cdot (x - 1)$. Luego, como en el ejemplo anterior, con la resolvente obtenemos las raíces de $x^2 - x - 6$, que son -2 y 3.

Así, nos queda factorizado: $p(x) = (x + 2) \cdot (x - 3) \cdot (x - 1)$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & -2 & -5 & 6 & \\ 1 & & 1 & -1 & -6 & \\ \hline & 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

iv. Sea el polinomio $p(x) = 3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 9x - 6$ tiene una raíz que es 1, en efecto: $p(1) = 3 \cdot 1^4 - 9 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 6 = 0$. Así nos queda:

$p(x) = (3x^3 - 6x^2 - 3x + 6) \cdot (x - 1)$. El cociente también tiene como raíz a 1, y queda:

$$3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = (3x^2 - 3x - 6) \cdot (x - 1)$$

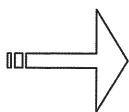
$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 3 & -9 & 3 & 9 & -6 \\ 1 & & 3 & -6 & -3 & 6 \\ \hline & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 \\ 1 & & 3 & -3 & -6 & \\ \hline & 3 & -3 & -6 & 0 & \end{array}$$

Ahora tenemos un polinomio cuadrático $3x^2 - 3x - 6$, usando resolvente tenemos como raíces a 2 y -1, entonces $3x^2 - 3x - 6 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)$.

Finalmente el polinomio p queda:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)^2$$

Tenemos ahora que las raíces de p son 2, -1 y la raíz 1 es de multiplicidad 2.



Como habrás notado en los ejemplos se hacen todos los esfuerzos para llegar a un polinomio cuadrático, al cual le podemos encontrar las raíces (sean de la naturaleza numérica que sea) usando una fórmula simple como es la resolvente.

Ahora bien, en estos últimos ejemplos detectamos a la raíz 1 rápidamente, porque, en definitiva, es fácil hacer “las cuentas” con este número. Pero no siempre es así.

Veremos algunos métodos para encontrar distintas raíces. Desde ya te vamos advirtiendo que no siempre podremos detectar todas las raíces de un polinomio cuando este no sea cuadrático.

Práctica

21. Dado el polinomio $p(x) = x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 28x + 60$, se sabe que 2 es raíz de multiplicidad doble. Factoriza de forma completa al polinomio p .

22. En cada caso, escribe el polinomio p dado:

a. Es de grado 3, tiene como coeficiente principal a 2 y sus raíces son 1; -3 y 5

b. Es de grado 3, sus raíces son 1; 3 y -1, y $p(5) = 10$.

Resolución: $p(x) = a_3 \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+1)$, esto lo pudimos escribir usando el dato que teníamos de las raíces del polinomio, para obtener el coeficiente principal usaremos el dato restante. $p(5) = a_3 \cdot (5-1) \cdot (5-3) \cdot (5+1) = 48a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = \frac{10}{48} = \frac{5}{24}$

$$\text{Luego } p(x) = \frac{5}{24} \cdot (x-1) \cdot (x-3) \cdot (x+1) = \frac{5}{24}x^3 - \frac{5}{8}x^2 - \frac{5}{24}x + \frac{5}{8}.$$

c. Es de grado 3, sus raíces son 2; 1 y -2, y $p(-1) = 6$.

23. Simplifique cada una de las expresiones

a. $\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

b. $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

Resolución:

Factoreamos numerador y denominador. Éste último lo podemos resolver desde el capítulo 2, en efecto es un trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

El numerador, en cambio, se ajusta a lo último visto, en efecto se puede “ver” que 2 es una raíz de $x^3 - 8$, con Ruffini encontramos el polinomio cociente $x^2 + 2x + 4$, a su vez las raíces de éste son $-1 \pm i$. Finalmente: $x^3 - 8 = (x-2) \cdot (x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))$

Ahora que tenemos numerador y denominador factorizados, reescribimos la fracción y simplificamos:

$$\begin{aligned} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4x + 4} &= \frac{(x-2) \cdot (x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))}{(x-2)^2} = \frac{(x - (-1+i)) \cdot (x - (-1-i))}{x-2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 4}{x-2} \end{aligned}$$

c. $\frac{x^4 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

POLINOMIOS A COEFICIENTES REALES

Cuando se tenga un polinomio a coeficientes reales, y éste admita una raíz compleja, entonces admite también como raíz a su conjugada.

-Como habrás notado en los ejemplos de las páginas 133 y 134 que eran todos polinomios a coeficientes reales-

En símbolos:

$$\text{Si } p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in R[x] \text{ y } \alpha \in C \text{ es raíz de } p, \\ \text{entonces } p(\overline{\alpha}) = 0$$

Demostración:

Como $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, y $\alpha \in C$ es raíz, se

tiene $p(\alpha) = \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0$, entonces

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{k=0}^n a_k \overline{\alpha}^k = \sum_{k=0}^n a_k \overline{\alpha^k} = \sum_{k=0}^n \overline{a_k \alpha^k} = \overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Práctica

24. Obtenga la descomposición factorial del polinomio $p(x) = x^4 - x^3 - 12x^2 + 26x - 24$, sabiendo que una de sus raíces es $-1 - i$.

25. Obtenga el polinomio a coeficientes reales de menor grado posible que admite como raíces a $2+i$, 3 de multiplicidad 2 y 5 como raíz simple. También se sabe que el coeficiente principal es 1.

26. Determine el valor de β para que el polinomio p sea a coeficientes reales. *Sugerencia:* evite hacer cálculos innecesarios. $p(x) = (x - (2+i))(x - \beta)(x+2)^3$

POLINOMIOS A COEFICIENTES ENTEROS

Para polinomios cuyos coeficientes son todos números enteros tenemos una forma de detectar posibles raíces racionales del mismo. Dicho método es debido a Gauss.

Teorema de Gauss

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in Z[x]$ admite la raíz $\frac{p}{q}$ con p y q enteros coprimos y $q \neq 0$, entonces:

- a_0 es múltiplo de p
- a_n es múltiplo de q

Con este método tenemos una herramienta para “empezar” la búsqueda de las raíces de un polinomio dado (a coeficientes enteros)

Veamos cómo con un ejemplo:

Sea $p(x) = 2x^3 - 7x^2 - 27x - 18$. Como se trata de un polinomio a coeficientes enteros es posible aplicar el Teorema de Gauss; entonces;

Divisores de $a_0 = -18$: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6 ; ± 9 ; ± 18

Divisores de $a_n = 2$: ± 1 ; ± 2

Posible raíces racionales: ± 1 ; ± 2 ; ± 3 ; ± 6 ; ± 9 ; ± 18 ; $\pm \frac{3}{2}$; $\pm \frac{9}{2}$; $\pm \frac{1}{2}$

$\alpha_1 = -1$ es raíz, pues $P(-1) = 0$.

Con esto sabido, aplicamos Ruffini para obtener el cociente, que será cuadrático y para hallar sus raíces, por tanto, usaremos resolvente.

2	-7	-27	-18
-1	-2	9	18
2	-9	-18	0

8

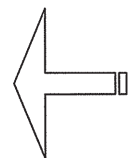
Las raíces de $2x^2 - 9x - 18$ son $-\frac{3}{2}$ y 6.

Así, el polinomio factorizado queda

$$p(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \cdot (x - 6) \cdot (x + 1)$$

Sea un polinomio $P(x)$ a coeficientes enteros:

- Si el coeficiente principal es 1 y P tiene raíces racionales, éstas serán enteras.
- Si p es un divisor del término independiente y q lo es del coeficiente principal, $\frac{p}{q}$ no necesariamente será raíz del polinomio P .
- Si el término independiente es cero, entonces una raíz del polinomio es cero.



Práctica

27. Calcule las raíces de los polinomios y factorice:

a. $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$

b. $s(x) = 2x^3 + 5x^2 - 23x + 10$

c. $h(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$

d. $q(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 12x + 4$

Funciones Racionales

Llamaremos Función Racional a aquella cuya fórmula es el cociente entre dos polinomios. Es decir:

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ donde } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios.}$$

El dominio de definición de una función racional es de todos los valores reales tales que $q(x) \neq 0$.

Polinomio Mínimo común múltiplo de varios polinomios

Será aquel polinomio de menor grado posible que es simultáneamente divisible por cada uno de ellos.

Práctica

28. Encuentre el mínimo común múltiplo, en cada caso.

a. $x^2 - 1$; $x^2 - 2x + 1$ y x

Resolución:

Primero se debe factorizar a cada uno de los polinomios, así:

$$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x = x$$

Así, el polinomio mínimo común múltiplo es $(x - 1)^2 \cdot (x + 1) \cdot x$

b. $x^2 - 9$; $x^2 + 6x + 9$

c. $x^2 - 4$; $x - 2$ y x^2

Operaciones con funciones racionales.

Multiplicación

Veamos con un ejemplo:

$$\frac{x-2}{3x} \cdot \frac{x^2-5x}{x^2-7x+10} = \frac{(x-2) \cdot (x^2-5x)}{3x \cdot (x^2-7x+10)} = \frac{\cancel{(x-2)} \cdot x \cdot \cancel{(x-5)}}{3 \cdot x \cdot \cancel{(x-2)} \cdot \cancel{(x-5)}} = \frac{1}{3}$$

Para multiplicar, usaremos la siguiente regla: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$, donde $b \neq 0 \wedge d \neq 0$

Y realizaremos el siguiente proceso:

1. Usamos la regla para multiplicar
2. Factorizamos numerador y denominador
3. Cuando sea posible, simplificamos.

División

Veamos con un ejemplo para recordar

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x + 2}{x} = \frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x}{x + 2} = \frac{(x^2 - 4) \cdot x}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 2) \cdot x}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{(x - 2) \cdot x}{x + 1}$$

Suma y resta

Veamos con ejemplos:

i.
$$\frac{x+1}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = \frac{x+1}{(x-3) \cdot (x+3)} + \frac{x}{x+3} = \frac{(x+1) + x \cdot (x-3)}{(x-3) \cdot (x+3)} =$$

$$= \frac{x+1+x^2-3x}{(x-3) \cdot (x+3)} = \frac{x^2-2x+1}{(x-3) \cdot (x+3)}$$

Descomponer en factores los denominadores

Denominador común: mínimo común múltiplo

Las igualdades son válidas en tanto $x \neq -3$ y $x \neq 3$

ii.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{x^2-1} &= \frac{x+1}{x^2} - \frac{x}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{(x+1) \cdot (x^2-1) - x \cdot x^2}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \\ &= \frac{x^3 + x^2 - x - 1 - x^3}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)} \end{aligned}$$

Las igualdades son válidas en tanto $x \neq -1$; $x \neq 1$ y $x \neq 0$.

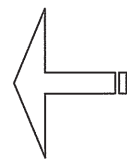
Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales debemos tener en cuenta las siguientes reglas:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \quad c \neq 0 \qquad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}; \quad c \neq 0$$

Entonces cuando se suman (o restan) funciones racionales con denominador común, lo que debemos hacer es sumar (o restar) los numeradores.

En caso de ser posible se simplifica.

Cuando no el denominador no sea común a todos los términos, entonces, se debe obtener. Para ello tener en cuenta que el “más” sencillo para adoptar como denominador común es el polinomio mínimo común múltiplo de los polinomios denominadores de cada uno de los términos.



Práctica

29. Resuelva las operaciones indicadas:

a. $\frac{x}{x+1} - \frac{2}{x-1}$

b. $\frac{2}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-1}$

$$\text{c. } 3 - \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$\text{d. } \frac{x^3}{x^3 - 1} \div \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{e. } \frac{\frac{x}{x+2}}{\frac{x^2}{x^3 + 8}} \times \frac{1}{x}$$

$$\text{f. } \frac{x-2}{x^3 - 3x^2 + 3x + 6}$$

30. En cada caso encuentre los valores de las constantes reales A, B y C.

$$\text{a. } \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{5x+1}{(x-1) \cdot (x+2)}$$

$$\text{b. } \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{5x^2+3x+4}{(x^2+1) \cdot (x+1)}$$

Resolución:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} = \frac{(Ax+B) \cdot (x+1) + C(x^2+1)}{(x^2+1) \cdot (x+1)} = \frac{5x^2+3x+4}{(x^2+1) \cdot (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Ax+B) \cdot (x+1) + C(x^2+1) = 5x^2 + 3x + 4 = (A+C)x^2 + (A+B)x + (B+C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=5 \\ A+B=3 \Rightarrow A=2; B=1; C=3 \\ B+C=4 \end{cases}$$

$$\text{c. } \frac{A}{x-1} - \frac{B}{x+1} = \frac{3-x}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

$$\text{d. } \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x+2} = \frac{3x^2+5x+4}{(x^2+x+1) \cdot (x+2)}$$

31. Resuelve las siguientes ecuaciones. Verifica los resultados

$$\text{a. } \frac{(x-2)^2}{x-1} + 3 = \frac{x+1}{x-1}$$

Resolución:

$$\left[\frac{(x-2)^2}{x-1} + 3 \right] \cdot (x-1) = x+1 \Rightarrow (x-2)^2 + 3 \cdot (x-1) = x+1$$

$$x^2 - 4x + 4 + 3x - 3 = x+1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=2$$

$$\text{Ahora se debe verificar: } x=0: \frac{(0-2)^2}{0-1} + 3 = -4 + 3 = -1 = \frac{0+1}{0-1} \checkmark$$

$$x=2: \frac{(2-2)^2}{2-1} + 3 = 0 + 3 = 3 = \frac{2+1}{2-1} \checkmark$$

Rta.: $x=0, x=2$

$$\text{b. } \frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-2}$$

$$\text{c. } \frac{x+1}{x} = 2 - \frac{x-1}{x}$$