CURSO INTRODUCTORIO 2013

MATEMÁTICA

Martha Elena Guzmán

Guzmán, Martha Elena
Matemática: Curso Introductorio 2013. - 1a ed. - Rosario: UNR Editora.
Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, 2009.
244 p.; 29,7 x 21 cm.

ISBN 978-950-673-764-1

1. Matemática. 2. Enseñanza Superior. I. Título
CDD 510.711

Fecha de catalogación: 13/07/2009

Título:
Matemática: Curso Introductorio 2013

Edición Nº 1
1.100 Ejemplares

Esta edición se terminó de imprimir en el mes de Julio de 2012
en los Talleres Gráficos de TECNIGRAFICA
Avda. Pte. Perón 3747 - 2000 Rosario - República Argentina

INTRODUCCIÓN

En Matemática es fundamental que el conocimiento adquirido en un determinado contexto sea trasladado al aprendizaje de situaciones nuevas.

Por esta razón, se ofrece este curso que pretende recuperar un conjunto de contenidos, de la Matemática elemental, que son básicos para la comprensión de las materias que tienen a la Matemática como tema central o como herramienta de apoyo.

Con el objetivo de realizar una puesta al día de esos contenidos se ha organizado el material en once capítulos, en los que se dan definiciones, se recuerdan operaciones, se enuncian propiedades. A continuación se presentan ejercicios y problemas para resolver.

Es precisamente éste el tema central del curso, ya que la resolución de problemas:

- Facilita el aprendizaje de los conceptos.
- Ayuda a comprender el carácter dinámico de la Matemática.
- Estimula el pensamiento independiente.
- Reclama el gusto por descubrir, por cuestionar, por asumir el protagonismo del propio aprendizaje.
- Provoca satisfacción por el logro obtenido.

Al término de cada capítulo se propone una ejercitación para autoevaluación. Se incluyen además problemas y algunos acertijos que se presentan como pasatiempo, pero su sentido va más allá de una simple recreación, ya que ponen a prueba la comprensión, la curiosidad, la capacidad creativa y el ingenio, y permiten utilizar los conocimientos con decisión y soltura.

El material ofrecido exige, para su comprensión y resolución una base mínima de conocimientos puesto que los temas que se tratan han sido desarrollados en su gran mayoría, en la escuela media. Sin embargo, es oportuno recomendar:

- Hacer una lectura atenta y dedicada, teniendo presente que la misma servirá, particularmente, para facilitar el acceso a la Matemática que se aprende en el nivel universitario.
- Ordenar y disponer de tiempo suficiente para comprometerse con el aprendizaje, que requiere de un esfuerzo continuado.
- Resolver los ejercicios y problemas y sólo después consultar en "Soluciones".
- Realizar las autoevaluaciones, confrontar los resultados y reflexionar sobre los propios avances.
- Compartir con compañeros y docentes para superar dificultades y discutir estrategias y soluciones.

También es conveniente tener en cuenta al abordar la resolución de un problema las siguientes pautas:

- Tratar de entender a fondo el enunciado, con tranquilidad, a su ritmo.
- Analizar qué pide el problema, cuáles son sus incógnitas, cuáles son sus datos.
- Si es posible realizar un esquema, figura o diagrama.
- Probar, experimentar, buscar un problema semejante.
- Intentar diseñar una estrategia de solución.
- Llevarla a cabo, revisar el proceso, verificar.
- Reflexionar sobre lo que ha hecho y sacar conclusiones para el futuro.

Por último, bajo el título de "Miscelánea", se presentan ejercicios y problemas. Los mismos se elaboraron con diferentes grados de dificultad y sin seguir un orden temático, con la intención de realizar una revisión integradora de los contenidos tratados en el material.

Recuerde que:

- Aprender es descubrir por sí mismo.
- La autosatisfacción es el primer objetivo a lograr.
- La Matemática rigurosa se aprende con la mente, pero la Matemática hermosa se aprende con el corazón.

Martha E. Guzmán

CONTENIDOS

CAPÍTULO 1 - CONJUNTOS

En Matemática se consideran algunas **"nociones primitivas"** que en determinado momento se aceptan sin definir con precisión. Tal es el caso de la noción de **conjunto**, para la que se adopta la idea sugerida por la intuición como agrupamiento o colección de objetos.
Casi todos los objetos matemáticos son conjuntos, independientemente de otras propiedades adicionales que los caracterizan, razón por la que se puede decir que la Teoría de Conjuntos constituye, en cierto sentido, la base sobre la que se construye prácticamente toda la Matemática.

Una colección de elementos es un conjunto cuando es posible decidir, sin ambigüedades, si un objeto dado pertenece o no a la misma.

Ejemplos:
i) los puntos de una figura
ii) los alumnos de un curso determinado
iii) las letras del alfabeto
iv) los números enteros mayores que -3 y menores que 3

Generalmente se emplean letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ para representar conjuntos y letras minúsculas para designar elementos.
Así, $a \in A$ indica que a es un elemento del conjunto A. A su vez, se indica $b \notin A$ para representar el hecho de que b no pertenece a A.
Una forma de describir un conjunto finito, es escribir entre llaves una lista de los elementos que lo constituyen. En este caso se dice que el conjunto se ha dado por **extensión**.

El conjunto del ejemplo (iv) se expresa por extensión: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Observe que: $1 \in A$ y $-3 \notin A$.
En otras situaciones, el conjunto se describe especificando una propiedad que lo caracteriza. En este caso se dice que el conjunto se da por **comprensión**.
Generalmente se emplea la notación $P(x)$ para indicar la propiedad que poseen los elementos x pertenecientes a A, de modo que el conjunto se expresa por comprensión:

$$A = \{x / P(x)\}$$

El conjunto A del ejemplo (iv) se expresa por comprensión:

$$A = \{x \in \mathbf{Z} / -3 < x < 3\}$$

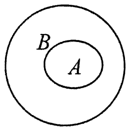
Notación para los conjuntos numéricos.
$\mathbf{N} = \{x / x$ es un número natural$\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbf{N_0} = \{x / x = 0$ o x es un número natural$\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbf{Z} = \{x / x$ es un número entero$\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbf{Q} = \{x / x$ es un número racional$\}$
$\mathbf{Q}^{+} = \{x / x$ es un número racional positivo$\}$
$\mathbf{R} = \{x / x$ es un número real$\}$
$\mathbf{R}^{+} = \{x / x$ es un número real positivo$\}$

Subconjuntos

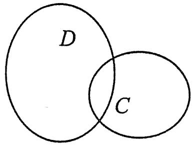
Si todo elemento de un conjunto A es también un elemento de otro conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** de B, o que A está contenido o incluido en B, o que A es parte de B, o que B contiene o incluye a A. Se indica $A \subset B$.
Con la notación $A \not\subset B$ se indica que A no es subconjunto de B. En símbolos:

$$\boxed{A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)}$$

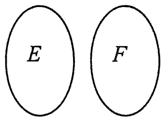
Para mostrar relaciones entre conjuntos, es de utilidad emplear los **diagramas de Venn.** Así por ejemplo las relaciones de inclusión y de no inclusión se representan del siguiente modo:



$A \subset B$



$C \not\subset D$

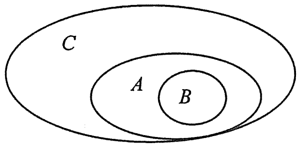


$E \not\subset F$

Ejemplos:

Dados $A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{1, 2\}$; $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Se verifica que: $A \subset C$, $B \subset A$, $B \subset C$, $A \not\subset B$, $C \not\subset A$



↬ OBSERVACIONES:

- Para probar que un conjunto A no es subconjunto de otro B, es suficiente mostrar un elemento a en A tal que a no pertenezca a B.
- Todo conjunto A es subconjunto de sí mismo.

$$A \subset A \;, \forall A.$$

Conjunto universal y conjunto vacío

En la Teoría de Conjuntos se admite la existencia de un conjunto llamado **universal** o **referencial** U. A partir de este conjunto, determinado para un cierto contexto, se supone que cada conjunto considerado en ese contexto es subconjunto de U.

Así, por ejemplo, el conjunto de todas las rectas del plano, se constituye en conjunto referencial para los distintos conjuntos de rectas; por ejemplo: rectas paralelas, rectas que pasan por un mismo punto, etc.

El conjunto U puede variar. Un mismo conjunto puede admitir distintos conjuntos universales.

Ejemplos:

i) Los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ y $B = \{x / x$ es natural y $2 \le x \le 12\}$

admiten los universales:

$U_1 = \mathbb{Z}$

$U_2 = \{x / x \in \mathbb{N}$ y $2 \le x \le 12\}$

$U_3 = \mathbb{N}$

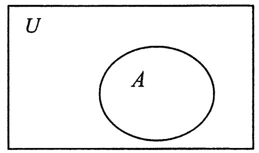
ii) Del mismo modo

$U_1 = \{x / x$ es habitante de Argentina $\}$ o

$U_2 = \{x / x$ es habitante de América $\}$

son universales para $G = \{x / x$ es ciudadano argentino $\}$

En los diagramas de Venn, se dibuja un rectángulo para representar U.



El **conjunto vacío** se define como el conjunto que no tiene elementos y se nota $\varnothing$ o $\{\}$.

↬ OBSERVACIÓN:

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto A, $\varnothing \subset A$, $\forall A$

Conjuntos iguales

Dos conjuntos A y B son **iguales** cuando todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A.

En símbolos, se expresa la igualdad del siguiente modo:

$$\boxed{A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)}$$

Ejemplos:

i) $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9\}$ y $B = \{-3, 3\}$ son conjuntos iguales ya que $A \subset B$ y $B \subset A$

ii) $C = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 < 25\}$ y $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ no son iguales pues $5 \in D$ y $5 \notin C$

iii) $E = \{x / x$ es un número primo par$\}$ y $F = \{2\}$ son conjuntos iguales.

➲ EJERCICIOS:

1- Sea $A=\{1,2,3,7\}$. Identifique cada uno de los siguientes casos como verdadero (V) o falso (F).

i) $\{1, 5\} \subset A$

ii) $\{x / x \in \mathbb{Z} \wedge |x| < 4\} \subset A$

iii) $\{1\} \in A$

iv) $\varnothing \subset A$

v) $A \subset \{9,7,5,3,2,1\}$

2- Verifique en el diagrama de Venn que sigue si los siguientes enunciados son verdaderos (V) o falsos (F).

i) $A \subset B$

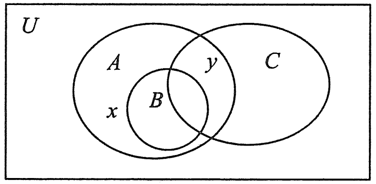
ii) $y \in B$

iii) $x \in B$

iv) $x \in A$

v) $C \subset B$

vi) $y \in C$



OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

En lo que sigue se definen nuevos conjuntos a partir de conjuntos dados, considerados subconjuntos de un mismo conjunto universal U.

Unión de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, se define su **unión** como el conjunto de los elementos que pertenecen a A o a B. Se nota $A \cup B$. En símbolos:

$$\boxed{A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}}$$

✎ OBSERVACIÓN:

$x \in A \cup B$ significa que x es un elemento de A o que x es un elemento de B o que x pertenece a ambos conjuntos.

Ejemplos:

i) $A=\{1,2,3\}$; $B=\{1,2,4,7,9\}$, entonces $A \cup B = \{1,2,3,4,7,9\}$

ii) $A=\{a\}$; $B=\{a,b,c,d\}$, entonces $A \cup B=\{a,b,c,d\}$

iii) $A=\{1,3,5,7\}$; $B=\{2,4\}$, entonces $A \cup B=\{1,2,3,4,5,7\}$

Intersección de conjuntos

Dados los conjuntos A y B, se define su **intersección** como el conjunto de los elementos comunes a ambos. Se nota $A \cap B$. En símbolos:

$$\boxed{A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}}$$

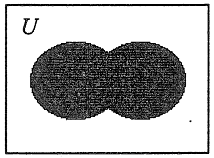
Para los conjuntos de los ejemplos anteriores:

i) $A \cap B = \{1,2\}$

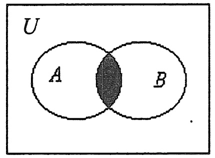
ii) $A \cap B = \{a\}$

iii) $A \cap B = \varnothing$

Por medio de diagramas de Venn se representan $A \cup B$ y $A \cap B$ por las regiones sombreadas.



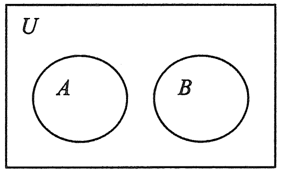
$A \cup B$



$A \cap B$

Conjuntos disjuntos

Los conjuntos A y B se llaman **disjuntos** si no tienen elementos comunes. Entonces, A y B son disjuntos si y solo si $A \cap B = \varnothing$.



$A \cap B = \varnothing$

↬ OBSERVACIÓN:

Las operaciones definidas pueden extenderse a un número finito de conjuntos.

Así, por ejemplo, para los conjuntos A, B, C se define:

Unión: $A \cup B \cup C = \{x / x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$

Intersección: $A \cap B \cap C = \{x / x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\}$

Ejemplo:

Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$ entonces:

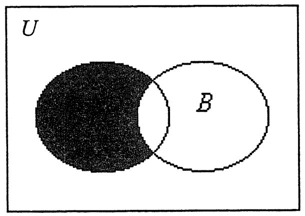
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad$ $A \cap B \cap C = \{3\}$

Diferencia de conjuntos

Dados los conjuntos A y B se define la **diferencia** entre A y B como el conjunto de los elementos de A que no pertenecen a B. Se nota $A - B$. En símbolos:

$$\boxed{A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}}$$

Por medio de diagramas de Venn se representa $A - B$ por la región sombreada.



$A - B$

Ejemplos:

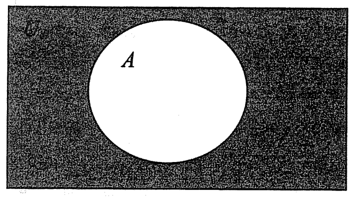
i) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2\}$, entonces $A - B = \{3,4\}$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{5, 6\}$, entonces $A - B = A$

iii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, entonces $A - B = \varnothing$

Complemento

Dado un conjunto A se llama **complemento** de A al conjunto de los elementos que no pertenecen a A, o, de acuerdo con la definición anterior, el complemento de A es la diferencia $U - A$. Se nota CA o $\overline{A}$.



Ejemplos:

i) Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $A = \{4, 5\}$, entonces $\overline{A} = \{1, 2, 3, 6\}$

ii) Si $U = \mathbb{N}$ y $A = \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $\overline{A}$ es el conjunto de los números naturales excepto los números $2, 4, 6, 8$; es decir:

$$\overline{A} = \mathbb{N} - \{2, 4, 6, 8\}.$$

iii) Si U es el abecedario y $A = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $\overline{A}$ es el conjunto de todas las consonantes.

iv) Si $U = \mathbb{N}_0$ y $A = \{\ x / x = 2k,\ k \in N_0\ \}$ entonces

$$\overline{A} = \{\ x / x = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}_0\ \}$$

v) Si $U = \mathbb{R}$ y $A = \mathbb{R}^+$ entonces $\overline{A} = \mathbb{R}_0^-$.

Propiedades de las operaciones entre conjuntos

Propiedad	
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$

Complemento	$\overline{\overline{A}} = A$ $A \cup \overline{A} = U$ $A \cap \overline{A} = \phi$ $\overline{\phi} = U$ $\overline{U} = \phi$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

➲ EJERCICIOS:

3- Para el referencial $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y los conjuntos:

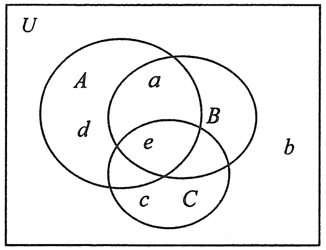
$A = \{1,2,3,7\}$; $B = \{4,5,6,7\}$; $C = \{1,3,6\}$ y $D = \{2,6,7\}$.

Calcule:

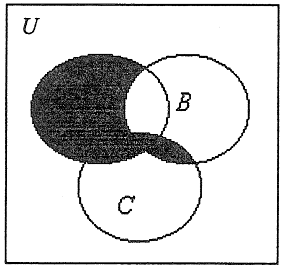
i) $A \cup B$	vi) $A - B$	xi) $C - B$
ii) $A \cap B$	vii) $\overline{A}$	xii) $(C-B) \cup (B-C)$
iii) $B \cup C$	viii) $\overline{\overline{D}}$	xiii) $(A \cap B) \cup C$
iv) $A \cap B \cap C$	ix) $\overline{A \cup B}$	xiv) $\overline{B} \cap C$
v) $A \cap (B \cup C)$	x) $\overline{A} \cap \overline{B}$	xv) $\overline{A \cap B}$

4- Atendiendo a la figura, identifique los casos enunciados como verdaderos (V) o falsos (F).

i) $a \in A \cap B$	vi) $c \in A - B$
ii) $b \in B \cap C$	vii) $e \in A \cap B \cap C$
iii) $d \notin A \cup B - C$	viii) $c \in A \cap C$
iv) $c \in B \cup C$	ix) $b \in \overline{A \cup B \cup C}$
v) $d \notin C$	



5- Por medio de operaciones con los conjuntos A, B y C describa la región sombreada del diagrama.



6- Se ha definido el cardinal de A, conjunto finito, como el número de elementos del mismo y se lo ha notado $|A|$.

Para la unión de dos conjuntos finitos A y B se verifica la siguiente propiedad:

$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|}$ Si A y B son conjuntos disjuntos

$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|}$ Si A y B no son disjuntos

Para tres conjuntos, A, B y C se verifica:

$$\boxed{|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|}$$

Compruebe estas propiedades para los siguientes conjuntos:

i) $A = \{1,2,3,4\}$

$B = \{2,3,5,6,8\}$

ii) $A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = \{1,2,5,6,7\}$

$C = \{2,4,5,6,7,8,9,10\}$

iii) $A = \{x / x$ es un entero positivo y $x^2 \leq 16\}$

$B = \{x / x$ es un entero negativo y $x^2 \leq 25\}$

AUTOEVALUACIÓN 1

1. Escriba por extensión los siguientes subconjuntos de A.

   $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

   i) $B = \{x \in A / x^2 \in A\}$

   ii) $C = \{x \in A / x \text{ es par}\}$

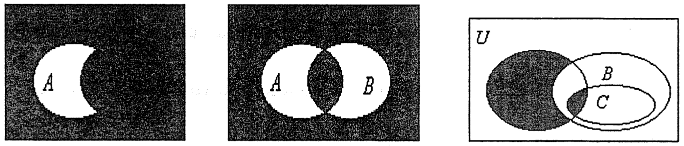
   iii) $D = \{x \in A / x + 2 \in A\}$

   iv) $E = \{x \in A / x \text{ es múltiplo de } 4\}$

   v) $F = \{x \in A / x \text{ es primo}\}$

   Interprete mediante un diagrama de Venn.

2. Represente mediante operaciones entre conjuntos, la zona sombreada.



3. En un estudio que se hizo con 260 estudiantes de universidad, se obtuvieron los siguientes datos:

   64 habían tomado un curso de matemática,

   94 habían tomado un curso de ciencia de la computación,

   58 habían tomado un curso de administración de empresas,

   28 habían tomado un curso de matemática y uno de administración de empresas,

   26 habían tomado un curso de matemática y uno de ciencias de la computación

   22 habían tomado un curso de ciencias de la computación y un curso de administración de empresas

   14 habían tomado los tres tipos de cursos.

   i) ¿Cuántos estudiantes, cuyos registros fueron revisados, no habían tomado ninguno de los tres tipos de cursos?

   ii) De los estudiantes cuyos registros fueron estudiados ¿cuántos habían tomado sólo un curso de ciencias de la computación?

Un momento para la distracción......

¿Se atreve a descubrir el secreto del mago?

Dijo el mago: presentaré un truco aritmético, con el ruego de que descubran el secreto que encierra. Que cualquiera de los presentes, usted mismo, escriba en un papel un número de tres cifras, sin que yo lo vea.

- ¿El número puede tener ceros?

- No pongo limitación alguna. Cualquier número de tres cifras, el que deseen.

- Ya lo he escrito. ¿Qué más?

- A continuación de ese mismo número, escríbalo otra vez, y obtendrá un número de seis cifras.

- Ya está. Efectivamente es un número de seis cifras.

- Dele el papel al compañero más alejado de mí, y que este último divida por 7 la cantidad obtenida.

- ¡Qué fácil es decir divídalo por 7! A lo mejor no se divide exactamente.

- No se apure; se divide sin dejar residuo.

- No sabe usted qué número es y asegura que se divide exactamente.

- Haga primero la división y luego hablaremos.

- Ha tenido usted la suerte de que se dividiera.

- Entregue el cociente a su vecino, sin que yo me entere de cuál es y que él lo divida por 11.

- ¿Piensa usted que va a tener otra vez suerte y que va a dividirse?

- Haga la división; no quedará residuo.

- En efecto; ¡no hay residuo! ¿Ahora qué más?

- Pase el resultado a otro. Vamos a dividirlo por ... 13.

- No ha elegido bien. Son pocos los números que se dividen exactamente por 13 ... Oh! ... ¡la división es exacta! ¡Qué suerte tiene usted!

- Deme el papel con el resultado, pero dóblelo de modo que no pueda ver el número. Sin desdoblar la hoja de papel el mago la entregó:

- Ahí tiene el número que usted había pensado. ¿Es ése?

- ¡El mismo! - contestó admirado, mirando el papel. - Precisamente es el que yo había pensado. ¿Descubrió el secreto ...?

CAPÍTULO 2 - NÚMEROS REALES

Dado que los números reales y sus distintos subconjuntos son básicos en la práctica usual de matemática; en este capítulo se tratarán las propiedades más importantes de ese sistema numérico.
Para hacer una breve síntesis de su evolución, se recordarán las sucesivas ampliaciones.
El número natural es el concepto original por excelencia y su rol de fundamental importancia para el desarrollo de la Matemática. Las especulaciones sobre su naturaleza y propiedades constituyen la forma más primitiva del pensamiento matemático. Al respecto, el matemático Kronecker (1823 - 1891) llegó a decir: "Dios creó los números naturales, el resto lo hizo el hombre".
De los números naturales, empleados para contar, se pasó al conjunto de los números enteros, de éstos al de los números racionales, el que unido al conjunto de los números irracionales forma el conjunto de los números reales. El sistema numérico se completa con la creación de los números complejos.

♦ Es sabido, que en el conjunto $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ se resuelven problemas que no tienen solución en el conjunto $\mathbb{N}=\{1,2,3,...\}$, por ejemplo: encontrar un número x que resuelva la ecuación:

$$5-x=7.$$

O encontrar un número x tal que verifique:

$$10+x=10.$$

En $\mathbb{N}$ no existe solución, mientras que en $\mathbb{Z}$ son los números $x=-2$ y $x=0$ las respectivas soluciones, puesto que: $5-(-2)=7$ y $10+0=10$.
Son subconjuntos de $\mathbb{Z}$ los conjuntos: $\mathbb{Z}^{+}=\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_{0}^{+}=\mathbb{N}_{0}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{0}^{-}$.

♦ A su vez, el conjunto $\mathbb{Z}$ es ampliado al conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, donde encuentran solución problemas tales como: encontrar un número x tal que $10x=3$.
En $\mathbb{Z}$ el problema no tiene solución, mientras que en el conjunto $\mathbb{Q}$ es $x=\dfrac{3}{10}$.
En efecto $\dfrac{3}{10}$ verifica $10\cdot\dfrac{3}{10}=3$.

↳ OBSERVACIÓN:

Recuerde que el conjunto de los números racionales se puede indicar:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{p}{q}/\,p,q\in\mathbb{Z}\wedge q\neq 0\},$$

donde está definida la igualdad a través de la equivalencia de fracciones:

$$\frac{p}{q}=\frac{r}{s}\Leftrightarrow p\cdot s=q\cdot r.$$

Por ejemplo $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{4},...,\dfrac{m}{2m}$ son fracciones equivalentes que definen el mismo número racional. Además, un número entero, se puede escribir como fracción con denominador 1: $...,-\dfrac{3}{1},-\dfrac{2}{1},-\dfrac{1}{1},\dfrac{0}{1},\dfrac{1}{1},\dfrac{2}{1},\dfrac{3}{1},...$

Nota de interés:

Sabía usted que los babilonios usaban únicamente fracciones con denominador igual a 60. Los romanos, solo las que tenían denominador igual a 12. Los egipcios insistían en que los numeradores debían valer 1 y escribían $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ *en vez de* $\frac{2}{5}$. *La notación moderna data de Leonardo de Pisa (Fibonacci) cuya gran obra Liber abaci se publicó en 1202.*
Los números negativos fueron utilizados como extensión entre los primitivos chinos, judíos y árabes, pero en el siglo XVII recién fueron puestos al mismo nivel que los números positivos.

Se puede expresar usando inclusión de conjuntos: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.
A su vez, los conjuntos $\mathbb{Q}^{+}$ y $\mathbb{Q}^{-}$ son subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

♦ Otros problemas, mostraron la existencia de otros números distintos de los números racionales.

Por ejemplo, la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos iguales, de longitud unitaria es $\sqrt{2}$. Este número no es un número racional, es decir que no puede ser escrito en la forma $\frac{p}{q}$ con p y q enteros ($q \neq 0$).

Otros números no racionales son: $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{8}$, π , 2π , $-\sqrt{45}$, $5\sqrt{7}$, ...

Los números que no son racionales son llamados **irracionales.** Se nota con **I** al conjunto de todos los números irracionales.

El conjunto de los números **racionales** unido con el conjunto de los números **irracionales** definen el conjunto **R** de los números **reales** . A su vez, el conjunto de los números reales se ampliará a un nuevo conjunto, el conjunto $\mathbb{C}$ de los números **complejos**, completándose así el sistema numérico.

En este conjunto $\mathbb{C}$ tienen solución problemas del tipo $x^2+1=0$, que no tiene solución en **R**, pues no existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $x^2=-1$.

Entonces usando la notación conjuntista: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbb{C}$

↳ OBSERVACIÓN:

La **representación decimal** de los números reales permite distinguir los números racionales de los irracionales.

Un número **racional** se reconocerá si su expresión decimal es finita o infinita periódica.

Así dado el número racional $\frac{p}{q}$, efectuando la división de p por q se obtiene el número expresado en forma decimal. Algunos "terminan" después de un número finito de cifras, esto es, las últimas cifras son cero. Tal es el caso de $\frac{1}{4}=0{,}25000$ y $\frac{3}{2}=1{,}500$.

En otros casos como $\frac{1}{3}=0{,}3333...$ y $\frac{3}{7}=0{,}4285742857...$, las divisiones no terminan, repitiéndose sucesivamente, a partir de un momento, un grupo o período de dígitos.

Los indicamos: $\frac{1}{3}=0{,}\overline{3}$ y $\frac{3}{7}=0{,}\overline{42857}$.

¿Cómo hallar el número racional $\frac{p}{q}$ dado por su representación decimal periódica?.

En lo que sigue se muestran tres ejemplos:

i) Sea $a=6{,}\overline{2}$.

Si a $6{,}\overline{2}$ se lo multiplica por 10 resulta $62{,}\overline{2}$ de modo que

$$10a=62{,}\overline{2}$$
$$a=6{,}\overline{2}$$

restando miembro a miembro se tiene $9a=56$

de donde $a=\frac{56}{9}$

ii) Sea $a=4{,}3\overline{7}$.

Si se multiplica por 100 $100a=437{,}\overline{7}$

Si se multiplica por 10 $10a=43{,}\overline{7}$

restando miembro a miembro se tiene $90a=394$

y entonces $a=\frac{394}{90}$

iii) Sea $a=0{,}\overline{9}$.

Si se multiplica por 10
$$10a=9{,}\overline{9}$$
$$a=0{,}\overline{9}$$

restando miembro a miembro se tiene $9a=9$

luego $a=1$

Si un número es **irracional** su representación decimal tiene infinitas cifras no periódicas. Se puede escribir en forma aproximada con un número finito de cifras, por ejemplo:

$$\sqrt{2}=1{,}4241 \quad , \quad \sqrt{3}=1{,}73 \quad , \quad \pi=3{,}141592$$

Nota de interés:

El número π (pi) es la relación (cociente) entre las longitudes de la circunferencia y su diámetro. Es un número irracional, es decir, no existe ninguna fracción que nos dé exactamente su valor. Actualmente, se conocen varios millones de sus cifras; sin embargo, basta con una aproximación de diez cifras decimales para determinar la circunferencia terrestre con un error inferior a 2 cm. Para la mayoría de los cálculos es suficiente tomar como valor aproximado el 3,14; si se necesita más precisión, por ejemplo para el diseño de motores, se toma con cuatro decimales (3,1416). Algunos de los valores notables de π utilizados a lo largo de la historia han sido los siguientes:

-Papiro Rhind (hacia 1800 a.C.): 3,1604

-Arquímedes (287 - 212 a.C.): entre 3,14084 y 3,14285

-Herón de Alejandría (siglo I): 3,1408

-Tolomeo (90? - 168?): 3,1416

-Liu-Hu (hacia 250): 3,14159

-Tsu-Chung-Chi (430 - 501): 3,1415926

-Viète (1579): entre 3,1415926535 y 3,1415926537

π en la Biblia:

El libro Primero de los Reyes 7: 23 dice:

"Después hizo un depósito de bronce fundido. De forma redonda, media diez codos de un extremo a otro y cinco codos de profundidad. Tenía treinta codos de perímetro". Pero agrega en 7:26: "Su espesor era de un palmo y su borde era como el borde del cáliz de la flor de azucena ".

La descripción anterior no deja en claro a qué magnitudes se referían las medidas de los israelitas. En todo caso, si se trataba de las de una figura "circular" plana –la "tapa" del depósito-, su forma no era perfecta. En efecto, ¿Cuál es el valor de π que se deduce de ese versículo de la Biblia? Sin embargo, los judíos conocían el valor de π con varios decimales, como mostraremos a continuación.

La 3ra. palabra del Génesis I: "Elohim", que se traduce –no muy exactamente- por "Dios", se escribe en hebreo

אלהים

Ahora bien, el valor numérico de las letras (según su posición en el "alef-beit" o "alfa-beto" hebreo) es

ם ⟷ *40* ⟷ *4*

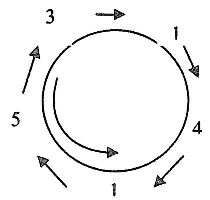
י ⟷ *10* ⟷ *1*

ה ⟷ *5* ⟷ *5*

ל ⟷ *30* ⟷ *3*

א ⟷ *1* ⟷ *1*

Si estas cifras se colocan en una ***circunferencia*** *de diámetro unitario (pero no si se ubican sobre un segmento de* ***recta****) y luego se leen en el sentido inverso al que fueron escritas, se tiene: 3.1415, su perímetro en forma aproximada.*



Esto sólo ocurre al cerrarse la circunferencia, pero no pasa sobre una curva que no es cerrada (por ejemplo un segmento de recta).

También el cociente "año / hombre" (en hebreo) es $\frac{355}{113} = 3.141592$

La "irracionalidad trascendente" de π, conteniendo una infinitud de información –¿quizás ***toda*** *información posible?- podría ser entonces explicada ¡por ser el Nombre "Elohim" una "aproximación racional" del Número de "Dios"!*

✎ OBSERVACIÓN:

Los números naturales pueden ser clasificados en naturales pares e impares.

Un número natural x es par si es divisible por 2, en general se indica $x = 2n$, con $n \in \mathbb{N}$. Si por el contrario x es impar, se indica $x = 2n+1$ con $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos:

8 es par, pues $8 = 2 \times 4$

7 es impar, $7 = 2 \times 3 + 1$.

➲ EJERCICIOS:

1- Teniendo en cuenta la observación anterior, demuestre las proposiciones siguientes:

i) la suma de dos números naturales consecutivos no es divisible por 2.

ii) la suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3.

iii) si un número es par entonces su cuadrado es par.

iv) si el cuadrado de un número es par entonces el número es par.

v) $\sqrt{2}$ es un número irracional.

2- Muestre que son racionales los siguientes números y escríbalos en la forma $\frac{p}{q}$.

i) $1{,}21\overline{4}$ ii) $0{,}45$ iii) $7{,}\overline{3}$ iv) $112{,}\overline{26}$

3- Halle la expresión decimal de los siguientes números:

i) $\frac{1}{3}$ ii) $\frac{7}{5}$ iii) $3\frac{5}{2}$ iv) $\frac{3}{11}$ v) $\frac{4}{33}$

OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Suma y producto

En $\mathbb{R}$ están definidas las operaciones suma y producto, tales que para cualquier par de números reales a y b:

- la **suma** le hace corresponder el número $a+b$.
- el **producto** le hace corresponder el número $a \cdot b$.

En la tabla que sigue se muestran las propiedades fundamentales de la suma y el producto de números reales. Para cualesquiera $a,b,c \in \mathbb{R}$ se tiene que:

Propiedad	Suma	Producto
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
Existencia de Elemento neutro	0 es neutro $a+0=a$	1 es neutro $a\cdot 1=a$
Existencia de Elemento inverso	$-a$ opuesto de a $a+(-a)=0$	$\frac{1}{a}$ inverso de $a\neq 0$ $a\cdot\frac{1}{a}=1$
Cancelativa	$a+b=a+c \Rightarrow b=c$	$a\neq 0,\quad a\cdot b=a\cdot c\Rightarrow b=c$
Uniforme	$a=b\Rightarrow a+c=b+c$	$a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$
Distributiva	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

A partir de la suma y el producto se definen: **diferencia, cociente** y **potenciación.**

La **diferencia** entre a y b se define como la suma $a+(-b)$.

El **cociente** entre a y b $(b\neq 0)$ se define como el producto $a\cdot\frac{1}{b}$.

✎ OBSERVACIÓN:

Si a y b son números racionales; $a=\frac{p}{q}$ y $b=\frac{r}{s}$ $(q\neq 0,\ s\neq 0;\ r\neq 0)$ entonces

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}$$

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$$

$$\frac{p}{q}\div\frac{r}{s}=\frac{ps}{qr}$$

Regla de los signos para el producto y cociente

- $a\cdot b>0$ si $a>0,b>0$ ó $a<0,b<0$
- $a\cdot b<0$ si $a>0,b<0$ ó $a<0,b>0$
- $a\div b>0$ si $a>0,b>0$ ó $a<0,b<0$
- $a\div b<0$ si $a>0,b<0$ ó $a<0,b>0$

➲ EJERCICIOS:

4- Resuelva:

i) $2+\left(-\frac{1}{2}\right)-(-4)\cdot 7+2=$

ii) $-\{4-[6+3-(2(-5)-0,05)]+(-6)-0,3(-2)\}-1,5=$

5- Resuelva:

i) $(-2)\,[3\,(4-2)+6]+5[-2\,(-3+8)+9]$

ii) $2-\left(\frac{1}{2}+5\right)-\left[4\cdot\frac{3}{2}-\left(9+\frac{1}{8}\right)\right]$

iii) $5+\left\{-\frac{1}{2}-2-\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{6}+\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right]+\frac{5}{4}\right\}$

iv) $\frac{1}{5}\left\{-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-2-\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]-\frac{3}{5}\right\}+1$

6- Verifique:

i) $\dfrac{2-\dfrac{2-\frac{1}{5}}{1-\frac{7}{10}}}{2+\frac{2}{3}}+\dfrac{\frac{1}{4}-2}{\frac{3}{2}-1}=-5$

ii) $\left(1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{5}}\right):\left(1-\dfrac{1-\frac{1}{5}}{6}\right)=\dfrac{55}{26}$

iii) $\dfrac{\frac{1}{6}+\frac{11}{6}}{6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+\dfrac{6-\left(\frac{17}{4}+\frac{14}{8}\right)}{6+\left(\frac{17}{4}+\frac{14}{8}\right)}=-\dfrac{2}{3}$

7- Calcule:

i) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{6}{5}\right)+\left(\frac{3}{2}-1+\frac{2}{5}\right)$

ii) $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\div 3}{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}\div\dfrac{-1+\frac{1}{3}}{\left(2-\frac{1}{3}\right)\cdot 3}$

Potenciación

Para $a\in\mathbb{R}$, se define:

$$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n}\ \forall n\in\mathbb{N}\,;\qquad a^{-n}=\frac{1}{a^n}\quad\forall a\neq 0\wedge\forall\,n\in\mathbb{N}\quad \text{y}\quad a^0=1\quad\forall a\neq 0$$

Ejemplos:

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

ii) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{4}\right)^4$

iii) $(-4)^3=-64$

iv) $\left(\sqrt{2}\right)^0=1$

v) $(-7)^1=-7$

vi) $(-10)^{-1}=-\frac{1}{10}$

Propiedades de la potenciación:

Propiedad	
Distributiva con respecto al producto	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
Distributiva con respecto al cociente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$ si $b\neq 0$
Producto de potencias de igual base	$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
Cociente de potencias de igual base	$\left(\frac{a^m}{a^n}\right)=a^{m-n}$ si $a\neq 0$
Potencia de potencia	$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

✎ OBSERVACIÓN:

La potenciación no es distributiva con respecto a la suma, ni a la diferencia

$$(a\pm b)^n\neq a^n\pm b^n$$

Muestre ejemplos para probarlo.

Notación científica

Resulta útil esta notación cuando se trata de cálculos con números grandes o muy pequeños y también para hacer estimaciones.

Por ejemplo, la notación científica para:

i) la distancia de Neptuno al sol es 4.500.000.000 km = $4{,}5\times 10^9$

ii) el diámetro de un átomo de helio es 0,000000022 cm $= 2{,}2\times 10^{-8}$

iii) $-1.000.000 = -1\times 10^6$

En general:

Dado $x\in \mathbf{R}$, se puede escribir, utilizando notación científica como:

$$\boxed{\begin{array}{c} x=\alpha\times 10^n, \\ \text{donde } 1\le|\alpha|<10,\; n\in\mathbf{Z}\end{array}}$$

➲ EJERCICIOS:

8- Calcule las siguientes potencias:

$(-3)^5=$ $\quad \left(\frac{2}{3}\right)^2=$ $\quad (0{,}1)^2=$ $\quad \left(-\frac{1}{10}\right)^4=$ $\quad 10^5=$

$(-3)^4=$ $\quad \left(-\frac{2}{5}\right)^3=$ $\quad -2^3=$ $\quad (-1)^{25}=$ $\quad (-1)^{14}=$

$(-1)^{-24}=$ $\quad 2^{-2}=$ $\quad (-3)^{-2}=$ $\quad \left(\frac{3}{22}\right)^{-3}=$ $\quad -1^{86}=$

9- Calcule:

i) $\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5=$ $\quad$ ii) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5=$ $\quad$ iii) $\left(-\frac{2}{7}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^{-3}=$

iv) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}=$ $\quad$ v) $\left(\frac{5}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{3}{5}\right)=$ $\quad$ vi) $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2=$

10- Simplifique las siguientes expresiones:

i) $\dfrac{2^3\cdot 2^7\cdot 2^{-3}\cdot 2^5}{2^4\cdot 2^{-2}\cdot 2^9}$ $\qquad$ iii) $\dfrac{a^2\cdot b^3\cdot c^{-4}}{a\cdot b^2\cdot c^{-3}}$

ii) $\dfrac{2^{-4}\cdot 4^2\cdot 3\cdot 9^{-1}}{2^{-5}\cdot 8\cdot 9\cdot 3^2}$ $\qquad$ iv) $\dfrac{a^{n+3}\cdot b^{m-3}}{a^{n-2}\cdot b^{2m-3}}$

11- Descubra el error

i) $\left(2^2\cdot 2^{-3}\cdot 2^5\right)^2=\left(2^4\right)^2=2^{16}$

ii) $\left(5^2\right)^4\div\left(5^{-3}\right)^2=5^8\div 5^{-6}=1^{14}=1$

iii) $(7\cdot 2-14)^0+(-3)^0=2$

12- Aplicando las propiedades de la potenciación, pruebe que:

i) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

ii) $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

iii) $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$

iv) $(-a-b)^2=(a+b)^2$

v) $\left(3\cdot 3^{n+1}+3^{n+2}\right)^3\div\left(3^{n+2}\right)^3=8$

vi) $\dfrac{\left(5\cdot 2^{n+1}\right)^3\div\left(5\cdot 2^{n-1}\right)^2}{2^3}=20\cdot 2^n$

vii) $2^{2-n}\cdot\left(2\cdot 2^{n+1}+2^{n+2}\right)=32$

13- Expresar en notación científica y simplificar:

$$\frac{4{,}3\times 0{,}0014\times 0{,}0000019}{3.800.000\times 0{,}0043}$$

14- Calcule:

$4\cdot 10^{-5}+2\cdot 10^7-3{,}5\cdot 10^{12}$

Radicación

Sea $a\in\mathbf{R}$ y $n\in\mathbf{N}$, se define **raíz enésima** de a al número b tal que su potencia enésima es a:

$$\boxed{\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a,\quad n\in\mathbf{N}}$$

n: se llama índice

a: es el radicando

b: es la raíz enésima de a

Ejemplos:

i) $\sqrt[3]{27}=3$ puesto que $3^3=27$

ii) $\sqrt[3]{-8}=-2$ puesto que $(-2)^3=-8$

↳ OBSERVACIONES:

- No existe raíz real enésima de índice par y radicando negativo.

  Por ejemplo: no es posible calcular $\sqrt{-4}$; pues no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea igual a -4.

- La raíz cuadrada de un número a positivo admite dos soluciones. Entonces, para evitar ambigüedades, se considera el símbolo $\sqrt{a}$ (**raíz aritmética** de a), para indicar la raíz positiva de a. Si se quieren simbolizar las dos raíces se utiliza $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$.

Siempre que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ sean posibles, la radicación goza de las siguientes propiedades:

Distributiva con respecto al producto	$\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$
Distributiva con respecto al cociente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ si $b\neq 0$
Raíz de raíz	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m.n]{a}$

↳ OBSERVACIÓN:

La radicación no es distributiva con respecto a la suma, ni a la diferencia.

Basta un ejemplo para probarlo:

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5\neq 3+4=\sqrt{9}+\sqrt{16}$$

$$\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4\neq 5-3=\sqrt{25}-\sqrt{9}$$

Potenciación con exponente fraccionario

Dados $m,n\in \mathbb{N}$ $(n\neq 0)$ se define:

Si n es impar, $\forall a\in\mathbb{R}$ es: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a\neq 0)$

Si n es par, $\forall a\geq 0$ es: $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ y $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ $(a\neq 0)$

Ejemplos:

i) $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$ ii) $(-2)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{(-2)^2}$ iii) $2^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2^5}}$

Racionalización de denominadores

Se denomina así, al proceso de eliminar los radicales que se encuentran en el denominador de una fracción. La técnica consiste en multiplicar por una fracción conveniente y luego operar.

Ejemplos:

Racionalizar los denominadores en las siguientes expresiones:

i) $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

i) Si se multiplica la fracción dada por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; se obtiene:

$$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{9}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

ii) Si se multiplica la fracción dada por $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; se obtiene:

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}.\frac{\sqrt{5}+\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}=\frac{2.(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{(\sqrt{5}-\sqrt{7})(\sqrt{5}+\sqrt{7})}=\frac{2.(\sqrt{5}+\sqrt{7})}{5-7}=-\sqrt{5}-\sqrt{7}$$

➲ EJERCICIOS:

15- Calcule, en los casos que sea posible, las siguientes raíces:

i) $\sqrt{144}$ iv) $\sqrt[3]{-216}$

ii) $\sqrt{-144}$ v) $\sqrt{400}$

iii) $\sqrt[3]{216}$ vi) $\sqrt{0{,}0025}$

16- Extraiga todos los factores que sea posible en los siguientes radicales:

i) $\sqrt[5]{64}$ ii) $\sqrt[3]{243}$ iii) $\sqrt{x^4}$ iv) $\sqrt{4a^3}$ v) $\sqrt[3]{27ab^3}$

17- Calcule:

i) $\sqrt[4]{3}+2\sqrt[4]{3}-5\sqrt[4]{3}$

iii) $\sqrt{x}+7\sqrt{x}-4\sqrt{x}$

ii) $\sqrt{12}+3\sqrt{90}-\sqrt{40}$

iv) $\frac{1}{5}\sqrt{x-1}\ -3\sqrt{x-1}+\frac{3}{2}\sqrt{x-1}$

18- Escriba como potencia de exponente fraccionario y simplifique:

i) $\sqrt{\sqrt[3]{8}}$

iv) $\dfrac{\sqrt{ax}\cdot\sqrt[3]{xa^2}}{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[6]{a^5x}}$

ii) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$

v) $\sqrt{\sqrt{5}}$

iii) $\sqrt{2.\sqrt{3}}$

vi) $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

19- Simplifique:

i) $\left[\sqrt{x\cdot\sqrt{\dfrac{1}{x}}}\right]^3$

ii) $\sqrt{x^3\cdot\sqrt{\dfrac{x^2}{y}}}$

20- Efectúe las siguientes operaciones:

i) $\left(4x^{\frac{3}{2}}\div 2x^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=$

ii) $\left(2x^{\frac{1}{2}}-3x^{-\frac{2}{3}}\right)x^{-\frac{1}{3}}=$

21- Elimine las raíces del denominador:

i) $\dfrac{3}{\sqrt[4]{3}}$

iii) $\dfrac{1}{7-\sqrt{7}}$

ii) $\dfrac{90}{\sqrt[3]{5}}$

iv) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$

Logaritmación

Dados los números a y b reales positivos ($a\neq 1$) se llama **logaritmo** en base a del número b al número real x que se simboliza $log_a b$ y tal que $a^x=b$.

Se expresa en símbolos:

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b}$$

Ejemplos:

i) $log_2 8=3$, pues $2^3=8$

ii) $log_{\frac{1}{3}} 9=-2$, pues $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=3^2=9$

iii) $log_{10}\dfrac{1}{100}=-2$, pues $10^{-2}=\left(\dfrac{1}{10}\right)^2=\dfrac{1}{100}$

iv) $log_2 2=1$, pues $2^1=2$

v) $\log_4 1=0$, pues $4^0=1$

Comentario:

El uso sistemático de los logaritmos fue introducido en el segundo decenio del siglo XVII por Henry Briggs y Jhon Napier (o Neper de ahí el nombre de neperianos dado a los logaritmos naturales, mientras que los decimales se llaman a veces de Briggs). Neper fue un matemático escocés (1550-1617). Se destacó por su teoría de los logaritmos, método que reemplazó a las laboriosas operaciones aritméticas de las que había dependido hasta entonces la resolución de los más sencillos problemas trigonométricos.

Propiedades del logaritmo:

Propiedades	
$\log_a b.c=\log_a b+\log_a c$	$\log_a \dfrac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$
$\log_a b^c=c.\log_a b$	$\log_a a=1$
$\log_a 1=0$	$a^{\log_a b}=b$

✎ OBSERVACIONES:

- Los logaritmos en base 10, se llaman **logaritmos decimales** y generalmente se escribe $\log x$ omitiendo el subíndice 10.

- Otros logaritmos llamados **logaritmos naturales** o **logaritmos neperianos** toman como base el número irracional $e = 2{,}7182\ldots$, llamado constante de Euler y se escribe $\ln x$.

Los logaritmos se calculan fácilmente mediante calculadora, eliminándose el uso de tablas.

Interesa, en muchos casos, conocer el logaritmo de un número x en una determinada base a conocido su logaritmo en otra base b. Este problema se conoce con el nombre de **cambio de base**.

Es decir, dado $\log_b x$, el problema es hallar $\log_a x$.

Por la definición de logaritmo en base a se tiene

$$(*)\ \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Aplicando a ambos miembros de $a^y = x$ el logaritmo en base b, se tiene:

$$\log_b a^y = \log_b x$$

entonces, por propiedad de los logaritmos $y.\log_b a = \log_b x$, se obtiene:

$y = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ reemplazando el valor de y en (*) resulta: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

Ejemplos:

i) $\log 8 \approx 0{,}4343 \ \ln 8$ ii) $\ln 15 \approx 2{,}3026 \ \log 15$

➲ EJERCICIOS:

22- Complete las tablas siguientes:

n	2	4	8	16	32	64	128	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\log_2 n$	1	2									

N	0,0001	0,001	0,01	0,1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10} n$									

23- Aplique la definición y las propiedades de los logaritmos para calcular los siguientes:

i) $\log_2 \dfrac{16\sqrt{8}}{4}$ iii) $7^{\log_7 10}$

ii) $\log \dfrac{\sqrt[3]{10^4}\sqrt[3]{0{,}001}}{0{,}01}$ iv) $\log_3 \sqrt[3]{27\sqrt[4]{81}}$

24- Exprese como un solo logaritmo:

i) $4\log_a A - \log_a B$

ii) ii) $(4\log_a A + \log_a B) - \left(\log_a C + \frac{1}{2}\log_a D\right)$

25- Calcule (usando calculadora)

i) $\log_2 11$ ii) $\log_4 5$ ii) $\log \dfrac{2{,}3}{1{,}5}$

26- Demuestre:

i) $\log_a\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-5}}{5}\right) = -\log_a\left(x-\sqrt{x^2-5}\right)$

ii) $\log_2 x = 2 \Rightarrow \log_2 x^3 y + \log_2 \dfrac{4x}{y} - \log_2 \sqrt{x} = 9$

27- Determine la relación entre:

a) $\log_2 8$ y $\log_8 2$

b) $\log_3 9$ y $\log_9 3$

c) $\log_4 16$ y $\log_{16} 4$

En general, ¿cuál es el resultado de comparar $\log_a b$ y $\log_b a$?

28- Indique si los siguientes enunciados son verdaderos y falsos. Justifique:

i) $\log_a 0 = 1$

ii) $\log_a^2 x = 2.\log_a x$

iii) $\log_b \dfrac{35c}{a} - \log_b 5a^{-2}c + 2\log_b ab = 2 + \log_b 7$

AUTOEVALUACIÓN 2

1. ¿Cuáles de los números siguientes son racionales?

i) $\sqrt{27}$ ii) $\sqrt{\frac{1}{3}}$ iii) $1\frac{5}{7}$ iv) $\left(1-\sqrt{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

2. Calcule:

i) $\dfrac{3-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ ii) $\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{6}\right)^{-2}+\sqrt[3]{-\dfrac{27}{8}}}{\dfrac{\sqrt{3}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}}}$

3. Exprese los números decimales como fracciones y resuelva:

$$\frac{\left(0,\overline{2}-0,0\overline{3}\right)^{-1}+1,\overline{23}}{0,\overline{9}}+\frac{\sqrt{0,16}}{1,\overline{9}}-16^{-0,25}$$

4. Verifique: $\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}-5\right)^{-2}}{\sqrt{3}+1}\div\dfrac{\sqrt{3}-1}{\left(5-\dfrac{1}{3}\right)^{2}}=\dfrac{1}{2}$

5. Escriba el número con notación científica:
   i) la masa de un electrón es 0,000000000000000000000000000911g
   ii) la distancia del sol a Plutón es de 5.895.000.000km.

6. Aplicando las propiedades de la potenciación demuestre que:

$$\left(2\cdot 2^{n-1}+2^{n}\right)^{4}\cdot\left(2^{n}\right)^{-4}=16$$

7. Elimine las raíces del denominador y simplifique: $\dfrac{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}{1+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

Un momento para la distracción.....

- Encuentre el valor de las letras, sabiendo que son dígitos:

$$\begin{array}{cccc} S & E & I & S \\ + & D & O & S \\ \hline O & C & H & O \end{array}$$

- ¿Puede completar este cuadrado utilizando los primeros 16 números naturales de modo que sumando por filas, columnas y diagonales se obtenga siempre el mismo resultado?

1			
	6		
		11	
			16

(A este cuadrado se le atribuían propiedades contra la peste, y por ello se llevaba colgado del cuello grabado en una plaquita de plata).

- Cada letra representa un número dígito.

Halle los valores de cada letra, de modo que resulte:

$$AB+BA=99$$

- <u>Los cuatro mágicos</u>: En este problema expuesto por primera vez en el siglo pasado, se trata de obtener la serie de los números naturales con expresiones en las que aparezca cuatro veces el número 4, junto con símbolos matemáticos simples. Para expresar los diez primeros números, sólo son necesarios los signos de las cuatro operaciones fundamentales: sumar, restar, multiplicar y dividir.

Aquí esta la prueba hasta el número 5:

$1=\dfrac{44}{44}$ $3=\dfrac{4+4+4}{4}$ $5=\dfrac{(4\cdot 4)+4}{4}$

$2=\dfrac{4}{4}+\dfrac{4}{4}$ $4=4+\dfrac{4-4}{4}$

Pensando un poco podrá llegar hasta el 10. Inténtelo.

CAPÍTULO 3 - NÚMEROS COMPLEJOS

Las sucesivas ampliaciones de los sistemas numéricos, a partir del conjunto **N** de los números naturales, se realizaron para dar solución a problemas no resolubles en el sistema conocido. Problemas que, en la mayoría de los casos, remiten a la resolución de ecuaciones algebraicas.

Así, los números reales no son suficientes para dar solución a toda ecuación cuadrática. Por ejemplo, la ecuación $x^2+1=0$ carece de solución real, ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero; no existe x real tal que $x^2=-1$.

Fue necesario, entonces, ampliar el concepto de número para incluir aquellos que verificaran esta ecuación particular y para encontrar solución a toda ecuación polinómica.

La idea fue definir un nuevo número que verificara $x^2+1=0$. Tal fue "i" definido de modo que $i^2=-1$.

El sistema de números resultante de adjuntar i y sus combinaciones al conjunto **R** de los números reales es el ***sistema de los números complejos***, cuyo estudio es el objeto de este capítulo.

Definición:

Un número complejo es toda expresión de la forma $z=a+bi$ donde a y b son números reales e i se define por la relación $i^2=-1$

* a se llama parte o componente real de z y se representa mediante $\mathrm{Re}(z)$

* b es la parte o componente imaginaria de z y se representa por $\mathrm{Im}(z)$

La unidad imaginaria

El número i, recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que i se comporta como un número real, respetando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva.

Son válidas también las propiedades de la potencia:

a) $i^r.i^s=i^{r+s}$ b) $(i^r)^s=i^{r.s}$ con $r,s\in\mathbf{Z}$

Comentario:

El número i (del latín imaginarius) fue llamado así por el matemático Euler (1707-1783).

Los nombres de imaginarios, complejos que hoy se emplean aparecen en el horizonte matemático hacia el siglo XVI y hacen referencia a las raíces cuadradas de números negativos como números imposibles o imaginarios o como " fantasmas de los números reales ".

Si bien los números complejos nacieron en una atmósfera de misterio y desconfianza, cuestionándose la validez de las operaciones, es en el siglo XIX cuando, a través de los trabajos de los matemáticos Wessell (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855) sobre la interpretación geométrica de los números complejos, se lograron sentar las bases matemáticas sólidas para el nuevo sistema de números.

OBSERVACIONES:

- Es claro que la introducción de i permite resolver las raíces cuadradas de los números negativos. Así, por ejemplo:

  i y $-i$ son raíces cuadradas de -1 pues $i^2=-1$ y $(-i)^2=-1$

  $2i$ es una de las dos raíces cuadradas de -4

- Se puede comprobar, también fácilmente, que las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4.

  $i^0=1$ $\quad i^1=i$ $\quad i^2=-1$ $\quad i^3=i^2.i=(-1).i=-i$

  $i^4=i^2.i^2=1$ $\quad i^5=i^4.i=i$ $\quad i^6=i^4.i^2=-1$ $\quad i^7=i^4.i^3=-i$

  A partir de este reconocimiento es posible calcular cualquier **potencia de *i*.**

  Por ejemplo, para calcular:

  a) i^{21}

  como $21=4\times5+1$, se tiene $i^{21}=(i^4)^5i^1=1^5i^1=i$

  b) i^{-112}

  como $112=28\times4$ resto 0, resulta $i^{-112}=\dfrac{1}{i^{112}}=\dfrac{1}{(i^4)^{28}}=\dfrac{1}{1^{28}}=1$

Esta manera de operar es general como se muestra en el **teorema** siguiente:

Para todo $n \in \mathbf{Z}$ es $i^n = i^r$ donde r es el resto de la división de n por 4 $(r = 0,1,2,3)$

Demostración:

El número entero n se expresa, en la división por 4 como:

$n = 4k + r$ donde $r < 4$, luego el resto de la división puede ser 0, 1, 2 ó 3

Entonces: $i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k . i^r = 1^k . i^r = i^r$

Por lo tanto:
$$i^n = \begin{cases} 1 & si \quad r = 0 \\ i & si \quad r = 1 \\ -1 & si \quad r = 2 \\ -i & si \quad r = 3 \end{cases}$$

➲ EJERCICIOS:

1- Verifique

a) $i + i^3 = 0$

b) $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 0$

c) $i^{-12} + i^{-14} = 0$

2- Exprese los siguientes números en la forma bi

$\sqrt{-2}$; $\sqrt{\frac{-9}{16}}$; $\sqrt{-80}$.

3- Para todo número $n \in N$, calcule $i^{n+\alpha}$ cuando α toma valores: 3; 0; 2

El conjunto de los números complejos

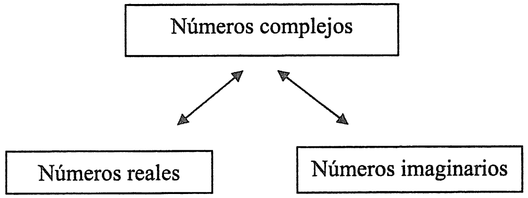
Se simboliza:

$$C = \{z = a + bi \,/\, a, b \in \mathbf{R},\ i^2 = -1\}$$

- **Todo número real *a* es un número complejo,** pues $a = a + 0i$. De este modo, los números reales se identifican con una parte de los números complejos por la correspondencia:

$$a \leftrightarrow a + 0i$$

- Todos los números de la forma bi, llamados **imaginarios puros,** son complejos de parte real nula: pues $bi = 0 + bi$



Igualdad de números complejos

Se dice que los números complejos $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$ son iguales si y solo si $a = c$ y $d = c$

Ejemplo:

¿Para cuáles valores reales de x e y se verifica la igualdad: $3x + yi = 5x + 1 + 2i$?

Si igualamos las partes reales: $3x = 5x + 1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$

Si igualamos las partes imaginarias, $y = 2$

Operaciones con números complejos

Suma:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Producto:

$(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Opuesto de un número complejo

Dado $z = a + bi$ se llama **opuesto** de z al número que se indica $-z$ tal que

$$-z = -a - bi$$

Ejemplo:

$z = 2 + i \qquad -z = -2 - i \quad ; \quad z = i \qquad -z = -i$

La existencia de opuesto para todo $z \in \mathbf{C}$ hace posible la resta o diferencia de complejos.

Resta:

$(a+bi)-(c+di)=(a+bi)+(-c-di)=(a-c)+(b-d)i$

✎ OBSERVACIÓN:

Para sumar, restar o multiplicar los números complejos se opera, considerándolos como efectivos binomios, manipulando i como si se tratase de una variable para la cual $i^2=-1$.

Ejemplos:

a) $(2+3i)+(4-i)-(2-3i)-(-1+i)=$

$(2+3i)+(4-i)+(-2+3i)+(1-i)=$

$(2+4-2+1)+(3-1+3-1)i=$

$5+4i$

b) $\left(\frac{2}{3}+i\right)\left(-1+\frac{i}{2}\right)=-\frac{2}{3}+\frac{2}{6}i-i+\frac{1}{2}i^2=$

$\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-1\right)i=-\frac{7}{6}-\frac{2}{3}i$

➲ EJERCICIOS:

4- Efectúe las operaciones:

a) $(3+6i)+(2-3i)$ e) $(-1-i)+(1+i)$

b) $(7+5i)-(1+2i)$ f) $18-(13-2i)$

c) $(5+7i)(3+4i)$ g) $(1-i)^3$

d) $(2-3i)(-1+4i)$ h) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$

5- Dados $z_1=1+i$ y $z_2=1-i$ pruebe que $-z_1{}^2+2z_1-2=z_2{}^2-2z_2+2=0$

6- Encuentre el valor de $a\in\mathbb{R}$ de modo que z sea un número real.

$z=(2+i)+(1-ai)+(2a-5i)$

Conjugado de un número complejo

Definición:

El **conjugado** de un número complejo $z=a+bi$ es otro complejo, que se indica $\bar{z}$ y tal que $\bar{z}=a-bi$.

Ejemplo:

Si $z=5+3i$ entonces $\bar{z}=5-3i$.

Fácilmente se pueden probar las siguientes propiedades:

1- $z=\bar{z}$ si y sólo si $z\in\mathbb{R}$

2- $z+\bar{z}=2a$

3- $z-\bar{z}=2bi$

4- $z.\bar{z}=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

5- $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

6- $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$

7- $-\bar{z}=\overline{-z}$

Las demostraciones se proponen como ejercicio pero, como ejemplo, probamos (4)

Sea $z=a+bi$, luego $\bar{z}=a-bi$ y

$z.\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2=\mathrm{Re}(z)^2+\mathrm{Im}(z)^2$

Cociente de números complejos

La noción de conjugado permite hallar de manera práctica el cociente $\frac{a+bi}{c+di}$ multiplicando el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

de donde:

$$\boxed{\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i}$$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 4+i$ y $z_2 = 2-3i$

$$\frac{4+i}{2-3i} = \frac{(4+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{5+14i}{2^2+3^2} = \frac{5}{13} + \frac{14i}{13}$$

Inverso de un número complejo

Dado $z = a+bi \neq 0$ se define $z^{-1} = \dfrac{1}{a+bi}$

Realizando el cociente resulta:

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

$$\boxed{z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-bi}{a^2+b^2}}$$

Para $z_1 = a+bi$ y $z_2 = c+di \neq 0$ verifique que $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 . z_2^{-1}$

Otras propiedades de los conjugados:

8- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\quad (z_2 \neq 0)$

9- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$ $\quad (z \neq 0)$

10- Si con $R(z_1, z_2, ..., z_r)$ se indica una operación efectuada combinando los complejos $z_1, z_2, ..., z_r$ en sumas, productos, potencias y cocientes, entonces $\overline{R(z_1, z_2, ..., z_r)} = R(\overline{z_1}, \overline{z_2}, ..., \overline{z_r})$

➲ EJERCICIOS:

7- Calcule:

a) $\dfrac{(1-i)}{(1+i)}$ c) $\overline{\left(\dfrac{6-i}{2i}\right)^2}$

b) $\dfrac{(1-i)(1+2i)}{1+i}$ d) $\dfrac{(2-2i)^3}{(2+2i)^3}$

8- Efectúe las operaciones

a) $\dfrac{6i}{5+4i}$ g) $4i.9i - 3i.(-2i)^2$

b) $(2+5i)(-3+i)$ h) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^4$

c) $-(4-3i)-(-3+7i)$ i) $\overline{\dfrac{12+i}{1-i}}$

d) $\dfrac{(14+11i)-13i}{i}$ j) $\overline{\left(\dfrac{i\sqrt{2}}{2}\right)}$

e) $i^{12}.i^{-121} + i^{100}$ (k) $\dfrac{1+i}{\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}}$

f) $\dfrac{6+2i}{\overline{3-i}}$ l) $\overline{a-bi}.\dfrac{1}{\overline{a+bi}}$

9- Calcule $\dfrac{1}{z}$ para:

a) $z = -4i$ b) $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}i$ c) $z = -4 + \sqrt{3}i$

10- Encuentre los números complejos $z = a+bi$ tales que:

a) $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ b) $z = -\overline{z}$

11- Encuentre los números reales x e y que satisfacen:

a) $(x+yi)(3-2i) = 4+i$

b) $(x+iy)(1+i) = 3-i$

c) $(x+iy)4i = 14i$

12- Compruebe que el número complejo dado satisface la ecuación dada.

a) $1+2i$; $\quad x^2 - 2x + 5 = 0$

b) $3+2i$; $\quad x^2 - (7+3i)x + (10+11i) = 0$

13- Encuentre el número z cuyo inverso es 5 + 6i.

14- Calcule a de modo que el complejo $z = \dfrac{2+ai}{1-i}$ sea imaginario puro.

Raíz cuadrada de un número complejo en forma binómica

Se llama **raíz cuadrada** de un número complejo $z = a+bi$, a todo número x que sea solución de $x^2 = a+bi$. Se indica $x = \sqrt{a+bi}$ y resulta:

$$x = \sqrt{a+bi} \Leftrightarrow x^2 = a+bi$$

Ejemplo:

Calcular $\sqrt{3+4i}$.

Si existe solución *x*, será de la forma: $x = u + vi$ y deberá cumplir

$(u+vi)^2 = 3+4i$.

Después de resolver el cuadrado y de aplicar igualdad de números complejos, los números reales *u* y *v* buscados deben satisfacer el sistema:

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = 3 & (1) \\ 2uv = 4 & (3) \end{cases}$$

Elevamos al cuadrado ambos miembros de las igualdades y las sumamos:

$$u^4 + v^4 - 2u^2v^2 = 9$$
$$4u^2v^2 = 16$$
$$u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = 25$$
$$\left(u^2+v^2\right)^2 = 25$$
$$u^2 + v^2 = 5 \qquad (2)$$

Sumando miembro a miembro (1) y (2), obtenemos $2u^2 = 8$, luego

$$u = 2 \text{ o } u = -2.$$

Restando miembro a miembro (2) y (1), nos da $2v^2 = 2$ por lo tanto

$$v = 1 \text{ o } v = -1.$$

Ahora bien, los valores de *u* y *v* deben combinarse de modo que el signo de *uv* sea positivo, en virtud de la ecuación (3) $2uv = 4$.

Entonces las soluciones son:

$$x_1 = 2+i \quad \text{y} \quad x_2 = -2-i$$

El procedimiento seguido para resolver el problema es constructivo de modo que fácilmente puede ser empleado para demostrar el **teorema**:

> Si $x = u+vi$ es solución de $x^2 = a+bi$, entonces:
>
> $$u = \pm\sqrt{\frac{p+a}{2}}; \qquad v = \pm\sqrt{\frac{p-a}{2}}$$
>
> donde $p = \sqrt{a^2+b^2}$ y el signo de $u.v$ debe ser igual al signo de *b*.

El cuerpo de los números complejos

La suma y el producto definidos en $\mathbb{C}$ verifican propiedades semejantes a las de la suma y el producto de números reales. Por otra parte, los números reales mantienen en $\mathbb{C}$ las propiedades formales de la suma y el producto debido a su identificación con un subconjunto de los números complejos.

Propiedades de la suma y el producto de números complejos

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, entonces

Suma

$S_1)\ z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	Clausura
$S_2)\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	Conmutativa
$S_3)\ (z_1+z_2)+z_3 = z_1 + (z_2+z_3)$	Asociativa
$S_4)\ \exists\ 0 / z+0 = z\ \ \forall z \in \mathbb{C}$	Existencia de neutro
$S_5)\ \forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z \in \mathbb{C} / z + (-z) = 0$	Existencia de opuesto

Producto

$P_1)\ z_1 \times z_2 \in \mathbb{C}$	Clausura
$P_2)\ z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$	Conmutativa
$P_3)\ (z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$	Asociativa
$P_4)\ \exists 1 \in \mathbb{C} / z \times 1 = z\ \ \forall z \in \mathbb{C}$	Existencia de neutro
$P_5)\ \forall z \in \mathbb{C} / z \neq 0, \exists z^{-1} \in \mathbb{C} / z \times z^{-1} = 1$	Existencia de inverso
$P_6)\ z_1 \times (z_2+z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$	Distributiva del producto respecto de la suma

Cuando un sistema de números, con operaciones definidas en él, satisface las propiedades anteriores recibe el nombre de cuerpo. Podemos hablar, entonces, del ***cuerpo de los números complejos*** y también del cuerpo de los números reales.

➲ EJERCICIO:

15- Ejemplifique las propiedades anteriores.

AUTOEVALUACIÓN 3

1. Demuestre el Teorema que establece las raíces cuadradas de un número complejo en forma binómica.

2. Encuentre dos números reales x, y que verifiquen

$$(x+yi)(3+2i)^2=\overline{2+3i}$$

3. Verifique las igualdades:

i) $i^0+i^1+i^2+........+i^{100}=1$

ii) $(2-\sqrt{5}i)^2-4(2-\sqrt{5}i)+9=0$

iii) $\left(\dfrac{2+2i}{2-2i}\right)\left(\dfrac{3+3i}{3-3i}\right)=-1$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones a coeficientes complejos:

a) $(3+i)z=4i$

b) $(3+i)z=6+2i$

c) $z^2=3-4i$

5. Calcule las siguientes raíces cuadradas:

a) $\sqrt{2i}$

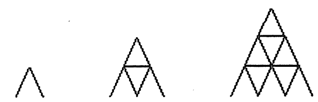
b) $\sqrt{4-3i}$

c) $\sqrt{-1+i}$

6. Sabiendo que una de las raíces cuadradas de un complejo es $\dfrac{1}{2}-i$, hallar dicho complejo y la raíz restante del mismo.

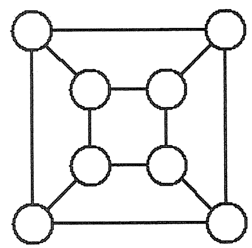
Un momento para la distracción.....

- Para hacer una torre de naipes de 1 piso se usan 2 naipes, para hacerla de 2 pisos se usan 7 naipes, para hacerla de 3 pisos se usan 15 naipes.

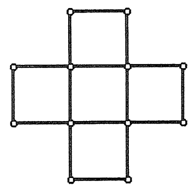


¿Cuántos naipes hay que usar para hacer una torre de 100 pisos?

- Distribuir en los círculos los números de tres dígitos 111, 112, 121, 122, 211, 212, 221, 222, sin repeticiones, de modo que los números escritos en círculos que están unidos entre si por un segmento no tengan más de una coincidencia (es decir, pueden tener exactamente una coincidencia o no tener coincidencias).



- Escribir en cada vértice un número entero del 1 al 12 inclusive, sin repeticiones, de modo que en cada uno de los 5 cuadrados la suma de los cuatro números de sus vértices sea la misma.



CAPÍTULO 4 - ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS EN UNA INCÓGNITA

Una expresión es algebraica si en ella aparecen variables y números, llamados coeficientes, relacionados por las operaciones de suma, resta, producto, división, potenciación y radicación. En este capítulo se estudiarán expresiones algebraicas a coeficientes reales en una incógnita.

Las siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas:

$$3x^5 + 8\sqrt{x} - 1 \quad ; \quad \frac{3x - x^2}{8x^3 + \sqrt[3]{x}}$$

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas

$$P(x) = Q(x) \qquad (1)$$

Donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones algebraicas que contienen a la incógnita x.

Resolver una ecuación, o hallar la solución de una ecuación, es encontrar el o los valores numéricos de x que la verifican.

Comentario:

> *"Desde muy antiguo el hombre resolvió problemas que se traducen en ecuaciones. La fórmula para la solución de la ecuación de segundo grado era conocida desde muy antiguo (≅ 2000 a.c.). Pero es en el siglo XVI donde toma auge el estudio del Álgebra y los italianos Tartaglia (1500-1575) y Cardamo (1501-1576) encontraron reglas análogas, aunque más complicadas para la ecuación de tercer y cuarto grado. Las fórmulas de solución se presentan en forma de raíces de expresiones formadas por los coeficientes. Mas adelante- Abel y Ruffini demostraron que no es posible resolver por medio de radicales ecuaciones de grado superior al cuatro. Y fue el genio de Galois (1811-1832) quien dio las razones profundas de este hecho."*

Se verá enseguida que, por la definición de equivalencia de ecuaciones y sus propiedades, (1) es equivalente a

$$P(x) - Q(x) = 0 \qquad (2)$$

De manera que resolver (1) es equivalente a hallar las soluciones de (2), resta de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se llaman **equivalentes** si y solo si tienen las mismas soluciones.

Propiedades

1) Si a ambos miembros de la ecuación $P(x) = Q(x)$ se le suma o resta un número real o una expresión algebraica $R(x)$ se obtiene una ecuación equivalente a la dada.

$$P(x) = Q(x) \text{ es equivalente con}$$

$$P(x) + a = Q(x) + a \text{ y con } P(x) + R(x) = Q(x) + R(x)$$

↳ OBSERVACIÓN:

Este **principio de adición** justifica la equivalencia mostrada en (2) ya que restando $Q(x)$ a ambos miembros de $P(x) = Q(x)$ resulta

$$P(x) - Q(x) = Q(x) - Q(x)$$

$$P(x) - Q(x) = 0$$

Ejemplo:

$5x + 3 = 10x - 7$ es equivalente con $-5x = -10$, ya que ambas tienen la solución única $x = 2$

2) Si se multiplican ambos miembros de una ecuación por un número real $a \neq 0$ se obtiene una ecuación equivalente con la dada.

$$P(x) = Q(x) \text{ es equivalente con } a \,.\, P(x) = a \,.\, Q(x)$$

Ejemplo:

$x + 1 = 3x - 1$ es equivalente con $3x + 3 = 9x - 3$ para $a=3$, ya que ambas tienen la misma solución $x = 1$.

El procedimiento habitual que se sigue **para resolver una ecuación** es transformarla, por las propiedades de equivalencia de ecuaciones, en otra más simple que permita encontrar la o las soluciones con facilidad.

Por ejemplo:

La ecuación $3x + 12 = 18$ es equivalente con la ecuación $x = 2$

la que se obtiene restando a ambos miembros 12 y luego dividiendo por 3.

Ecuaciones lineales

Una ecuación es lineal si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la forma:

$$ax + b = 0, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ y } b \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:

i) Se resuelve la ecuación $5x - (3x + 6) = -x + 3$

transformándola en ecuaciones equivalentes $5x - 3x + x = 3 + 6$

$$3x = 9$$

$$\boxed{x = 3}$$

ii) La ecuación $x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 2$

se resuelve a través de las transformaciones $-5x + 2 = -4x + 2$

$$-x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

iii) La ecuación $2x + 3(x + 8) = 5x - 1$

se transforma en las ecuaciones equivalentes $2x + 3x - 5x = -1 - 24$

En este caso no existe x que verifique la ecuación. Se dice que la ecuación es **incompatible**, pues $0x = -25$

iv) La ecuación $\frac{4}{5}x + x - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{3}x + 4$

$$\left(\frac{4}{5} + 1 - \frac{1}{2} - \frac{5}{3}\right)x = 4 + 1$$

$$\frac{24 + 30 - 15 - 50}{30}x = 5$$

$$-\frac{11}{30}x = 5$$

tiene única solución $\boxed{x = -\frac{150}{11}}$

v) La ecuación $10x + 9 - 7x = 3x + 9$

pasa a $10x - 7x - 3x = 9 - 9$

luego $0x = 0$

La ecuación se verifica para cualquier valor real de x. En este caso la ecuación se llama **identidad**.

➲ EJERCICIOS:

1- Resuelva:

i) $x - 1 = 2x - 3$

ii) $(x - 2)^2 - 4 = 2x + (x - 2)(x + 2) - 1$

iii) $1 - \frac{x - 4}{3} = 2(x + 5)$

iv) $6(x + 3) - x = \frac{1}{2}(x - 9) + 2x$

v) $\frac{1}{5}(x - 1) = \frac{3}{5}x$

2- Halle k de modo que la ecuación $5x - k = 6x - 5k + 3$ tenga por solución $x = 1$.

Ecuación cuadrática

Una ecuación es cuadrática si mediante transformaciones equivalentes puede reducirse a la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0$$

Una ecuación de este tipo admite a lo sumo dos soluciones, las que se obtienen aplicando la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

En efecto:

Como $a \neq 0$, la ecuación $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ es equivalente con la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

Se completa la expresión $x^2 + \frac{b}{a}x$ sumando y restando $\frac{b^2}{4a^2}$ para obtener el cuadrado de un binomio y luego haciendo transformaciones sucesivas convenientes se llega al resultado deseado.

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

↳ OBSERVACIÓN:

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y decide sobre la naturaleza de las soluciones de la ecuación:

1- Si $\Delta > 0$ entonces las dos soluciones son reales y distintas.

2- Si $\Delta = 0$ entonces las dos soluciones son iguales. Se dice que la ecuación tiene una solución doble.

3- Si $\Delta < 0$ no hay solución real. Las soluciones son dos números complejos conjugados.

Ejemplos:

i) Hallar las soluciones de $x^2 - 9x + 8 = 0$. Como $\Delta = 81 - 32 = 49 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow x_1 = 8,\ x_2 = 1$$

i) $x^2 - 4x + 4 = 0$ Como $\Delta = 0$, la ecuación tiene dos soluciones iguales

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = 2$$ Es decir, 2 es raíz doble.

ii) $x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene solución real, pues $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Las soluciones complejas son $x_1 = 1 - i$, $x_2 = 1 + i$

Propiedades de la suma y el producto de las soluciones de la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sean las soluciones $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Entonces:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}} \quad (*)$$

➲ EJERCICIOS:

3- Verifique las propiedades (*).

4- Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

i) $x^2 - 2x + 2 = 0$ iii) $x^2 - 4 = 0$

ii) $-x^2 + 3x - 2 = 0$ iv) $(2x - a)(x + a) = (2x - a)^2$ $a>0$

5- Encuentre el valor de k, de modo que la ecuación $x^2 - 4kx + k - 2 = 0$ admita la solución $x = 0$.

6- Encuentre el valor de k para el cual la suma de las soluciones de la ecuación $5x^2 + 6x + k = 0$ sea el doble de su producto.

7- Encuentre una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean las inversas de las soluciones de $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ecuaciones que pueden reducirse a una ecuación cuadrática

Ecuaciones con radicales

Para resolver estas ecuaciones se procede del siguiente modo:

1) Se deja en un miembro el término radical.
2) Se eleva ambos miembros al cuadrado.
3) Se resuelve la ecuación resultante.
4) Se verifican las soluciones para ver si hay soluciones extrañas.

Ejemplos:

i) $\sqrt{x} = -x$ pasa a $x = x^2$

$x(x-1) = 0$ entonces $x = 1$ ó $x = 0$.

Sin embargo, 1 no es solución ya que $1 \neq -1$. Se dice que 1 es una solución extraña.

ii) La ecuación $x - \sqrt{x+7} - 5 = 0$ (1) se resuelve:

$$x - 5 = \sqrt{x+7}$$

$$(x-5)^2 = x + 7$$

$$x^2 - 10x + 25 = x + 7$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0$$

$$(x-2)(x-9) = 0$$

Compruebe que 2 es una solución extraña para la ecuación.

➲ EJERCICIO:

8- Resuelva las ecuaciones:

i) $\sqrt{2x-5} = 1 + \sqrt{x-3}$

ii) $\sqrt{x} - \sqrt{x-3} = 1$

iii) $x + 1 = \sqrt{x+2} + x$

iv) $\sqrt{x+5} + x = 2x - 1$

Un problema histórico:

El siguiente problema fue descubierto en los escritos del matemático hindú Maharaví (d.C. 850).

La cuarta parte de un hato de camellos fue vista en el bosque, el doble de la raíz cuadrada del total de camellos del hato se fue a las laderas

de la montaña, y tres veces cinco camellos fueron vistos en la orilla de un río. ¿Cuál es el número de camellos del hato?

Sea x el número de camellos del hato.

La ecuación descrita por Maharaví no es cuadrática:

$$\frac{1}{4}x + 2\sqrt{x} + 15 = x \qquad (1)$$

pero por medio de una sustitución de la variable x se obtiene una cuadrática. Después de resolver ésta para esta nueva variable, se vuelve a sustituir y se resuelve nuevamente.

Así, hacemos para resolver (1): $\sqrt{x} = y \Rightarrow x = y^2$

Obtenemos la ecuación $\frac{1}{4}y^2 + 2y + 15 = y^2$ *en la variable y.*

Equivalente a $y^2 + 8y + 60 = 4y^2 \Rightarrow -3y^2 + 8y + 60$

de donde $y_1 = 6$ *o* $y_2 = -\frac{20}{6}$ *(no es solución)*

Entonces $x = y^2$ *es* $x = 36$. *Verifique!!*

Ecuaciones bicuadráticas

Ejemplo:

Para resolver la ecuación $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$, se procede por sustitución haciendo $x^2 = u$ y se resuelve la ecuación resultante

$u^2 - 7u - 18 = 0$, cuyas soluciones son $u = 9$, $u = -2$

Entonces $x_1 = 3$, $x_2 = -3$ son las únicas soluciones reales de la ecuación original.

Además $x_3 = \sqrt{2}i$, $x_4 = -\sqrt{2}i$ son soluciones complejas de la ecuación original.

➲ EJERCICIO:

9- Resuelva mediante sustituciones convenientes:

i) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

ii) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

En síntesis:

Para resolver las ecuaciones se:

1- *Aplica la propiedad distributiva para eliminar paréntesis, si fuera necesario.*

2- *Eliminan fracciones y decimales.*

3- *Suma en ambos miembros de la ecuación los términos que sean semejantes.*

4- *Emplean las propiedades de suma y producto para despejar la variable.*

5- *Eliminan las fracciones multiplicando ambos miembros por el mínimo común múltiplo de los denominadores, en el caso de ecuaciones racionales.*

6- *Transforman las ecuaciones radicales en enteras eliminando los términos en los cuales la incógnita está en el radicando.*

➲ EJERCICIOS:

Resuelva los siguientes problemas:

10- Un cable de 23m se corta en dos trozos, uno es tres veces más largo que el otro. ¿Cuáles son las longitudes de los trozos?

11- Si se le resta a 6 siete veces un cierto número, el resultado es cinco veces el número. ¿De qué número se trata?

12- El precio de una casa se redujo el 15% para alcanzar un valor de $52.500. ¿Cuál era el precio original?

13- Tres números son tales que el segundo es seis unidades menor que tres veces el primero y el tercero es dos unidades más que $\frac{2}{3}$ del segundo. La suma de los tres es 172. Encuentre el mayor de los tres números.

14- Encuentre tres enteros impares consecutivos tales que la suma del primero, más dos veces el segundo, más tres veces el tercero, sea 82.

15- El cuadrado de un número menos el doble de él es tres. ¿Cuál es el número?

16- Tres enteros pares consecutivos son tales que el cuadrado del tercero es 76 más que el cuadrado del segundo. Obtenga esos tres números.

17- Obtenga tres enteros consecutivos son tales que cuatro veces el cuadrado del tercero, menos tres veces el cuadrado del primero, menos 41, sea el doble del cuadrado del segundo.

Otro problema:

Hacia el ocaso del esplendor de la era griega, muy pocos hombres de ciencia se interesaban por el álgebra. La mayor parte de ellos se hallaban imbuidos de conocimientos geométricos, concurriendo a la Universidad, donde Hypatía dictaba sus conferencias. Fue por ese entonces, sin embargo, cuando entra en escena un hombre singular: Diofanto. Éste sistematizó sus ideas con el empleo de símbolos creados por él mismo, dando nacimiento a lo que hoy se conoce como ecuaciones indeterminadas.

Por ello se le reconoce, con justicia, como el "padre del álgebra", y sus tan variados problemas como hábiles soluciones se constituyeron en modelo para Fermat, Euler y Gauss.

Ante lo ambiguo de los datos sobre la fecha precisa en que vivió Diofanto (se calcula que fue entre el 100 y el 400 de nuestra era), se opone el conocimiento exacto de cuántos años abarcó ésta.

A pesar de que lo antedicho parece un despropósito, en la realidad no es tal, ya que la edad de este matemático quedó registrada para siempre con un acertijo descrito con términos algebraicos hace ya de estos unos 1500 años.

Atribuido a Hypatía, gran estudiosa y analizadora de los trabajos de Diofanto, el acertijo reza así:

"Dios le concedió niñez durante una sexta parte de su vida, y juventud durante otra doceava parte. Lo alumbró con la luz del matrimonio durante una séptima parte más y cinco años después de su boda, le concedió un hijo. Después de alcanzar la mitad de la vida de su padre, la muerte lo llevó, dejando a Diofanto durante los últimos cuatro años de su vida con el único cosuelo que puede ofrecer la matemática".

Expresado cada segmento en símbolos algebraicos y resuelta la ecuación, se obtiene cierto número (¿cuál?), que lógicamente se corresponde, dando crédito al trabajo, con los años vividos por el matemático

AUTOEVALUACIÓN 4

1. Indique cuales de los siguientes pares de ecuaciones son equivalentes:

i) $3x-5=x+7$	$x-3=3$
ii) $x^2=4$	$x=2$
iii) $x^2=9$	$(x-3).(x+3)=0$
iv) $(x-1).(x-5)=0$	$-2x^2+12x-10=0$
v) $(x-2).(x+2)=x^2-4$	$(x+2).(x+2)=x^2+4$
vi) $(x+1).(2x-1)=0$	$x+1=0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones:

i) $4x+\frac{1}{2}x=27$

ii) $2(3x-2)-(x+3)=8$

iii) $\frac{3x+5}{6}-\frac{5x+4}{9}=1-\frac{x}{18}$

iv) $3x=5x-2x$

v) $x-5x=-4x+3$

vi) $7x^2-3x=0$

vii) $4+\sqrt{x}=3(x-\sqrt{x})$

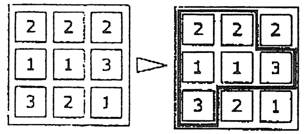
viii) $\sqrt{x}-x=0$

3. Encuentre el valor de k para que la ecuación $x^2+3x+k=0$ tenga única solución real.
4. Demuestre que si los coeficientes a y c de la ecuación $ax^2+bx+c=0$ tienen signos contrarios entonces las raíces son reales y distintas.
5. Dos embarcaciones A y B parten del mismo punto y a la misma hora en direcciones perpendiculares. B se desplaza 7km/h más lento que A. Después de 4 horas se encuentran a una distancia de 68km. entre sí. Calcule la velocidad de cada embarcación.
6. Un tanque para exhibición de especies marinas contiene 20.000 litros de agua de mar. El agua de mar contiene un 7,5% de sal. ¿Cuántos litros, redondeando al litro más próximo, de agua dulce se necesita añadir al tanque para que la mezcla contenga solo un 7% de sal?

Un momento para la distracción.....

El cartero

Cada diagrama representa un pequeño barrio. Un cartero debe recorrer un camino cerrado por las calles, sabiendo que el número en cada manzana indica cuántos lados de esa manzana forman parte del camino. Si cada cuadra puede ser usada sólo una vez, indique cual será el recorrido del cartero.



Ejemplo en un tablero reducido.

Barrio A

3	2	2	3	2
1	1	2	0	3
1	2	3	2	2
2	2	2	2	2
3	2	3	1	3

Barrio B

2	2	1	3	1
3	1	1	3	1
2	2	1	2	2
3	3	2	3	2
2	2	2	2	3

Un fraude

Un vendedor de telas gana el 30% sobre el precio de costo. Pero un día descubre un metro defectuoso que hace aumentar sus beneficios al 33%. ¿Cuánto mide en realidad el metro tramposo?

Una abuela coqueta

Federico preguntó a su abuela Marta: *"¿Cuántos años tienes?"*

A lo que la abuela le contestó: *"A pesar de lo indiscreto de tu pregunta, voy a responderte: si permutas las cifras de mi edad, obtendrás la tercera parte de la edad que tendré dentro de nueve años, y la suma de las cifras de mi edad es 9"*

¿Qué edad tiene la abuela de Federico?

CAPÍTULO 5- POLINOMIOS

Entre las expresiones algebraicas que se presentan con frecuencia en Matemática se encuentran los polinomios, razón por la cual se revisarán las operaciones usuales entre los mismos: suma, diferencia, producto y división; comenzando con la definición:

> Un polinomio en una variable es una expresión de la forma
>
> $$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_1 x + a_0$$
>
> donde n es un entero no negativo, x es una variable y $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son números complejos que llamamos **coeficientes**.

Ejemplos:

i- $P(x) = (2-i)x^3 + 6ix^2 - (1-i)x + \sqrt{2}i$

ii- $Q(x) = 5x^6 - 3x - \dfrac{1}{7}$

Se indicará:

* $\mathbb{C}[x]$ para simbolizar el conjunto de polinomios con coeficientes complejos.

* $\mathbb{R}[x]$ para representar el conjunto de polinomios con coeficientes reales.

Utilizando el símbolo de sumatoria se puede expresar el siguiente polinomio:

$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ en la forma $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$

Generalizando, un polinomio se puede expresar en forma abreviada:

$$\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \text{ , con } a_k \in \mathbb{C} \text{ y } n \in \mathbb{N}_0}$$

El número $a_n \neq 0$ se llama coeficiente principal.

El número a_0 es el término constante o independiente.

Si $a_n \neq 0$, se dice que n es el grado del polinomio y se simboliza $gr(P) = n$

Entonces, el grado de un polinomio es el mayor exponente de los términos de coeficientes no nulos.

Si el polinomio se reduce a un número, se llama polinomio **constante**: $P(x) = a_0$

En este caso, si $a_0 \neq 0$, el polinomio constante tiene grado 0.

Si todos los coeficientes son iguales a cero, $P(x) \equiv 0$ se denomina polinomio **nulo** y carece de grado.

Un **monomio** es un polinomio de un solo término. Un polinomio de dos términos se llama **binomio** y uno de tres términos es un **trinomio**.

Los polinomios de grado 1 son de la forma $a_1 x + a_0$, con $a_1 \neq 0$ y se denominan polinomios **lineales** o de primer grado.

Los polinomios de grado 2 son de la forma $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_2 \neq 0$ y se llaman polinomios **cuadráticos** o de segundo grado.

Los polinomios de grado 3 son de la forma $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_3 \neq 0$ y se llaman polinomios **cúbicos** o de tercer grado.

➲ EJERCICIOS:

1- Indique y justifique, cuales de las siguientes expresiones son polinomios:

a) $(x+1)^3$

b) $5^x - x^3 + 2x^2$

c) $(3+2i)x^5 - 2ix^2 + (1+i)$

d) $x^{\frac{2}{7}} + x^{\frac{1}{7}} - x + \dfrac{1}{7}$

e) $\sqrt{x}i + 2$

2- Complete:

a) $3x^5 + 2x^2 - 1$ es un polinomio de grado.............y su coeficiente principal es................

b) $1-i$ es un polinomio.........de grado..........

c) $x-(1-i)$ es un polinomio..........y su término constante es........

d) 0 es el polinomio......... y carece de.........

Igualdad de polinomios

Dos polinomios pertenecientes a $\mathbb{C}[x]$ **son iguales** si y solo si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos de igual grado son iguales.

➲ EJERCICIOS:

3- Complete:

Dados $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$; $Q(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$, $P(x)=Q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{cases}$

4- Determine los valores de $a,\ b,\ c,\ d$ para que: $P(x)=Q(x)$

a) $P(x)=-\frac{1}{2}x^4+4x^3+5x+2$

$Q(x)=(c+d)x^4+(b+c)x^3+(a+b)x+a$

b) $P(x)=ax^4+dx^3+(b-c)x^2+cx+2a$

$Q(x)=ix^4+(1-i)x^3+2x^2-x+2i$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma de polinomios:

Dados los polinomios $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ $Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_0$ se define **suma** de $P(x)$ y $Q(x)$ al polinomio que se indica $P(x)+Q(x)$ tal que : *.Si $m=n$ entonces $P(x)+Q(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\dots+(a_0+b_0)$ *.Si $m\neq n$ se puede suponer, sin perder generalidad, que $m>n$. Entonces, llamando $P^*(x)$ a: $P^*(x)=0x^m+0x^{m-1}+\dots+a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$, se define: $P(x)+Q(x)=P^*(x)+Q(x)$

Ejemplo:

Dados $P(x)=x^5-ix^4+x^2-2ix+1$ y $Q(x)=3ix^2+5x$

$$P(x)+Q(x)=(x^5-ix^4+x^2-2ix+1)+(3ix^2+5x)$$
$$=x^5-ix^4+(1+3i)x^2+(5-2i)x+1$$

➲ EJERCICIOS:

5- Analice cuáles de las propiedades de la suma de números complejos se verifican para la suma de polinomios.

6- Dados $P(x)=x^4-2x^2+ix-1$ $\quad Q(x)=-2x^3+x^2+3$

$S(x)=-x^4+3x^3-(1+i)x+1$ $\quad T(x)=-x^3+2x^2-x+1$

Complete:

$P(x)+Q(x)=\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+Q(x))=\dots\dots\dots$

$P(x)+S(x)=\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+S(x))=\dots\dots\dots$

$P(x)+T(x)=\dots\dots\dots$ $\quad gr(P(x)+T(x))=\dots\dots\dots$

7- Enuncie la propiedad sobre el grado de la suma de dos polinomios con respecto al grado de los sumandos.

8- Recordando que todo polinomio acepta polinomio opuesto defina la diferencia de dos polinomios.

Producto de polinomios:

Dados $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ y $Q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\dots+b_1x+b_0$ El polinomio que se indica $P(x).Q(x)$ es el polinomio **producto** cuyos términos son de la forma: $a_i b_j x^{i+j}$ donde $i=0,1,2,\dots,n$ y $j=0,1,2,\dots,m$. $P(x).Q(x)=a_n b_m x^{n+m}+\dots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$

Ejemplo:

Dados $P(x)=x^5-ix^4+x^2-2ix+1$ y $Q(x)=3ix^2+5x$

$$P(x).Q(x)=(x^5-ix^4+x^2-2ix+1)(3ix^2+5x)$$
$$=3ix^7+5x^6+3x^6-5ix^5+3ix^4+5x^3+6x^3-10ix^2+3ix^2+5x$$
$$=3ix^7+8x^6-5ix^5+3ix^4+11x^3-7ix^2+5x$$

➲ EJERCICIOS:

9- Dados los polinomios:

$$P(x) = -ix^3 + (1+i)x + \frac{1}{2}$$
$$Q(x) = x - 3$$
$$S(x) = x^2 + x + 1$$

Efectúe los productos y verifique:

i) $P(x).Q(x) = Q(x).P(x)$

ii) $(P(x).Q(x))S(x) = P(x)(Q(x).S(x))$

iii) $(P(x)+Q(x))S(x) = P(x).S(x) + Q(x).S(x)$

10- Dados los polinomios:

$P(x) = (1+i)x - i$ $\quad S(x) = x^3 - 2x^2 - ix$ $\quad R(x) = 0$

$Q(x) = x^2 + 2x + 1$ $\quad T(x) = 3i$

Complete:

$P(x).Q(x) = ...$ $\quad gr(P(x).Q(x)) = ...$

$P(x).S(x) = ...$ $\quad gr(P(x).S(x)) = ...$

$S(x).T(x) = ...$ $\quad gr(S(x).T(x)) = ...$

$Q(x).R(x) = ...$ $\quad gr(Q(x).R(x)) = ...$

11- Exprese la propiedad sobre el grado del producto de dos polinomios no nulos $P(x)$ y $Q(x)$.

12- ¿Existen polinomios con inverso para el producto?. Si existen, ¿cuáles son?

13- Justifique el enunciado: $P(x).Q(x) = 0$ si y solo si $P(x) = 0$ ó $Q(x) = 0$

División de polinomios:

> Dado un polinomio $P(x)$ y otro $D(x) \neq 0$,
> siempre existen otros dos polinomios $Q(x)$ **(cociente)** y $R(x)$ **(resto)** tal que $gr(R(x)) < gr(D(x))$ o $R(x) = 0$, de manera que:
> $$P(x) = Q(x).D(x) + R(x)$$

El proceso de la división de un polinomio por otro se sistematiza en un esquema para obtener el cociente y el resto, tal como se muestra en los ejemplos que siguen:

i) $P(x) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$D(x) = x^2 + x - 1$

$$\begin{array}{r|l}
x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & x^2 + x - 1 \\ \cline{2-2}
-x^6 - x^5 + x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad & x^4 + 3x^2 - x + 1 \\ \cline{1-1}
3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 & \\
-3x^4 - 3x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-x^3 + 2x - 1 & \\
x^3 + x^2 - x \quad & \\ \cline{1-1}
x^2 + x - 1 & \\
-x^2 - x + 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Cociente: $Q(x) = x^4 + 3x^2 - x + 1$; Resto: $R(x) = 0$; se verifica:

$P(x) = D(x)(x^4 + 3x^2 - x + 1)$

$x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = (x^4 + 3x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$

ii) $P(x) = x^3 - 2ix^2 - x + 1$

$D(x) = x - i$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2ix^2 - x + 1 & x - i \\ \cline{2-2}
-x^3 + ix^2 \qquad\qquad & x^2 - ix \\ \cline{1-1}
-ix^2 - x + 1 & \\
+ix^2 + x \quad & \\ \cline{1-1}
1 &
\end{array}$$

Cociente: $Q(x) = x^2 - ix$, Resto: $R(x) = 1$

Se verifica $x^3 - 2ix^2 - x + 1 = (x^2 - ix)(x - i) + 1$

✎ OBSERVACIÓN:

Cuando el resto de la división de $P(x)$ por $D(x)$ es cero, como en el ejemplo i), se dice que "$D(x)$ divide a $P(x)$" o que "$P(x)$ es divisible por $D(x)$" o que

"$D(x)$ es un factor de $P(x)$" o que "$P(x)$ es un múltiplo de $D(x)$" y entonces $P(x) = Q(x).D(x)$

Regla de Ruffini

Se aplica para dividir un polinomio $P(x)$ por un binomio de la forma $Q(x) = x - a$ donde $a \in \mathbf{C}$.

Ejemplo:

Sea $P(x)=4x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 5x + 6$ y $Q(x)=x-2$

Queremos calcular el polinomio cociente y resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$

El proceso de aplicación de la Regla de Ruffini requiere:

1°) Completar, si no lo estuviere, el polinomio dividendo $P(x)$ y escribir los coeficientes en lista: 4 -5 -2 -6 -5 6

Colocar a un lado el valor de x que anula el divisor, en nuestro caso $x = 2$ hace $Q(2) = 0$

2°) Dibujar una línea debajo de los coeficientes y bajar el primer coeficiente:

	4	-5	-2	-6	-5	6
2	↓					
	4					

3°) Multiplicar por 2 el primer coeficiente y sumar éste producto al segundo coeficiente:

	4	-5	-2	-6	-5	6
		+	+	+	+	+
2		8	6	8	4	-2
	4	3	4	2	-1	4

4°) Repetir este procedimiento sucesivamente con todos los coeficientes hasta agotarlos. De esta manera se obtienen los coeficientes del cociente. El último número es el resto de la división.

El resultado es $C(x) = 4x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ y $R(x) = 4$

Para el ejemplo ii) anterior:

$P(x) = x^3 - 2ix^2 - x + 1$ y $D(x) = x - i$

	1	$-2i$	-1	1
i		i	1	0
	1	$-i$	0	1

$Q(x) = x^2 - ix$ $R(x) = 1$

➲ EJERCICIO:

14- Efectúe las divisiones entre los polinomios $P(x)$ y $D(x)$. En las que sea posible aplique la regla de Ruffini.

i) $P(x) = 6x^3 - x + 1$, $D(x) = 3ix^2$ ii) $P(x) = i^3x^3 + i$, $D(x) = x - i$ iii) $P(x) = x + 1$, $D(x) = x - i$

Raíces de un polinomio

Un número $\alpha \in \mathbf{C}$ es una **raíz**, o un cero del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

si el valor numérico de $P(x)$ para $x = \alpha$ es igual a 0.

Es decir, α es raíz de $P(x)$ si $P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$

✎ OBSERVACIÓN:

$P(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0$ es el valor numérico del polinomio para $x = \alpha$

El **Teorema del Resto**, proporciona un elemento para el reconocimiento de una raíz de un polinomio.

El **resto** de la división de un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$ con $\alpha \in \mathbf{C}$ es igual a $P(\alpha)$

Como corolario del teorema se tiene:

Un número complejo α es **raíz** de $P(x)$ si y solo si $P(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$

➲ EJERCICIOS:

15- Demuestre el Teorema del resto y su corolario.

16- Calcule el resto de la división de $P(x)=6x^3+2x^2-x+3i$ por $D(x)=x-i$

17- A partir de ejemplos conjeture para qué valores de $n\in\mathbb{N}$, $P(x)$ es divisible por $Q(x)$. Demuestre esa conjetura y dé ejemplos.

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$ divisible por $Q(x)$ para n:
x^n+a^n	$x+a$	
x^n+a^n	$x-a$	
x^n-a^n	$x+a$	
x^n-a^n	$x-a$	

18- Calcule h, de modo que 1 sea raíz del polinomio $P(x)=3x^5-x^4+2x^3-ix+h$

19- Determine h de manera que el resto de la división de $P(x)=2x^4+3x^2-x+h$ por $Q(x)=x-2$ sea 0

Ecuaciones polinómicas

Dado un polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ con $a_j\in\mathbb{C}$ y $a_n\neq 0$, se llama **ecuación polinómica** o ecuación asociada al polinomio $P(x)$ a la ecuación:

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$$

Se llama grado de la ecuación al grado del polinomio que la define.

✎ OBSERVACIÓN:

De la misma definición de raíz de un polinomio resulta que encontrar las raíces de un polinomio $P(x)$ equivale a resolver la ecuación asociada $P(x)=0$

Ejemplos:

i- Las raíces del polinomio $P(x)=2x^2+3x-2$ son las soluciones de la ecuación $2x^2+3x-2=0$ (*)

Estas son: $x_1=\dfrac{1}{2}$; $x_2=-2$, obtenidas aplicando resolvente a (*).

ii- $Q(x)=x^2+1$ tiene dos raíces complejas que son las soluciones de la ecuación asociada $x^2+1=0$. Se obtienen calculando las raíces cuadradas de -1: $x=\pm i$.

➲ EJERCICIOS:

20- Halle las soluciones de la ecuación $x^4-1=0$

21- El polinomio $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ tiene sus coeficientes reales y positivos. Si admite una raíz real ¿cuál es su signo?

22- Demuestre la propiedad: los polinomios $P(x)$ y $Q(x)=kP(x)$, con $k\neq 0$ tiene las mismas raíces.

DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL DE UN POLINOMIO

Si bien no hay fórmulas algebraicas para resolver ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro - Evaristo Galois (1811-1832), da una demostración rigurosa al respecto complementando los trabajos de los matemáticos Abel y Ruffini - existen algunos recursos para encontrar las raíces en forma exacta o aproximada.

En particular hay programas computacionales que permiten obtener las raíces reales y complejas de cualquier polinomio con suficiente aproximación.

En el proceso de la búsqueda de las raíces serán de utilidad las propiedades, que se enuncian a continuación, sobre el número de raíces, sobre las raíces complejas de polinomios a coeficientes reales y acerca de las raíces racionales de los polinomios a coeficientes enteros. Así también, el esquema de Ruffini es una posibilidad para verificar si un número es raíz de un polinomio.

Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio $P(x)$, tal que $gr(P(x))>0$, admite al menos una raíz en $\mathbb{C}$.

Este teorema permite probar que todo polinomio $P(x)$ de grado n $(n>0)$ tiene n raíces y que, además, se puede descomponer en producto de n factores.

Orden de multiplicidad de una raíz

α **es raíz de multiplicidad** h si $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha)^h$ y no es divisible por $(x-\alpha)^{h+1}$

Teorema de la descomposición factorial

Todo polinomio $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 \in \mathbb{C}[x]$ de grado positivo admite una **única** descomposición en factores de la forma $P(x)=a_n(x-\alpha_1)^{h_1}(x-\alpha_2)^{h_2}\ldots(x-\alpha_r)^{h_r}$, donde $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ son r raíces distintas de $P(x)$ y $h_1,h_2,\ldots,h_r$ indican las respectivas multiplicidades de $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ y $h_1+h_2+\ldots+h_r=n$.

✎ OBSERVACIONES:

- la suma de las multiplicidades de las raíces de un polinomio es igual a su grado.
- todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces distintas.
- si se conviene en contar cada raíz tantas veces como lo indica su multiplicidad, entonces se puede afirmar que todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces.

Ejemplos:

i- El polinomio: $P(x)=3x^2+3x-6$, se descompone factorialmente como: $P(x)=3(x-1)(x+2)$, donde $x_1=1, x_2=-2$, son las raíces de la ecuación asociada: $3x^2+3x-6=0$

ii- Para factorizar el polinomio $P(x)=x^3+27$, busquemos las raíces del mismo.

Para ello, resolvamos la ecuación asociada al polinomio $P(x)$, $x^3+27=0$ (1)

Por el ejercicio 17, sabemos que:

$$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

Este producto, es cero si y sólo si $x+3=0$ ó $x^2-3x+9=0$ (2)

Entonces, $x_1=-3$ es una solución de (1) y $x_2=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i$, $x_3=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i$ son las soluciones de (2) y por lo tanto son las otras soluciones de (1).

Luego, la factorización del polinomio es

$$P(x)=(x+3)\left(x-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}i\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i\right)$$

iii-Factorizar el polinomio $P(x)=2x^4-8x^3+8x^2$

Para ello, resolvamos la ecuación asociada al mismo $2x^4-8x^3+8x^2=0$

Observemos que $2x^4-8x^3+8x^2=2x^2(x^2-4x+4)=2x^2(x-2)^2=0$ (*)

Entonces, las soluciones de la ecuación (*) son las raíces del polinomio $P(x)$; ellas son: 0 raíz doble y 2 raíz doble, el cual se factoriza: $P(x)=2x^2(x-2)^2$

iv- El ejemplo que se presenta a continuación muestra los lineamientos que se siguen para demostrar el teorema de la descomposición en factores de un polinomio.

Sea $P(x)=3x^5-15x^4+21x^3+3x^2-24x+12$

$\alpha=1$ es una raíz de $P(x)$,

la verificamos aplicando el esquema de Ruffini.

	3	-15	21	3	-24	12
1		3	-12	9	12	-12
	3	-12	9	12	-12	0

Entonces, por el teorema de la división, resulta:

$P(x)=(x-1)\underbrace{(3x^4-12x^3+9x^2+12x-12)}_{Q_1(x)}$ (1)

Nuevamente el teorema fundamental asegura que $Q_1(x)$ tiene una raíz.

Se comprueba, aplicando el esquema de Ruffini, que $\alpha_2=1=\alpha_1$, es raíz de $Q_1(x)$ y en consecuencia de $P(x)$.

	3	-12	9	12	-12
1		3	-9	0	12
	3	-9	0	12	0

$Q_1(x)=(x-1)(3x^3-9x^2+12)$ y reemplazando en (1)

$P(x)=(x-1)(x-1)\underbrace{(3x^3-9x^2+12)}_{Q_2(x)}$

Repitiendo el razonamiento observamos que $\alpha_3=-1$ es raíz de $Q_2(x)$.

	3	-9	0	12
-1		-3	12	-12
	3	-12	12	0

De modo que $Q_2(x)=(x+1)(3x^2-12x+12)$ y

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)(3x^2-12x+12)$$
$$P(x)=(x-1)^2(x+1)3(\underbrace{x^2-4x+4}_{Q_3(x)})$$

El cociente $Q_3(x)$ admite a 2 como raíz doble de modo que $Q_3(x)=(x-2)^2$ y

entonces $\qquad P(x)=3(x-1)^2(x+1)(x-2)^2$

Queda verificado, entonces, que $P(x)$ admite 5 raíces:

$\alpha_1=\alpha_2=1$ (1 es raíz doble), $\alpha_3=-1$ (-1 es raíz simple), $\alpha_4=\alpha_5=2$ (2 es raíz doble o de multiplicidad 2) y además queda expresado en su descomposición en factores.

✎ OBSERVACIÓN:

Si α es una raíz del polinomio $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x]$, $n\geq 2$ las restantes raíces de $P(x)$ son las raíces del polinomio cociente que se obtiene al dividir $P(x)$ por $(x-\alpha)$.

POLINOMIOS A COEFICIENTES REALES

Para polinomios a coeficientes reales de grado positivo es válido el siguiente teorema que afirma que si el polinomio es a coeficientes reales y admite una raíz compleja, entonces también admite la conjugada.

Teorema

Si $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ es un polinomio, con $a_i\in\mathbb{R}$ para $i=0,1,\ldots,n$ y $\alpha\in\mathbb{C}$ tal que $P(\alpha)=0$, entonces: $P(\overline{\alpha})=0$.

Demostración:

Recordando las propiedades de las operaciones de los números complejos y sus conjugados se tiene:

$$P(\overline{\alpha})=\sum_{j=0}^{n} a_j(\overline{\alpha})^j=\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}\,\overline{\alpha^j}=\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j\alpha^j}=\overline{\sum_{j=0}^{n}a_j\alpha^j}=\overline{P(\alpha)}=\overline{0}=0$$

Ejemplo:

El polinomio $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ admite las raíces $\alpha_1=i$ y $\overline{\alpha_2}=-i$, como se verifica aplicando la regla de Ruffini

	1	-1	-1	-1	-2
i		i	$-1-i$	$1-2i$	2
	1	$-1+i$	$-2-i$	$-2i$	0
$-i$		$-i$	i	$2i$	
	1	-1	-2	0	

Las otras raíces son $\alpha_3=-1$ y $\alpha_4=2$, obtenidas al resolver la ecuación $x^2-x-2=0$. Entonces: $P(x)=(x-i)(x+i)(x+1)(x-2)$

➲ EJERCICIO:

23- Justifique las propiedades siguientes:

i- Si un polinomio es a coeficiente reales y tiene raíces complejas, éstas aparecen en número par.

ii-Si $\alpha\in\mathbb{C}$ es raíz de un polinomio a coeficientes reales con multiplicidad h, entonces $\overline{\alpha}$ es también raíz de multiplicidad h.

iii- Todo polinomio a coeficientes reales de grado impar admite al menos una raíz real.

✎ OBSERVACIÓN:

En la descomposición factorial de un polinomio a coeficientes reales con raíces complejas aparecen los factores $x-\alpha$ y $x-\overline{\alpha}$. Si se quiere que en esa descomposición no aparezcan números complejos, bastará multiplicar esos factores para obtener factores de segundo grado con coeficientes reales de la forma x^2+px+q.

Así, el polinomio del ejemplo $P(x)=x^4-x^3-x^2-x-2$ se puede expresar: $P(x)=(x^2+1)(x+1)(x-2)$

Ejemplo:

En el polinomio $P(x)$ expresado en factores del siguiente modo:

$$P(x)=3(x-5)(x-i)(x+i).$$

Como $(x-i)(x+i)=x^2+1$, se obtiene la descomposición de $P(x)$ en $\mathbb{R}$;

$$P(x)=3(x-5)(x^2+1)$$

➲ EJERCICIOS:

24- Determine β para que $P(x)$ sea a coeficientes reales.

$$P(x)=3(x-1)^2(x-(4-i)).(x-\beta)$$

25- Construya el polinomio $P(x)$ a coeficientes reales y de menor grado posible que tenga como raíces $\alpha_1=2$; $\alpha_2=-2$ con multiplicidad 3 y $\alpha_3=3+i$; sabiendo además que $P(0)=-1$

POLINOMIOS A COEFICIENTES ENTEROS

Si $P(x)$ es un polinomio a coeficientes enteros el siguiente teorema permite hallar, si existen, las raíces racionales.

Teorema de Gauss

> Si el polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ con $a_i\in\mathbb{Z}\ \forall i$, admite la raíz $\frac{p}{q}$
>
> con p y q enteros primos entre si y $q\neq 0$, entonces:
>
> (a) a_0 es múltiplo de p
>
> (b) a_n es múltiplo de q

Ejemplo:

Sea $P(x)=2x^3-7x^2-27x-18$. Como se trata de un polinomio a coeficientes enteros es posible aplicar el Teorema de Gauss; entonces;

Divisores de $a_0=-18$: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6; ± 9; ± 18

Divisores de $a_n=2$: ± 1; ± 2

Posible raíces racionales: ± 1; ± 2; ± 3; ± 6; ± 9; ± 18; $\pm\frac{3}{2}$; $\pm\frac{9}{2}$; $\pm\frac{1}{2}$

$\alpha_1=-1$ es raíz, pues $P(-1)=0$.

Verificamos aplicando la regla de Ruffini resulta:

	2	-7	-27	-18
-1		-2	9	18
	2	-9	-18	0

$P(x)=(x+1)(2x^2-9x-18)$. Las otras dos raíces $\alpha_2=-\frac{3}{2}$ y $\alpha_3=6$ son las soluciones de: $2x^2-9x-18=0$.

$P(x)$ se descompone en factores $P(x)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)(x+1)(x-6)$

Demostración del teorema:

Si $\frac{p}{q}$ es raíz de $P(x)$ entonces $a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+...+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0$

Distribuyendo las potencias respecto del cociente y multiplicando ambos miembros por q^n se obtiene:

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+...+a_1p^1q^{n-1}+a_0q^n=0 \qquad (1)$$

Entonces:

$$a_0q^n=-p(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+...+a_1q^{n-1}) \qquad (2)$$

El número $(a_np^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}q+...+a_1q^{n-1})$ es entero pues los coeficientes del polinomio dado como así también p y q son enteros y están sometidos a operaciones enteras: suma, producto y potencia con exponente natural.

Se acepta $p\neq 0$ (si $p=0$, debe ser $a_0=0$)

Como p no divide a q ya que $\frac{p}{q}$ es una fracción irreducible p tampoco divide a q^n.

En consecuencia p divide a a_0, es decir a_0 es un múltiplo de p, con lo cual queda probado la parte (a) del teorema.

Escribiendo la igualdad (1) del modo siguiente:

$$a_np^n=-q(a_{n-1}p^{n-1}+...+a_1pq^{n-2}+a_0q^{n-1}) \qquad (3)$$

y reproduciendo el razonamiento se llega fácilmente a probar la parte (b) del teorema.

✎ OBSERVACIONES:

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i$, entonces:

- Si $a_n = 1$ y $P(x)$ tiene raíces racionales, éstas son enteras.
- Si p es un divisor de a_0 y q es un divisor de a_n, $\frac{p}{q}$ no es necesariamente una raíz de $P(x)$.
- Si $a_0 = 0$, entonces $\alpha = 0$ es una raíz de $P(x)$.

➲ EJERCICIOS:

26- Calcule las raíces de los polinomios siguientes y luego factorice:

i) $P(x) = 3x^5 - 11x^4 + 11x^3 - 7x^2 + 8x + 4$

ii) $R(x) = x^5 - 5x^3 + 6x$

iii) $S(x) = (x^2+1)(x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2)$

iv) $T(x) = x^4 + x^2 - 2$

v) $R(x) = (x+3)^2 - (x-2)^2$

vi) $S(x) = x^4 - 16$

vii) $T(x) = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$

viii) $U(x) = x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 3x + 1$

27- Sea $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$

i) Calcule $P(i)$

ii) Escriba la descomposición en factores de $P(x)$

28- Construya un polinomio a coeficientes reales, del menor grado, que admita las raíces $\alpha_1 = i$; $\alpha_2 = 1 - i$; $\alpha_3 = -1$ doble.

29- Encuentre los valores de α y β para que el polinomio $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^3 + 1$ admita la raíz $x = 1$ de multiplicidad 2.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS REALES

Una expresión algebraica se dice **fraccionaria, fracción algebraica** o **expresión racional** si es el cociente de dos polinomios, teniendo en cuenta que el conjunto de valores que puede asumir está limitado a los números que no anulan el denominador.

Nos limitaremos a considerar sólo polinomios en una variable con coeficientes reales.

Por ejemplo $\dfrac{x^2+1}{5x+3}$ $(x \neq -\frac{3}{5})$; $\dfrac{x^2-2}{x-1}$ $(x \neq 1)$

Dos expresiones racionales $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{D}$ se dicen **equivalentes** si asumen los mismos valores numéricos para toda asignación de la variable en las dos expresiones.

Se indica: $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$

Propiedades:

1) Las expresiones racionales $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{AM}{BM}$ son equivalentes, siempre que $M \neq 0$

Ejemplo:

$$\frac{x+1}{x} = \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$$

2) Si $\dfrac{A}{B}$ y $\dfrac{C}{D}$ son equivalentes, entonces $A \cdot D = B \cdot C$.

Aplicando esta propiedad se puede decidir cuando dos expresiones no son equivalentes. Por ejemplo, $\dfrac{x+7}{x^2}$ y $\dfrac{7}{x}$ $(x \neq 0)$ no son equivalentes pues $(x+7).x \neq 7x^2$.

➲ EJERCICIOS:

30- Escriba una expresión equivalente con la dada:

i) $\dfrac{8}{x-2} = \dfrac{?}{x^2-2x}$ $(x \neq 0 \wedge x \neq 2)$

ii) $\dfrac{x-y}{2x}=\dfrac{?}{-2x}\quad (x\neq 0)$

31- Compruebe que son equivalentes las siguientes expresiones:

i) $\dfrac{x+2}{x}$ y $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x}\quad (x\neq 0\wedge x\neq 1)$

ii) $\dfrac{7}{x}$ y $\dfrac{7x}{x^2}\quad (x\neq 0)$

Simplificación de expresiones fraccionarias

También se conoce este proceso como **"reducir a la expresión mínima"**. El método consiste en descomponer el numerador y el denominador en factores a coeficientes reales, observar los factores comunes a ambos y dividir numerador y denominador por esos factores comunes.

Se obtiene así una expresión racional, **reducida** o **simplificada**, equivalente con la dada.

Ejemplo:

$$\frac{4x^2+7x}{x^2}=\frac{x(4x+7)}{xx}=\frac{4x+7}{x}\quad (x\neq 0)$$

➲ EJERCICIO:

32- Simplifique: (indique previamente la restricción para la variable)

i) $\dfrac{x^3-y^3}{x-y}$

ii) $\dfrac{x^2+5x}{x}$

iii) $\dfrac{9-x^2}{3+x}$

iv) $\dfrac{x^3-9x^2+27x-27}{(x-3)^2}$

v) $\dfrac{x^4-b^4}{x^2-b^2}$

vi) $\dfrac{8x^3+36x^2+54x+27}{x(2x+3)}$

Mínimo común múltiplo de varios polinomios

Se llama **mínimo común múltiplo (m.c.m)** de dos o más polinomios, al polinomio de menor grado que es divisible por cada uno de ellos.

Ejemplo:

Entre x, x^2-1 y $x-1$ el m.c.m es: $x(x^2-1)$.En efecto:

$$x(x^2-1)\div x=x^2-1$$

$$x(x^2-1)\div (x^2-1)=x$$

$$x(x^2-1)\div (x-1)=x(x+1)$$

Para encontrar el m.c.m, se descomponen en factores cada uno de los polinomios y luego se efectúa el producto de los factores distintos, tomados con su mayor grado.

Ejemplo:

Hallar el m.c.m entre $2x^2$, $4x^2-25$ y $4x^2+20x+25$.

Observe que:

$$2x^2=2x^2$$

$$4x^2-25=(2x+5)(2x-5)$$

$$4x^2+20x+25=(2x+5)^2$$

Luego m.c.m $=2x^2(2x-5)(2x+5)^2$

➲ EJERCICIO:

33- Encuentre el mínimo común múltiplo de los polinomios:

i) $x^2-16;\ x^2+8x+16$

ii) $x+3;\ x^2-9;$

iii) $x^2y;\ 9xy^2-36y$

iv) $x^2-1;\ x^2-x-2$

Operaciones con expresiones fraccionarias

Suma y diferencia

Se procede como en el caso de las fracciones ordinarias de números enteros, respetando las restricciones de las variables.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A.\frac{M}{B}+C.\frac{M}{D}}{M} \qquad B\neq 0, D\neq 0, M\neq 0$$

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A.\frac{M}{B}-C.\frac{M}{D}}{M} \qquad B\neq 0, D\neq 0, M\neq 0$$

La expresión M es el mínimo común múltiplo entre los denominadores B y D, y se llama **denominador común**.

Ejemplos:

i) $\dfrac{x^2-x}{x+2}+\dfrac{x-2}{x+2}=\dfrac{x^2-x+x-2}{x+2}=\dfrac{x^2-2}{x+2}$

ii) $\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{x}{(x^2-25)}$

Se busca primero el denominador común:

$x^2-10x+25=(x-5)^2$

$(x^2-25)=(x-5)(x+5)$

De modo que el común denominador es: $(x-5)^2(x+5)$

Luego: $\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{x}{(x^2-25)}=\dfrac{x+5+x(x-5)}{(x-5)^2(x+5)}=\dfrac{x^2-4x+5}{(x-5)^2(x+5)}$

iii) $\dfrac{x-b}{bx}-\dfrac{bx}{bx^2+x+b^2x+b}$, $\quad b\in \mathbf{R}$

Factoreando los denominadores:

$bx=bx$

$bx^2+x+b^2x+b=(bx^2+b^2x)+(x+b)=bx(x+b)+(x+b)=(x+b)(bx+1)$,

resulta el denominador común: $bx(x+b)(bx+1)$

Luego:

$$\frac{x-b}{bx}-\frac{bx}{bx^2+x+b^2x+b}=\frac{(x-b)(x+b)(bx+1)-bx.bx}{bx(x+b)(bx+1)}=\frac{(x^2-b^2)(bx+1)-b^2x^2}{bx(x+b)(bx+1)}$$

➲ EJERCICIO:

34- Efectúe la siguientes operaciones indicando la restricción de la variable:

i) $\dfrac{a}{x-a}+\dfrac{3}{x^2-a^2}$

ii) $\dfrac{5}{xc+c^2}-\dfrac{3}{x^2+xc}$

iv) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x+1}$

v) $2-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{4}{x^2-1}$

Producto y cociente de expresiones fraccionarias

Como en el caso de la suma y de la resta, el producto y el cociente son extensiones del producto y el cociente de las fracciones numéricas.

Se define:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D} \qquad B\neq 0, D\neq 0$$

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C} \qquad B\neq 0, D\neq 0, C\neq 0$$

Ejemplos:

i) $\dfrac{x+1}{x}.\dfrac{2x}{(x+1)^2}=\dfrac{2x(x+1)}{x(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)} \qquad x\neq 0, x\neq -1$

ii) $\dfrac{x^2-4}{2x+8}\div\dfrac{x-2}{x+4}=\dfrac{(x^2-4)(x+4)}{(2x+8)(x-2)}=\dfrac{(x-2)(x+2)(x+4)}{2(x+4)(x-2)}=\dfrac{x+2}{2} \qquad x\neq -4, x\neq 2$

➲ EJERCICIO:

35- Efectúe las operaciones y simplifique (indique las restricciones de las variables).

i) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+4x+4}\div\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$

ii) $\dfrac{x^3-27}{x^2}\cdot\dfrac{9}{x^2-9}\div\dfrac{x^2+6x+9}{x+9}$

iii) $\dfrac{(x+2)^2-36}{x-2}\div\dfrac{x+2}{(x-2)x}$

iv) $\dfrac{4x+8}{3x}\div\dfrac{2.(x+2)}{9x}$

Fracciones Compuestas

Son expresiones fraccionarias cuyos numeradores y denominadores son a su vez expresiones fraccionarias.

Ejemplo: La fracción compuesta $\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x^2-1}{x}}$ se puede transformar:

$$\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x^2-1}{x}}=\frac{x}{x-1}.\frac{x}{x^2-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x^2-1)}=\frac{x^2}{x^3-x^2-x+1}$$

➲ EJERCICIO:

36- Calcule y simplifique:

i) $\dfrac{\dfrac{2x-1}{2x+6\sqrt{2}x+9}}{\dfrac{1-2x}{\sqrt{2}-1}}$ ii) $\dfrac{3+\dfrac{4x}{x+5a}}{\dfrac{2x}{x+5a}}$ iii) $\dfrac{\dfrac{x^2}{x+5}}{\dfrac{x+5}{x^2}}.\dfrac{x+\dfrac{2}{5x}}{5+\dfrac{2}{5x}}$

Ecuaciones Racionales

Las **ecuaciones racionales** son aquellas que contienen una o más expresiones algebraicas fraccionarias.

Ejemplos:

i) Para hallar las soluciones de la ecuación racional:

$$\frac{x}{x^2-1}+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$$

Se la transforma en una ecuación entera multiplicando por x^2-1 (mínimo común múltiplo de los denominadores). De modo que para $x\neq\pm1$ se pasa a:

$$\frac{x(x^2-1)}{x^2-1}+\frac{2(x^2-1)}{x-1}-\frac{(x^2-1)}{x+1}=0$$

$$x+2(x+1)-(x-1)=0$$

$$x+2x+2-x+1=0$$

$$2x+3=0$$

$$x=-\frac{3}{2}$$

ii) Para hallar las soluciones de la ecuación racional:

$$\frac{x+3}{x^2-1}=1-\frac{1}{x+1}$$

al igual que en el ejemplo anterior se multiplica por x^2-1 (mínimo común múltiplo de los denominadores) para transforma la ecuación en entera. De modo que para $x\neq\pm1$ se pasa a:

$$x+3=x^2-1-(x-1)$$

$$x+3=x^2-x$$

$$0=x^2-2x-3$$

de donde, resolviendo la ecuación cuadrática, se obtiene $x=3$ y $x=-1$.

Como $x\neq\pm1$, la única solución de la ecuación es $x=3$

➲ EJERCICIOS:

37- Resuelve:

i) $\dfrac{(x-2)^2}{x-1}-2=\dfrac{x+2}{x-1}$ iii) $\dfrac{7}{5x-2}=\dfrac{5}{4x}$

ii) $\dfrac{x^3+8}{x+2}=x^2-2x+4$ iv) $\dfrac{x}{2x-6}-\dfrac{3}{x^2-6x+9}=\dfrac{x-2}{3x-9}$

38- Escriba una ecuación racional que no admita como soluciones a los números 2 ó -5.

39- Pruebe las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{x+2}{x-2}.\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}=\dfrac{x+2}{x-1},\quad \forall x\in\mathbf{R}-\{-2,1,2\}$

b) $\dfrac{2x}{x^2-4}+\dfrac{5}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{-4}{x-2},\quad \forall x\in\mathbf{R}-\{-2,2\}$

40- Un aeroplano vuela 1062km con el viento a favor. En el mismo tiempo puede volar 738km con el viento en contra. La velocidad del aeroplano cuando no sopla el viento es de 200km/h. Determine la velocidad del viento.

AUTOEVALUACIÓN 5

1. Calcule los valores de α y β para que sean iguales los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 \quad \text{y} \quad Q(x) = (x-3)(x+\alpha)(x+\beta)$$

2. Dados: $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x - 1$ $\quad Q(x) = x^5 - i$

$R(x) = 2x^2 - x$ $\quad S(x) = x - (1+i)$

Calcule: i) $P(x) + Q(x) - S(x)$

ii) $(Q(x))^2$

iii) $P(x) \div R(x)$

3. Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 2x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + k$ y $Q(x) = x - i$ encuentre el valor de k para que el resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$ sea cero.

4. Construya un polinomio de cuarto grado a coeficientes reales que tenga entre sus ceros $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ y $\alpha_3 = 1+i$.

5. Encuentre el polinomio $P(x)$ a coeficientes reales que verifique:

i) $P(i) = 0$

ii) es divisible por $(x+1)$

iii) el resto de dividir $P(x)$ por $(x-2)$ es igual a 8

6. ¿Puede ser el grado de un polinomio $P(x)$ igual a 7 sabiendo que es a coeficientes reales y divisible por $Q(x) = (x-(2+i))^3.(x-1)^2$?

7. Resuelve indicando la restricción de la variable:

$$\frac{\frac{x+a}{x} + \frac{x-a}{a}}{\frac{x-a}{x} - \frac{x+a}{a}}, \quad a \in \mathbf{R} - \{0\}$$

Un momento para la distracción....

- Exprese el número 10 empleando cinco nueves. Indique por lo menos dos procedimientos.

- A un herrero le trajeron cinco trozos de cadena, de tres eslabones cada uno, y le encargaron que los uniera formando una cadena continua. Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría que cortar y forjar de nuevo. Decidió que le haría falta abrir y cerrar cuatro anillos. ¿No es posible efectuar este trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos?

- Dos padres regalaron dinero a sus hijos. Uno de ello dio a su hijo 150 pesos, el otro entregó al suyo 100 pesos. Resultó, sin embargo, que ambos hijos juntos aumentaron su capital solamente en 150 pesos. ¿De qué modo se explica esto?

- Tres amigos juntaron sus dineros e imaginaron una cadena Cyber-Ham, donde Ud. puede saborear una jugosa hamburguesa mientras navega por Internet. Deduzca de cuál local se hizo cargo cada socio, que actividad desarrolla y que % aportó cada uno de ellos.

Se sabe:

1) Joaquín no es actor.

2) El que menos aportó administra el local de Rosario.

3) Sebastián (que no aportó el 40%) administra la casa de Santa Fe.

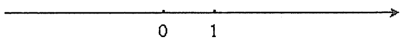
4) El pintor está a cargo de la filial de Córdoba.

5) Juan José puso más capital que el músico.

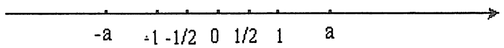
6) El capital se constituyó en 25%, 35% y 40%.

CAPÍTULO 6 - REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

Algunos conceptos que involucran números reales, pueden ser mejor comprendidos recurriendo a su representación como puntos de una recta llamada **recta numérica.** En esta recta se marcan dos puntos que se hacen corresponder con los números 0 (origen) y 1, determinándose además un sentido positivo, el cual se indica mediante una flecha.



La longitud del segmento [0,1] de extremos 0 y 1 que se toma como 1, es la unidad de medida en la recta. Queda así determinada una escala que permite ubicar los números enteros. Los enteros positivos a la derecha de 0 y los negativos a la izquierda de 0. La longitud del segmento comprendido entre dos enteros a y b consecutivos es constante e igual a uno.



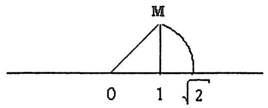
Si un número a está a derecha de cero, se simboliza $a > 0$.
Si un número a está a al izquierda de cero, se simboliza $a < 0$.
Un número a y su opuesto, -a, equidistan del origen.

Para representar un **número racional** $\frac{p}{q}$, (p y q enteros; q distinto de cero) se divide el segmento [0,1] en q partes iguales y luego se traslada el segmento de longitud $\frac{1}{q}$, p veces a la derecha (o a la izquierda según sea $\frac{p}{q}$ positivo o negativo) obteniéndose el punto representante de $\frac{p}{q}$.

La representación de los **números irracionales** no es sencilla. Sin embargo, podemos hacer aproximaciones.
Por ejemplo:

$$\pi \cong 3{,}14 \quad ; \quad \sqrt{2} \cong 1{,}41$$

O bien, recordando que la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de longitud 1 es igual a $\sqrt{2}$, se puede encontrar en la recta real el punto que lo representa.



(se ha trasladado a la recta numérica, la medida de la hipotenusa OM, con la ayuda del compás)

➲ EJERCICIO:

1- Represente los números irracionales $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$, empleando la misma técnica que para $\sqrt{2}$.

✎ OBSERVACIÓN:

Una conclusión importante es la siguiente:

> Existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, es decir: a cada número real a le corresponde un único punto A de la recta y a cada punto A sobre la recta un único número real a que se llama la **coordenada del punto** A.
>
> $$a \leftrightarrow A$$

Comentario:

Se postula que la recta es ***continua****; es decir, que entre dos puntos de la recta, sin importar que los puntos estén muy juntos, se puede encontrar o "imaginar" otro punto. Esta es la concepción de continuidad que* *condujo, a partir de Newton (1642-1727), Leibnitz (1646-1716) y sus sucesores, al ilimitado dominio del Cálculo Infinitesimal con sus innumerables aplicaciones a la ciencia y la tecnología y a lo que actualmente se llama Análisis Matemático.*

RELACIÓN DE ORDEN EN $\mathbf{R}$

En el conjunto de los números reales se definen las relaciones "menor que" (<); "mayor que" (>); "menor o igual que" ($\leq$); "mayor o igual que" ($\geq$) que hacen de $\mathbf{R}$ un conjunto ordenado. De modo que:

Dados dos números reales a y b se verifica:

$$a<b \quad ó \quad a=b \quad ó \quad a>b$$

Se dice que:

$a<b$ si $b-a>0$,
$a>b$ si $a-b>0$,
si $a<0$ entonces $-a>0$.

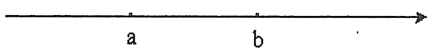
Ejemplos:

i) 3<5 pues $5-3=2>0$

ii) -8<-1 pues $-1-(-8)=7>0$

iii) $\frac{1}{2}<\frac{5}{3}$ pues $\frac{5}{3}-\frac{1}{2}=\frac{10-3}{6}=\frac{7}{6}>0$

Geométricamente $a<b$ significa que a está a la izquierda de b.



➲ EJERCICIO:

2- Ordene los números:

i) $-\frac{1}{5}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{2}{3}$; -3; 0; $\frac{17}{11}$; 1; $-\pi$

ii) $-3,\overline{12}$; $-3,12$; $-3,121$

iii) 5,001; 5,009; 5,09

Propiedades de la relación de menor "<"

1) $a<b$ y $b<c$, entonces $a<c$.
2) $a<b$, entonces $a+c<b+c$.
3) $a<b$ y c un número positivo, entonces $a\cdot c<b\cdot c$.
4) $a<b$ y c un número negativo, entonces $a\cdot c>b\cdot c$.

➲ EJERCICIO:

3- Ejemplifique las propiedades anteriores.

✎ OBSERVACIÓN:

La propiedad 4) debe ser tenida muy en cuenta, pues es frecuente causa de error al aplicarla. Por ejemplo si $2<3$ es $-4>-6$ y $-2>-3$.

Recuerde!!!. Multiplicar por -1 invierte el sentido de la desigualdad.

➲ EJERCICIO:

4- Ejemplifique las propiedades siguientes:

i) $0<a<b \Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$

ii) $a<b<0 \Rightarrow a^n<b^n$ para n impar

iii) $a^2\geq 0 \quad \forall a\in\mathbf{R}$

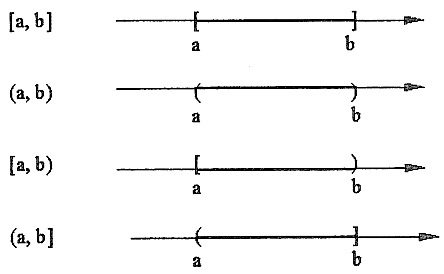
iv) $-a^2\leq 0 \quad \forall a\in\mathbf{R}$

Intervalos de números reales

Dados dos números reales a y b tales que a < b, se definen los conjuntos que se llaman intervalos de extremos a y b:

- $[a, b]=\{x\in\mathbf{R}/\ a\leq x\leq b\}$ Intervalo cerrado
- $(a, b)=\{x\in\mathbf{R}/\ a<x<b\}$ Intervalo abierto
- $[a, b)=\{x\in\mathbf{R}/\ a\leq x<b\}$ Intervalo cerrado por izquierda y abierto por derecha
- $(a, b]=\{x\in\mathbf{R}/\ a<x\leq b\}$ Intervalo cerrado por derecha y abierto por izquierda.

Representados en la recta real:



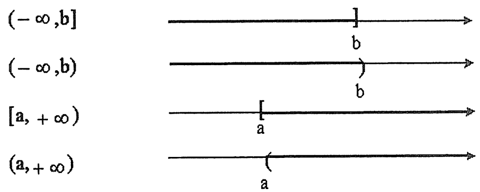
Los números reales a y b se llaman respectivamente extremos izquierdo y extremo derecho de los intervalos: [a,b]; (a,b); [a,b); (a,b].

El número $b - a \geq 0$ es la **amplitud** de esos intervalos.

Se definen también los intervalos infinitos:

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} / \ x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} / \ x < b\}$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} / \ a \leq x\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} / \ a < x\}$

Representados en la recta real:



Las expresiones $-\infty$ (menos infinito) y $+\infty$ (mas infinito) son símbolos que tienen la siguiente significación:

Cualquiera sea el número real a es: $a > -\infty$ y $a < +\infty$ respectivamente.

➲ EJERCICIOS:

5- Represente los intervalos

i) [3,5] ii) $[-1,1]$ iii) $[-3,-2]$

6- Para los intervalos A y B que se dan, halle y grafique los intervalos $A \cup B$ y $A \cap B$

	A	B
i)	[3,5];	[5,7)
ii)	[1,4);	[-2,6]

Valor absoluto de un número real

Para un número real a se define el valor absoluto de a como el número real que se indica $|a|$ tal que:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \quad (-a \text{ es el opuesto de } a) \end{cases}$$

Ejemplos: $|-10| = 10$; $|10| = 10$; $|2| = 2$; $|0| = 0$

Geométricamente $|a|$ es la distancia del número a al origen de coordenadas o también es la distancia entre el "punto" A, que se corresponde con a en el eje real, y el origen de coordenadas.

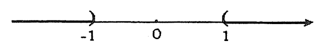
La expresión $|a| = 1$ significa a está a una distancia igual a 1 del origen de coordenadas. Por lo tanto el conjunto $\{-1, 1\}$ es solución de $|a| = 1$.

La expresión $|a| < 1$, significa que a está a una distancia del origen menor que 1,

por lo tanto $-1 < a < 1$, es decir:

$$a \in (-1,1)$$

La expresión $|a| > 1$, está indicando que el número a está a una distancia del origen superior a 1. Por lo tanto $a < -1$ o $a > 1$, es decir:



$$a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

➲ EJERCICIO:

7- Grafique si es posible:

i) $|a| \leq 4$ ii) $|a| \leq -3$ iii) $|a| \geq \pi$ iv) $\left|\frac{a}{2}\right| = \frac{1}{4}$

Algunas propiedades del valor absoluto:

Sean a, b reales:

1) $|a| \geq 0$ y $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2) $|-a| = |a|$

3) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

5) $|a + b| \leq |a| + |b|$

$|a - b| \geq \big|\,|a| - |b|\,\big|$

6) $|a| < k \Leftrightarrow -k < a < k$

$|a| > k \Leftrightarrow a < -k$ ó $a > k$

7) $\sqrt{a^2} = |a|$

➲ EJERCICIO:

8- Ejemplifique las propiedades anteriores.

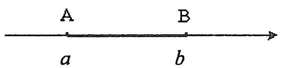
Distancia entre dos números reales:

Dados dos números reales se llama **distancia** entre a y b al número

$$d(a,b) = |a - b| = |b - a|$$

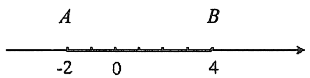
Igualmente $d(a,b)$ define la distancia entre los puntos A y B, asociados respectivamente con los números reales a y b; entonces:

$$d(A,B) = |a - b| = |b - a| = d(a,b)$$



Ejemplo:

$d(-2,4) = |-2 - 4| = |-6| = 6$; $\qquad d(A,B) = 6$



➲ EJERCICIO:

9- Represente los puntos "a" tales que:

i) $|a| = 4$; ii) $|a - 3| = 1$; iii) $|a + 3| = 1$;

iv) $|a| < 5$ v) $|a - 3| < 1$; vi) $|a - 3| > 1$;

DESIGUALDADES O INECUACIONES DE PRIMER GRADO

Una **inecuación** es de **primer grado en la incógnita** x si mediante transformaciones se reduce a una desigualdad equivalente a alguna de las siguientes:

$$ax + b > 0; \quad ax + b \geq 0; \quad ax + b < 0; \quad ax + b \leq 0$$

Resolver la inecuación es encontrar el conjunto de números x (**conjunto solución**) que satisfacen las condiciones que impone la inecuación.

Para resolver una inecuación, se procede a transformarla, como en el caso de las ecuaciones, en una inecuación equivalente a la dada de modo que resulte elemental encontrar las soluciones.

Se dice que dos desigualdades son **equivalentes** si sus conjuntos solución son iguales.

Para transformar una desigualdad en otra equivalente se pueden aplicar los criterios siguientes, los que se fundamentan por las propiedades de orden que se han mencionado.

1- Si a los dos miembros de una desigualdad se le suma el mismo número se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la dada.

2- Si a los dos miembros de una desigualdad se los multiplica por un mismo número $c > 0$ la desigualdad no cambia de sentido.

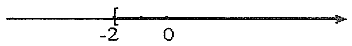
3- Si a los dos miembros de una desigualdad se los multiplica por un número $c < 0$, la desigualdad cambia de sentido.

Ejemplos:

i) Para resolver la inecuación $\qquad x + 2 \geq 0$

Se suma –2 a ambos miembros de la desigualdad y se obtiene la inecuación equivalente: $x \geq -2$, de modo que el conjunto solución es:

$$S = \{x \in \mathbf{R} \,/\, x \geq -2\} = [-2\ ,\ +\infty)$$



ii) Para resolver la inecuación $\frac{x+2}{6} - \frac{1}{3} < \frac{x-3}{18}$

se elimina el denominador multiplicando ambos miembros por 18 (mínimo común múltiplo entre 6, 3, 18)

$$3(x+2) - 6 < x - 3$$

$$3x + 6 - 6 < x - 3$$

sumando $-x$ a ambos miembros resulta: $2x < -3$ y luego

multiplicando por $\frac{1}{2}$ ambos miembros se obtiene la solución buscada $x < -\frac{3}{2}$

Las sucesivas transformaciones permitieron hallar el conjunto solución:

$$S = \{x \in R / x < -\tfrac{3}{2}\} = \left(-\infty; -\tfrac{3}{2}\right)$$

Se pueden escribir estos pasos sucesivos de la siguiente manera:

$$\frac{x+2}{6} - \frac{1}{3} < \frac{x-3}{18} \iff 3(x+2) - 6 < x - 3 \iff 2x < -3 \iff x \in \left(-\infty; -\tfrac{3}{2}\right)$$

➲ EJERCICIOS:

10- Encuentre los conjuntos solución de las siguientes inecuaciones. Grafique cada conjunto solución.

i) $2x - 5 < 7$

ii) $\frac{1+3x}{2} + \frac{1}{3} > 4$

iii) $\frac{x-1}{4} + \frac{2x^2-1}{2} < 3 + x^2$

iv) $x^2 + 3x - 10 > 3x - 1$

v) $x + \frac{1}{2}x \geq 5x - 7$

vi) $5 + \frac{1}{x} \leq 3$

Resuelva los siguientes problemas:

11- Se tomarán 3 exámenes en un curso de Matemática que se califican A, B, C. Para obtener un aprobado se necesita un total de 240 puntos (1000 es la nota máxima).

Si ha obtenido 87 y 93 puntos en los dos primeros ¿Qué puntuación hace falta en la tercera prueba para obtener por lo menos un aprobado?

12- A un empleado le ofrecen dos planes de pago distintos:

A = sueldo mensual de \$600 y una comisión del 4% sobre el total de ventas

B = sueldo mensual de \$800 más una comisión del 6% sobre el total de las ventas que superen los \$10.000.

Analice para qué cantidad de ventas es mejor el plan A que el plan B. Se supone que el total de ventas siempre supera los \$10.000.

13- Al planear un baile escolar, se encuentra una banda que toca por \$250, más el 50% del total de venta por entradas. Otra banda lo hace por un cuota fija de \$550. Para que al colegio le sea más rentable la primera de las bandas.

¿Cuál es el máximo precio que se puede cobrar por entrada, suponiendo que la asistencia será de 300 personas?

SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES:

Un sistema de inecuaciones lineales es un conjunto formado por inecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

Resolver un sistema es encontrar los valores de la incógnita que satisfacen simultáneamente todas las inecuaciones del sistema.

Ejemplos:

i) Sea el sistema: $S \begin{cases} x+2 \leq 0 & (1) \\ 2x+6 > 0 & (2) \end{cases}$

Para resolverlo se procede del siguiente modo:

1°) Se halla el conjunto S_1 solución de (1) :

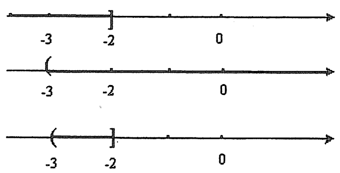
$$S_1 = (-\infty; -2]$$

2°) Se halla el conjunto S_2 solución de (2):

$$S_2 = (-3; +\infty)$$

3°) La solución S del sistema está dada por los números x que simultáneamente pertenecen a los intervalos S_1 y S_2, por lo tanto:

$$S = S_1 \cap S_2 = (-3;-2]$$



ii) Halle los valores de x que satisfacen $\quad -5<3+2x\leq 1$

Esta expresión se traduce en el sistema:

$$\begin{cases} 3+2x>-5 \\ 3+2x\leq 1 \end{cases}$$

Sistema que se resuelve como en el ejemplo anterior.

Otra manera de resolverlo es transformar simultáneamente las dos desigualdades, sumando primero -3 y luego multiplicando por $\frac{1}{2}$. Obtenemos así las equivalencias:

$$-5<3+2x\leq 1 \iff -5-3<3+2x-3\leq 1-3 \iff -8<2x\leq -2 \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}(-8)<\frac{1}{2}.2x\leq\frac{1}{2}.(-2) \iff -4<x\leq -1$$

Entonces el conjunto S solución es: $\quad S=(-4;-1]$

iii) Halle el conjunto S solución de la inecuación:

$$(x-3).(x+5)>0$$

Si recuerda que el producto de dos factores es positivo cuando los dos factores son positivos o cuando ambos son negativos, resolver la inecuación significa resolver los sistemas:

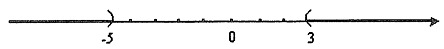
$$(1)\ \begin{cases} x-3>0 \\ x+5>0 \end{cases} \qquad ó \qquad (2)\ \begin{cases} x-3<0 \\ x+5<0 \end{cases}$$

El sistema (1) es equivalente con $\begin{cases} x>3 \\ x>-5 \end{cases}$ y su conjunto solución es $S_1=(3;+\infty)$.

El sistema (2) es equivalente con $\begin{cases} x<3 \\ x<-5 \end{cases}$ y su conjunto solución es $S_2=(-\infty;-5)$.

Entonces cualquier número x que pertenezca al conjunto S_1 o al conjunto S_2 será solución de $(x-3).(x+5)>0$. De modo que:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$$



iv) Se trata ahora de hallar los números x que satisfacen:

$$\frac{x+4}{x-2}\leq 0$$

La solicitud de cociente negativo o nulo se traduce en el estudio de los dos sistemas siguientes: numerador positivo o nulo y denominador negativo, o bien, numerador negativo o nulo y denominador positivo.

$$(1)\ \begin{cases} x+4\geq 0 \\ x-2<0 \end{cases} \qquad ó \qquad (2)\ \begin{cases} x+4\leq 0 \\ x-2>0 \end{cases}$$

✎ OBSERVACIÓN:

El denominador no podrá anularse nunca, de modo que el cociente nulo se obtendrá solamente imponiendo la condición de numerador nulo.

El sistema (1) es equivalente con el sistema $\begin{cases} x\geq -4 \\ x<2 \end{cases}$ y su conjunto solución es $S_1=[-4;2)$.

El sistema (2) es equivalente con el sistema $\begin{cases} x\leq -4 \\ x>2 \end{cases}$ y su conjunto solución es $S_2=\varnothing$.

Entonces, si S es el conjunto solución de la inecuación $\frac{x+4}{x-2}\leq 0$, S será la unión de S_1 con S_2 de modo que:

$$S = [-4;2)\cup\varnothing = [-4;2)$$

v) Halle el conjunto solución de: $\quad \frac{x-3}{x+1}<2$

Se remite a uno de los casos anteriores restando 2 a ambos miembros de la desigualdad

$$\frac{x-3}{x+1}-2<0$$

Y luego, resolviendo $$\frac{x-3-2(x+1)}{x+1}<0$$

$$\frac{-x-5}{x+1}<0$$

y multiplicando por -1 $$\frac{x+5}{x+1}>0$$

Esta última lleva a la resolución, como en el ejemplo anterior, de los sistemas:

$$(1)\ \begin{cases} x+5>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad ó \quad (2)\ \begin{cases} x+5<0 \\ x+1<0 \end{cases}$$

El conjunto solución de (1) es $S_1 = (-1;+\infty)$.

El conjunto solución de (2) es $S_2 = (-\infty;-5)$.

Entonces el conjunto S, solución de la inecuación dada es:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty;-5) \cup (-1;+\infty)$$

↬ OBSERVACIÓN:

No es correcto resolver una inecuación del tipo $\frac{x-3}{x+1}<2$ "pasando" $x+1$ al segundo miembro, ya que al desconocer el signo de $x+1$ no se puede saber si se mantiene, o no, el sentido de la desigualdad.

vi) Resuelva la inecuación en valor absoluto: $|x+2| \le 5$

Recuerde que para el valor absoluto se verifica: $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$. Aplicando esta propiedad, la inecuación dada se traduce en la siguiente:

$$-5 \le x+2 \le 5$$

y entonces, $-5 \le x+2 \le 5 \Leftrightarrow -5-2 \le x+2-2 \le 5-2 \Leftrightarrow -7 \le x \le 3$

De modo que el conjunto solución de la inecuación dada es $S = [-7;3]$

vii) Encuentre el conjunto solución de la inecuación: $|2x+3|>4$

Aplicando la propiedad: $|x| \ge a \Leftrightarrow x \ge a$ ó $x \le -a$, los valores de x que la verifican satisfacen una u otra de las siguientes desigualdades:

$$(1)\ 2x+3>4 \quad ó \quad (2)\ 2x+3<-4$$

El conjunto solución de (1) es $S_1 = \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

El conjunto solución de (2) es $S_2 = \left(-\infty;-\frac{7}{2}\right)$.

Entonces el conjunto solución es $S = \left(-\infty;-\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

viii) Resuelva la inecuación: $x^2-7x+12>0$

Como se vio en el capítulo 5, el trinomio $x^2-7x+12$ se puede descomponer en factores de la siguiente manera: $x^2-7x+12=(x-3).(x-4)$, donde 3 y 4 son las raíces del polinomio $P(x)=x^2-7x+12$.

Entonces el problema dado $x^2-7x+12>0$, se reduce al estudio de la inecuación

$$(x-3).(x-4)>0$$

la que procediendo como en el ejemplo iii), significa resolver los sistemas:

$$(1)\ \begin{cases} x-3>0 \\ x-4>0 \end{cases} \quad ó \quad (2)\ \begin{cases} x-3<0 \\ x-4<0 \end{cases}$$

El conjunto solución de (1) es $S_1 = (4;+\infty)$.

El conjunto solución de (2) es $S_2 = (-\infty;3)$.

Entonces el conjunto solución $S = (-\infty;3) \cup (4;+\infty)$.

➲ EJERCICIOS:

14- Resuelva los sistemas. Represente cada conjunto solución obtenido:

i) $\begin{cases} \frac{3x}{-5}+2>\frac{x}{3}+1 \\ 2x-1<5 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} 2x^2-3 \le -1 \\ x+1>4 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} \frac{5x-1}{3}>x-2 \\ -1-x<-3 \end{cases}$

iv) $\begin{cases} x+1>3 \\ \frac{x-1}{3}+\frac{x-4}{2}>\frac{x}{2} \\ 2x+5>1 \end{cases}$

15- Resuelva las siguientes inecuaciones con valor absoluto. Grafique cada conjunto solución obtenido:

i) $|x-3|<7$

ii) $\left|\frac{x}{x-1}\right|>5$

iii) $\left|\frac{x}{4}-3\right| \le 1$

iv) $|2x-3| \ge 1$

v) $|x^2-3x-2| \le 2$

vi) $\frac{3}{|3x+1|} \le 2$

AUTOEVALUACIÓN 6

1. Represente gráficamente los conjuntos de puntos de la recta numérica tales que:

   i) su distancia al número 5 es menor que 2.

   ii) su distancia al número 1 es mayor que 3.

   Escríbalos: a) en forma de intervalos

   b) utilizando valor absoluto.

2. Indique si son verdaderas o falsas las proposiciones siguientes:

   i) $-x^2 \leq 0 \quad \forall x \in R$

   ii) $0 < x < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x} > 1$

   iii) $x \geq y \quad \Rightarrow \quad -x \leq -y$

   iv) $x = 3 - \pi \quad \Rightarrow \quad -x > 0$

   v) $x < y \quad \Rightarrow \quad -5x < -5y$

3. Resuelva las inecuaciones siguientes y represente su conjunto solución

   i) $x^4 - x^2 < 0$.

   ii) $\left|\dfrac{3x+2}{x-1}\right| > 2$

4. Resuelva el sistema de inecuaciones y represente el conjunto solución:

$$\begin{cases} (x-1).(x+2) \geq 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$$

5. Use la relación $C = \dfrac{5}{9}.(F-32)$ para determinar el intervalo en la escala de Fahrenheit que corresponde a $20 \leq C \leq 30$.¿A qué rango de temperatura en la escala Celsius corresponde el intervalo $50 \leq F \leq 95$

6. Dados los conjuntos $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{6+x}{x} \leq 1\right\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 2x - x^2 \geq 0\}$, halle $A \cup B$ y $A \cap B$.

Un momento para la distracción....

Descubrir los siguientes acertijos:

- La celda de una prisión tiene dos puertas, si se sale por una de ellas se obtiene la libertad, en cambio la otra conduce hacia la muerte. Un guardián custodia cada una de las puertas, el guardián sabe hacia donde lleva cada puerta. Estos guardias sólo pueden contestar a las preguntas que se les formulen con si o con no, uno de ellos siempre dice la verdad y por el contrario el otro siempre miente.

En la celda hay un prisionero que puede formular una sola pregunta y a un solo guardián. ¿Cuál es la pregunta que formuló para acertar con la puerta que se abrirá para su libertad?

- En una isla habitan solamente "caballeros" y "escuderos". Los primeros dicen siempre la verdad y los segundos siempre mienten.

Un viejo problema dice lo siguiente: Tres de los habitantes - A, B y C - se encontraban en un jardín. Un extranjero pasó por allí y le preguntó a A, "¿Eres caballero o escudero?". A respondió, pero tan confusamente, que el extranjero no pudo enterarse de lo decía. Entonces el extranjero preguntó a B, "¿Qué ha dicho A?". Y B le respondió: "A ha dicho que es escudero". Pero en ese instante el tercer hombre, C, dijo, "¡No creas a B, que está mintiendo!"

La pregunta es: ¿Qué son B y C?

Una desigualdad

¿Será verdad que siempre que *A, B, C, D >0* se verifica esta desigualdad?

$$(1+A)^2(1+B)^2(1+C)^2(1+D)^2 \geq 2^4 ABCD$$

CAPÍTULO 7 - SISTEMA DE ECUACIONES

En este capítulo se verá como se puede establecer una correspondencia entre los pares de números reales y los puntos del plano, de modo que a través de la misma se identifiquen puntos y números.
De acuerdo con esta identificación se pueden convertir las proposiciones geométricas, referentes a puntos, en proposiciones algebraicas con números y convertir los razonamientos algebraicos en manipulaciones geométricas.
Los métodos del Álgebra, son en general, más sencillos que los geométricos y por eso se prefiere, en muchos casos el método algebraico. La elaboración de este método constituye la Geometría Analítica que se estudiará más adelante.

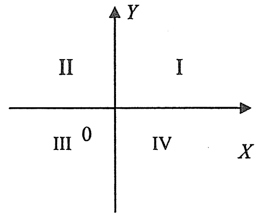
Comentario:

> *"La obra de Descartes (1596-1650) se conoce con el nombre de "El Método" y fue publicada el 8 de junio de 1637, día que se considera como el nacimiento de la Geometría Analítica.*
> *Una historia cuenta que la idea original de la Geometría Analítica se le ocurrió a Descartes cuando miraba caminar una mosca por el techo de su cuarto, cerca de una esquina, y observó que la trayectoria de la mosca sobre el techo podría describirse conociendo la relación que conectaba las distancias de la mosca medidas desde dos paredes adyacentes."*

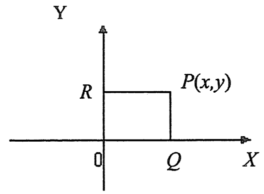
PARES DE NÚMEROS REALES. PUNTOS DEL PLANO

Se define **par ordenado** (x,y) de números reales a un par donde el número x es el primer elemento o primera componente, y el número y es el segundo elemento o segunda componente.
Se eligen en el plano dos rectas perpendiculares que se llamarán ejes de coordenadas, donde X (eje horizontal) se llama eje de abscisas, e Y (eje vertical) se llama eje de

ordenadas. El punto de intersección de ambos ejes es el 0 (cero), origen de coordenadas.
En cada uno de estos ejes se determina un sentido positivo (que se indica colocando flechas) y se establece en cada uno, como ya se ha visto en el capítulo anterior, una correspondencia con los números reales. Hacia la derecha del cero están los números reales positivos y los números reales negativos están a la izquierda del cero.
Por otra parte, en el eje Y, hacia arriba del cero, estarán los reales positivos y por debajo del cero los números reales negativos.
Las dos rectas dividen al plano en cuatro regiones que llamaremos cuadrantes, los que se numeran I, II, III, IV.



Utilizando este esquema, se asocia a cada punto P del plano un par ordenado (x,y) de números reales.
Si P es un punto del eje X, se le asocia el par ordenado $(x,0)$.
Si P es un punto del eje Y, se le hace corresponder el par $(0,y)$.
Si P no pertenece a ninguno de los ejes, se trazan por P las rectas PQ y PR perpendiculares a los ejes X e Y respectivamente. De modo que a P se le asocia el par (x,y), donde x e y son las respectivas coordenadas de Q y R en los ejes X e Y.
Recíprocamente, todo par (x,y) dado determina un punto en el plano. Basta tomar los puntos Q y R asociados con x e Y en los ejes y trazar por ellos perpendiculares a los respectivos ejes, cuya intersección es el punto P asociado a (x,y).



Queda establecida así, una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los pares ordenados de números reales.

$$P \leftrightarrow (x,y)$$

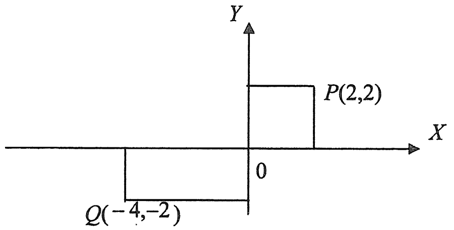
El par (x,y) representa las coordenadas del punto P:

x se llama abscisa de P

y se llama ordenada de P

Ejemplo:

El punto P de coordenadas (2,2), está en el primer cuadrante I, mientras que el par $(-4,-2)$ está asociado con el punto Q del tercer cuadrante.



Habitualmente se **identifica** el punto P con el par (x,y) y se habla del punto (x,y).

➲ EJERCICIOS:

1-Ubique los puntos de coordenadas:

$(-2, 6)$; $(2, 6)$; $(3, 0)$; $(-1, 4)$; $(2, -3)$; $(0, 3)$; $(4, 0)$

2-Indique el cuadrante al que pertenecen los puntos:

$P(-10,-7)$; $Q(5,-9)$; $R(8, 8)$; $S(-8,-8)$

3-Los puntos $P(1,0)$; $Q(0,0)$; $R(0,1)$ son los vértices de un cuadrado. ¿Cuáles son las coordenadas del otro vértice S?

4-Suponga que el eje Y actúa como espejo y refleja cada punto a su derecha a un punto a su izquierda.

a) ¿En qué punto queda reflejado $(-3,7)$

b) El punto (a,b) queda reflejado. ¿En qué punto?

c) El triángulo ABC de vértices $A(3,3)$, $B(6,1)$ y $C(1,-4)$ se refleja en el triángulo $A'B'C'$. Determine las coordenadas de los vértices de este triángulo y represente gráficamente.

ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS

Una **ecuación de primer grado** o **lineal** en las incógnitas x e y es una expresión del tipo $ax + by + c = 0$, donde a, b y c son números reales, y a y b no son nulos simultáneamente.

Una **solución** de la ecuación es el par ordenado de números reales (x_0, y_0) tal que el valor numérico de la expresión $ax + by + c$ es 0 para los valores $x = x_0$, $y = y_0$.

Se dice entonces que el par (x_0, y_0) **verifica** o **satisface** la ecuación.

Por ejemplo:

El par $(6,-3)$ verifica la ecuación $x + 3y + 3 = 0$, pues:

$$6 + 3.(-3) + 3 = 0$$

Verifique que: $(0,-1)$; $(-3,0)$; $(1,-\frac{4}{3})$ son otras soluciones de la ecuación.

Se llama **conjunto solución** de la ecuación $ax + by + c = 0$ al conjunto S de las **infinitas soluciones** de la misma.

$$S = \{(x,y) \,/\, ax + by + c = 0\}$$

¿Cómo encontrar los puntos (x,y) de S?

Es suficiente dar un valor a una de las incógnitas de la ecuación dada y calcular el correspondiente valor de la otra, obteniendo así una **solución particular**.

Por ejemplo, una solución particular de $5x + 2y - 10 = 0$ se obtiene,

para $x = 1$: $\quad 5 + 2y - 10 = 0$

$$y = \frac{5}{2}$$

El par $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ es una solución particular de $5x + 2y - 10 = 0$.

Es decir $\left(1,\frac{5}{2}\right) \in S = \{(x,y) \,/\, 5x + 2y - 10 = 0\}$

Como no es posible hacer una lista de los infinitos pares de números que verifican la ecuación se recurre a un **gráfico**.

Gráfico de una ecuación lineal

En razón de la correspondencia entre pares ordenados de números reales (x,y) y puntos del plano, el **gráfico de la ecuación** $ax + by + c = 0$, es el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas son los pares de su conjunto solución S.

El gráfico de una ecuación lineal $ax + by + c = 0$ es una **recta** del plano. Para dibujarla es suficiente representar dos puntos, porque "por dos puntos del plano pasa una única recta a la que pertenecen".

Ejemplo:

Sea la ecuación $5x - 3y + 12 = 0$;

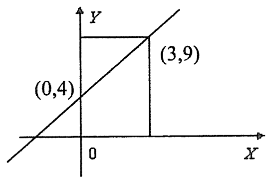
$$S = \{(x,y) \,/\, 5x - 3y + 12 = 0\}$$

Se hallan dos puntos de la recta:

i) para $x = 3$ resulta $y = 9$, el punto $P(3,9) \in S$

ii) para $x = 0$ resulta $y = 4$, el punto $P(0, 4) \in S$

Verifique que los puntos de coordenadas $\left(-2,\frac{2}{3}\right)$; $(-3,-1)$ y $\left(-\frac{12}{5},0\right)$ también pertenecen al gráfico de la ecuación $5x - 3y + 12 = 0$.



➲ EJERCICIOS:

5– Halle los conjuntos S solución de las ecuaciones lineales y represente gráficamente:

i) $2x + 3y - 1 = 0$

ii) $y = -5x + 1$

iii) $x + y = -1$

iv) $-x - y = 0$

v) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{4} = 0$

6– ¿Cuál de los siguientes pares ordenados es solución de la ecuación $y = 3 - 2x$?

$\left(\frac{3}{2},0\right)$; $(1, 1)$; $(-1,-1)$

SISTEMAS DE 2 ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** está formado por dos ecuaciones lineales que deben verificarse simultáneamente.

La expresión normal de un sistema es

$$S\begin{cases} ax + by + c = 0 & (1) \\ a'x + b'y + c' = 0 & (2) \end{cases}$$

donde a, b, c, a', b', c' son números reales, además a, b en (1) y a', b' en (2) no son simultáneamente nulos.

Una **solución** del sistema S es un par (x,y) que verifica simultáneamente las ecuaciones (1) y (2).

Resolver el sistema es hallar todas las soluciones de S.

Si $S_1 = \{(x,y) \,/\, ax + by + c = 0\}$ y $S_2 = \{(x,y) \,/\, a'x + b'y + c' = 0\}$ entonces el conjunto solución S del sistema es $S = S_1 \cap S_2$.

El sistema S es:

- Compatible determinado: cuando admite solución única.
- Compatible indeterminado: cuando admite infinitas soluciones.
- Incompatible: cuando no admite ninguna solución.

Ejemplo:

El sistema

$$S\begin{cases} x + y + 1 = 0 & (1) \\ 2x - y - 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

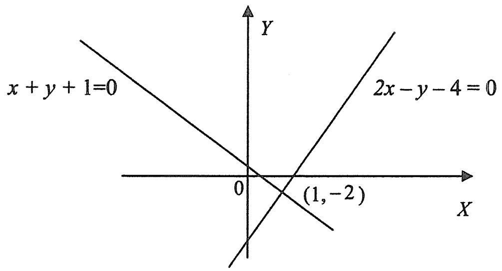
admite como solución el par ordenado $(1, -2)$ que es solución de (1) y (2) (verifique)

Resolución gráfica de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

El método consiste en representar gráficamente cada una de las rectas de soluciones del sistema. Entonces, la solución, si existe, está dada por las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

Ejemplos:

i) Se representan gráficamente las rectas (1) y (2) del sistema del ejemplo anterior, ambas se cortan en el punto $(1,-2)$, el cual resulta ser la solución del sistema.



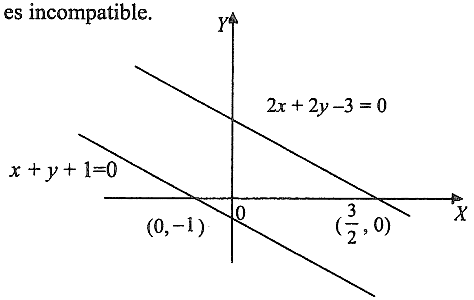
$S_1 = \{(x,y) \,/\, x + y + 1 = 0\}$ $\qquad$ $S_2 = \{(x,y) \,/\, 2x - y - 4 = 0\}$

$$S = S_1 \cap S_2 = \{(1,-2)\}$$

ii) Se trata de encontrar, si existe, la solución del sistema

$$S\begin{cases} x + y + 1 = 0 & (1) \\ 2x + 2y - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

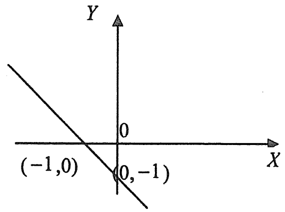
La representación gráfica muestra dos rectas paralelas, en consecuencia el sistema S es incompatible.



iii) Resolver el sistema

$$S\begin{cases} x + y + 1 = 0 & (1) \\ 2x + 2y + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

En este caso, las rectas son coincidentes. Todo punto de la recta es solución del sistema S.



Resolución algebraica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Muy a menudo, en ciertas aplicaciones de la Ingeniería, de la Economía, de la Sociología, etc., aparecen sistemas lineales de muchas ecuaciones con muchas incógnitas. Es muy importante entonces, disponer de un método de resolución automático de tales sistemas de cuya realización se puede encargar un ordenador. Un procedimiento que conduzca con seguridad, paso a paso, de los datos de un problema a su solución se llama **Algoritmo**. El método de Gauss es un algoritmo muy simple para resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema puede, mediante operaciones elementales entre ecuaciones, transformarse en otro equivalente al dado.Se dirá que dos sistemas S y S' son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.

Las operaciones que siguen, llamadas operaciones elementales, permiten obtener sistemas equivalentes a partir de uno dado: •Intercambiar ecuaciones. •Multiplicar las ecuaciones del sistema por un número real no nulo. •Sumar a una ecuación la otra multiplicada por un número.

Métodos algebraicos de resolución

Hay varios métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y la elección de uno o de otro depende de la manera en que se presentan las ecuaciones.
Estos métodos, algunos de los cuales se mostrarán con ejemplos, se basan en la transformación de un sistema en otro equivalente.

Método de Igualación

Para resolver un sistema como el que sigue

$$S\begin{cases} 2x-4y-1=0 & (1) \\ \quad x+3y=0 & (2) \end{cases}$$

con el método de igualación, se procede de la siguiente manera:

1. Se despeja de las dos ecuaciones la misma incógnita, por ejemplo x.
2. Se igualan las dos expresiones y se obtiene una sola ecuación en la incógnita y.
3. El valor obtenido para y se reemplaza en alguna de las dos ecuaciones obtenidas en el primer paso, para hallar el valor de x. El par (x,y) es la solución.

Entonces, despejando x en (1) y (2) se obtienen:

$$S'\begin{cases} x=\dfrac{4y+1}{2} \\ x=-\,3y \ (*) \end{cases}$$

Igualando las dos expresiones y resolviendo la ecuación en la incógnita y:

$$\frac{4y+1}{2}=-3y$$
$$4y+1=-6y$$
$$4y+6y=-1$$
$$10y=-1$$
$$y=-\frac{1}{10} \quad \text{reemplazando y en } (*)$$
$$\text{obtenemos} \quad x=\frac{3}{10}$$

Por lo tanto la solución de S es $\left(\frac{3}{10},-\frac{1}{10}\right)$.

Método de Sustitución

Para resolver el sistema

$$S\begin{cases} x+2y+1 &=0 \quad (1) \\ 3x-2y-13 &=0 \quad (2) \end{cases}$$

aplicando el método de sustitución, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve una de las ecuaciones respecto de una incógnita, por ejemplo x en (1).
2. Se sustituye x en la otra ecuación por la expresión obtenida, resultando entonces una ecuación en la incógnita y.
3. Se resuelve esta ecuación en y.
4. Se sustituye el valor obtenido para y en la expresión hallada en el paso 1, obteniéndose entonces el valor de x. El par (x,y) es la solución buscada.

De modo que por este método, el sistema S se resuelve del siguiente modo:

Se despeja x en la ecuación (1): $x=-2y-1 \ (*)$

Se sustituye x en la (2) $3.(-2y-1)-2y-13=0$

Se resuelve la ecuación en la incógnita y $-6y-3-2y-13=0$

$$-8y=16$$

$$y=-2$$

sustituyendo este valor en (*) $x=-2\,.(-2)-1$

$$x=3$$

Entonces el par $(3,-2)$ es la solución buscada.

Método de Reducción o de Sumas y Restas

Para resolver el sistema por el método de reducción

$$S\begin{cases} x-5y+2=0 & (1) \\ 2x+3y+6=0 & (2) \end{cases}$$

se procede del siguiente modo:

1. Se multiplican las ecuaciones de modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales, por ejemplo los de x.
2. Se suman o restan ambas ecuaciones y se obtiene un sistema equivalente, con una de las dos ecuaciones en una sola incógnita, en nuestro caso y.
3. Se resuelve esta ecuación en y.
4. El valor hallado para y se reemplaza en la otra ecuación para obtener el valor de x y en consecuencia, el par solución de S.

Entonces para resolver el sistema dado:

Si se multiplica a (1) por 2, el sistema pasa a:

$$S' \begin{cases} 2x-10y+4=0 & (1') \\ 2x+3y+6=0 & (2') \end{cases}$$

Se resta a (2') la ecuación (1'):

$$S'' \begin{cases} 2x-10y+4=0 & (1'') \\ 13y+2=0 & (2'') \end{cases}$$

de donde $y=-\frac{2}{13}$, si se reemplaza el valor obtenido en (1') y luego se resuelve para obtener la incógnita x

$$2x-10.(-\frac{2}{13})+4=0$$

$$x=-\frac{36}{13}$$

se obtiene $(-\frac{36}{13},-\frac{2}{13})$ es solución de S.

Algunos ejemplos:

i) Resolver el sistema:

$$S \begin{cases} 3x-4y=1 & (1) \\ 3x-4y=0 & (2) \end{cases}$$

Si se restan las ecuaciones resulta:

$0=1$, entonces el sistema es incompatible

ii)

$$S \begin{cases} x+y+3=0 & (1) \\ -2x-2y-6=0 & (2) \end{cases}$$

Se observa que las dos ecuaciones del sistema son equivalentes, pues (2) es (1) multiplicada por (–2).
En consecuencia el sistema es compatible indeterminado.

iii) Resolver el sistema:

$$S \begin{cases} \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=2 & (1) \\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}=-34 & (2) \end{cases} \qquad \begin{matrix} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{matrix}$$

S se puede resolver haciendo la sustitución $\frac{1}{x}=a;\ \frac{1}{y}=b$ (*) y resolver el sistema S'

$$S' \begin{cases} a-3b=2 & (1') \\ 6a+5b=-34 & (2') \end{cases}$$

De (1') se obtiene $a=2+3b$,reemplazando en (2')

$$6.(2+3b)+5b=-34$$

$$12+18b+5b=-34$$

$$23b=-46$$

$$b=-2$$

reemplazando este valor en (1')

$$a=2+3b$$

$$a=2-6$$

$$a=-4$$

Finalmente, reemplazando a y b en (*) se obtiene:

$$x=\frac{1}{a}=-\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad y=\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$$

Entonces $S=\{(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})\}$.

iv) Resolver el sistema

$$S\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x-1}=1 & x\neq 1 \quad (1) \\ \dfrac{2x-3}{x+y}=\dfrac{1}{2} & x+y\neq 0 \quad (2) \end{cases}$$

Si se multiplica la ecuación (1) por $x-1$ y la (2) por $2(x+y)$ se pasa al sistema:

$$S'=\begin{cases} x-2y\ =x-1 & (1') \\ 2(2x-3)=x+y & (2') \end{cases}$$

De la (1') resulta

$$-2y=-1$$

$$y=\frac{1}{2}$$ reemplazando en (2')

$$4x-6=x+\frac{1}{2}$$

$$3x=6+\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{13}{6}$$

SISTEMAS DE 3 ECUACIONES LINEALES CON 3 INCÓGNITAS

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es de la forma:

$$S\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{cases} \qquad a_i,b_i,c_i,d_i\in\mathbb{R},\text{ con } i=1,2,3$$

Una solución del sistema S es una terna (x_o,y_o,z_o) que verifica simultáneamente las tres ecuaciones. Resolverlo es hallar todas las soluciones de S.

i) Halle el conjunto solución de:

$$S\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ 3x-y+z=4 \\ x+2y-z=-1 \end{cases}$$

El sistema S', equivalente a S, se obtiene de manera práctica por medio del siguiente esquema (Gauss)

x	y	z	$t.i.$	
2	1	3	1	E_1
3	-1	1	4	E_2
1	2	-1	-1	E_3
	-5	-7	5	E_2'
	3	-5	-3	E_3'
		46	0	E_3''

$$S'\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -5y-7z=5 \\ 46z=0 \end{cases}$$, con conjunto solución $\{(1,-1,0)\}$

Verifique que $\{(1,-1,0)\}$ es la solución pedida para S.

ii) Observe otro ejemplo:

$$S\begin{cases} 7y-17z=-21 \\ x-3y+7z=10 \\ 5x-y+z=8 \end{cases}$$

Se encuentra un sistema equivalente a S aplicando el método recién visto:

x	y	z	$t.i.$
0	7	-17	-21
1	-3	7	10
5	-1	1	8
1	-3	7	10
0	7	-17	-21
5	-1	1	8
	7	-17	-21
	14	-34	-42
		0	0

Intercambiemos E_1 y E_2 para que el primer coeficiente sea no nulo

Un sistema equivalente a S es:

$$S\begin{cases} x-3y+7z=10 \\ 7y-17z=-21 \\ 0z=0 \end{cases}, \text{ hacemos } z=\lambda$$

cuyo conjunto solución es $S=\left\{\left(1+\frac{2}{7}\lambda,-3+\frac{17}{7}\lambda,\lambda\right),\lambda\in\mathbb{R}\right\}$

iii) Un último ejemplo:

$$S\begin{cases} x_1-3x_2-2x_3=7 \\ 2x_1-x_2+15x_3=3 \\ x_1-8x_2-21x_3=11 \end{cases}$$

x_1	x_2	x_3	$t.i.$
1	-3	-2	7
2	-1	15	3
1	-8	-21	11
	5	19	-11
	-5	-19	4
		0	-35

Note que la ecuación $0x_3=-35$ no tiene solución, y por lo tanto el sistema es incompatible, es decir $S=\varnothing$.

Comentario:

Gauss, Johann Carl Friedrich (1777-1855)

Es uno de los científicos más grandes de la historia; combina en su obra la fertilidad y la especial originalidad de los matemáticos del siglo XVIII, con el espíritu crítico de los tiempos modernos. Sus campos de actividad se extienden desde la teoría de números a las funciones de variable compleja, y desde la mecánica celeste al telégrafo eléctrico, del cual es uno de los inventores. Es considerado, por muchos, el "príncipe de las matemáticas".

SISTEMAS MIXTOS

Suelen presentarse con cierta frecuencia problemas donde las soluciones son comunes a dos ecuaciones con dos incógnitas, una de las cuales es lineal y la otra cuadrática, resultando un sistema llamado **mixto**.

El sistema del ejemplo siguiente es mixto

$$S\begin{cases} x^2-y^2=4 & (1) \\ x-y=1 & (2) \end{cases}$$

Para resolver *S*, en general, es conveniente realizar una sustitución adecuada. Se puede resolver, por ejemplo, la ecuación lineal con respecto a una de las incógnitas y reemplazar luego este valor en la ecuación cuadrática, la que resulta así una ecuación en una sola incógnita.

En el caso del ejemplo, si se resuelve para la incógnita *x* la ecuación (2), se obtiene:

$$x=1+y \quad (*)$$

Llevando este valor a (1) resulta:

$$(1+y)^2-y^2=4$$
$$1+2y+y^2-y^2=4$$
$$2y=3 \Rightarrow y=\frac{3}{2}$$

Reemplazando en (*) resulta $x=\frac{5}{2}$

Entonces el par $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ es la solución de S.

➲ EJERCICIOS:

7- Resuelva los sistemas siguientes:

i) $S\begin{cases}4x+y=1\\ x-2y=16\end{cases}$

ii) $S\begin{cases}x+3y-7=0\\ -x+4y-7=0\end{cases}$

iii) $S\begin{cases}6x+3y-18=0\\ 6x+3y=-12\end{cases}$

iv) $S\begin{cases}y=1-2x\\ x^2-y^2=2\end{cases}$

v) $S\begin{cases}x+2y-1=0\\ -x-2y+1=0\end{cases}$

vi) $S\begin{cases}x+y+z=2\\ 3x-2y-z=4\\ -2x+y+2z=2\end{cases}$

vii) $S\begin{cases}2x+y-z=7\\ x+3z=9\\ 3x-y+4z=8\end{cases}$

viii) $S\begin{cases}v+3w=16\\ 3u-v=-1\\ 2u+w=5\end{cases}$

ix) $S\begin{cases}3x_1-4x_2+2x_3=1\\ -2x_1-3x_2+x_3=2\\ 5x_1-x_2+x_3=5\end{cases}$

x) $S\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=3\\ x_1+x_3=1\\ 4x_1-x_2+5x_3=5\end{cases}$

xi) $S\begin{cases}x+y+z=6\\ x-y-z=-4\\ 3x+y+z=8\end{cases}$

Resuelva los siguientes problemas:

8- Un camión de entregas llega a un almacén con 8 cajas pequeñas y 5 grandes. El cobro total por las cajas, incluyendo el impuesto y los gastos de envío, es de $184. El flete de una caja grande cuesta $3.00 más que el de una caja pequeña. ¿Cuál es el costo del flete de cada una de las cajas?

9- Un jardinero tiene dos soluciones que contienen herbicida y agua. Una contiene 5% de herbicida y la otra un 15%. El jardinero necesita 100 l. de una solución que contenga un 12% de herbicida. ¿Qué cantidad de cada solución necesita utilizar?

10- Un tren sale de una estación y viaja hacia el norte a 75 km/h. Dos horas mas tarde un segundo tren deja la estación sobre una vía paralela y viaja hacia el norte a 125 km/h. ¿A qué distancia de la estación dará alcance el segundo tren al primero?

11- Un día una tienda vendió 30 camisetas. Las blancas costaban $9,95 y las amarillas $10,50. En total se vendieron $310,60 en camisetas. ¿Cuántas camisetas se vendieron de cada color?

12- Carlos es 8 años mayor que su hermana María. Hace 4 años la edad de María era dos tercios la de Carlos. ¿Qué edad tiene cada uno?

13- Encuentre el número fraccionario que es igual a $\frac{7}{3}$ cuando se suma 2 al numerador, e igual a $\frac{5}{4}$ cuando se aumenta 1 al denominador.

14- El perímetro de un campo rectangular es de 204 m y el área de 2565 m^2. Encuentre las dimensiones del campo.

15- Una edición limitada de un libro publicado por una sociedad de historiadores se ofreció en venta a sus miembros. El costo era de un libro por 12$ o dos libros por 20$. La sociedad vendió 880 libros y el monto de las ventas fue de 9840$ ¿Cuántos miembros compraron dos libros?

16- Un señor acertó 5 números de la lotería, dos de los cuales eran 23 y 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en 2 unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era 10 unidades menos que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

17- En las fiestas de un determinado lugar había tres espectáculos: A, B y C. Un chico fue dos veces a A, una vez a B y una vez a C y gastó \$13; otro asistió tres veces a A y una vez a B y gastó \$18 y un tercero entró una vez a cada espectáculo, lo que le costó \$8. ¿Alguno de los tres espectáculos tenía entrada gratuita?

18- En un supermercado se ha hecho una oferta de latas de tomate, yogures y paquetes de sal. Una señora compró dos latas de tomate, cuatro yogures y un paquete de sal gastando \$20, otra compró una lata de tomates, dos de yogures y devolvió un paquete de sal que no estaba en condiciones, por lo que pagó en total \$7 y otra compró tres yogures y devolvió dos paquetes de sal, gastando \$2. ¿En qué consistió la oferta?

19- Calcular tres números sabiendo que: la suma entre ellos es 176, el primero es la cuarta parte del tercero y éste supera al segundo en 40 unidades.

20- De una fiesta se van 21 chicas y quedan 2 varones por mujer. Más tarde se van 63 chicos y quedan 5 mujeres por cada varón. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas había al principio?

21- Paula es 12 años mayor que su hermano Roberto. Dentro de 4 años Roberto tendrá dos terceras partes de la edad de Paula.¿ Qué edad tiene cada uno de ellos?

AUTOEVALUACIÓN 7

1. Dos soluciones de $y = ax + b$ son $(1, 2)$ y $(-3, 4)$.
   Encuentre los valores de a y b.

2. Determine k de manera que S sea compatible indeterminado, siendo:

$$S \begin{cases} 6x - 9y = -3 \\ -4x + 6y = k \end{cases}$$

3. Resuelva los siguientes sistemas:

$$\text{i)} \begin{cases} x + 3y = 7 \\ -x + 4y = 7 \end{cases} \qquad \text{ii)} \begin{cases} 2y + z = 5 \\ -x + y + 3z = 4 \\ -x + 5y + 5z = 14 \end{cases} \qquad \text{iii)} \begin{cases} x^2 + 2x + y^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

4. Una bebida refrescante tiene 15% de jugo de naranja y otra tiene 5% de esta sustancia. ¿Cuántos litros de cada una de ellas se debería mezclar para obtener 10 litros de bebida refrescante con un 10% de jugo de naranja?

5. Un número natural n de 3 cifras es igual a 40 veces la suma de sus cifras. Si se le suma el número 102, se obtiene un número de tres cifras iguales a la de las decenas de n y, si se le multiplica por 2 a la suma de sus cifras, el resultado es 6. ¿Cuál es el número?

6. Calcule k de manera que el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ kx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$$

   a) tenga única solución
   b) tenga infinitas soluciones
   c) no tenga solución

Un momento para la distracción.....

Pasatiempos...

- El Gran Mago me dijo:
  "Escoge una carta de la baraja. El As cuenta como 1, el Rey como 10, la Reina como 9, la Sota como 8 y las demás cartas como su número indica. Dobla el valor de tu carta. Al número que te resulta le añades 1. Multiplica el resultado por 5. Si tu carta es de oros, añade 4, si es de copas, añade 3, si es de espadas, añade 2 y si es de bastos 1. Dime el resultado."
  Yo le dije 39, y el Gran Mago me dijo instantáneamente:
  "Tu carta es el 3 de oro". ¡Maravilloso!
  ¿Cómo lo hace?

- Un caballo y una mula caminaban juntos llevando cada uno sobre sus lomos varios sacos pesados. El caballo se quejaba de su carga y la mula le dijo:
  "¿De qué te quejas?... si yo cargara con uno de tus sacos mi carga sería el doble de la tuya. En cambio, si vos cargaras con uno de los míos tu carga sería igual a la mía"
  ¿Cuántos sacos llevaban el caballo y la mula?

- Una escalera mecánica tiene n escalones visibles que descienden a velocidad constante. Antonio y Luis bajan por la escalera también a velocidades constantes. Luis recorre el doble número de escalones por minuto que Antonio. Luis llega abajo después de andar 27 escalones y, Antonio, llega después de andar 18 escalones. ¿Cuál es el número n de escalones visibles?

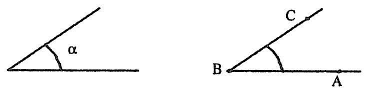
CAPÍTULO 8 - GEOMETRÍA

El objetivo de este capítulo es recordar algunos conceptos de la geometría elemental: ángulos, triángulos y polígonos en general. Asimismo se revisarán las nociones de perímetros, de áreas y de volúmenes.

Con este fin se enunciarán propiedades, se mostrarán ejemplos y se propondrán problemas.

ÁNGULOS

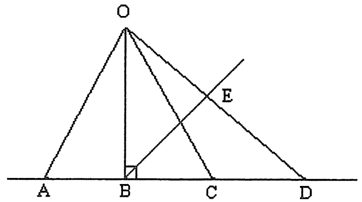
Los ángulos serán indicados por letras griegas o por tres letras ABC donde B es el origen común de las semirrectas que lo determinan.



ángulo convexo

➲ EJERCICIOS:

1- Observe el dibujo, repase conceptos e indique:



- Un ángulo llano ....
- Un ángulo recto ....
- Un ángulo agudo ....
- Un ángulo obtuso ....
- Un par de ángulos suplementarios ....

- Un par de ángulos complementarios.............................
- Un par de ángulos adyacentes.............................
- Un par de ángulos consecutivos no adyacentes............................

2- ¿Cuál es el valor de un ángulo:

i) que es triple de otro de 15°37'?

ii) que vale cuatro veces un ángulo de 21°36' ?

iii) que vale la quinta parte de otro de 96°?

iv) que vale un tercio de otro de 108° 65'21''?

3- ¿Cuál es el complemento

i) del ángulo de 28° ?

ii) del ángulo de 38° 22' ?

iii) del ángulo de 65° 15'?

4- ¿Cuál es el ángulo suplementario :

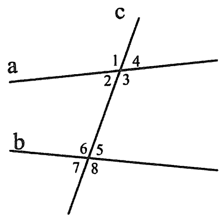
i) de un ángulo de 89° ?

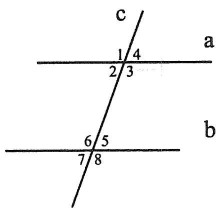
ii) de un ángulo de 113° 45'6'' ?

iii) de un ángulo de 134° ?

5- La suma de dos ángulos α y β es 8° 47' 23" y su diferencia es 1° 1' 1", ¿cuáles son esos ángulos?

Ángulos formados entre dos rectas al ser cortadas por una tercera





- 2 y 5 se llaman alternos internos,
- 4 y 7 son alternos externos,
- 4 y 5 son correspondientes,
- 3 y 5 son colaterales internos,
- 1 y 3 son opuestos por el vértice.

➲ EJERCICIO:

6- Indique los otros pares de ángulos: alternos internos, alternos externos, correspondientes, colaterales y opuestos por el vértice.

Congruencia de ángulos

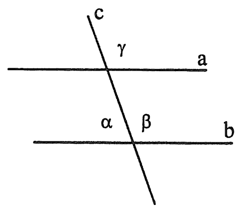
Dos ángulos son congruentes si y solo si tienen la misma medida.

- Los ángulos correspondientes son congruentes si y solo si las rectas a y b son paralelas.

➲ EJERCICIOS:

7- Sean a y b rectas paralelas.

Calcule α , β y γ ,sabiendo que $\begin{cases} \alpha = 2x+14 \\ \gamma = 6x-26 \end{cases}$



8- A partir de la congruencia de los ángulos correspondientes entre paralelas y de la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice, demuestre que:

i) Los ángulos alternos internos (externos) son congruentes.

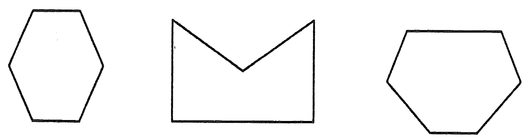
ii) Los ángulos colaterales internos (externos) son suplementarios.

9- Dados los ángulos consecutivos 32° 41' y 48° 35' halle en grados sexagesimales el ángulo que forman sus bisectrices.

10- ¿Qué ángulo forman las bisectrices de dos ángulos consecutivos y suplementarios?

Recuerde: se llama bisectriz de un ángulo a la semirrecta interior, con origen en el vértice, que lo divide en dos ángulos congruentes.

POLÍGONOS



polígono convexo regular — polígono cóncavo — polígono convexo no regular

TRIÁNGULOS

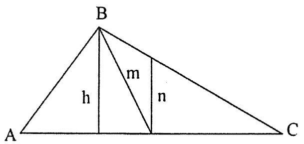
El triángulo es el polígono más elemental, porque tiene el menor número de lados posible para definir un polígono.

Cualquier polígono puede ser dividido en triángulos y muchas veces para estudiar las propiedades de los polígonos importa determinar si los triángulos que lo forman son congruentes.

Un triángulo queda determinado por sus tres lados (no existen dos triángulos de distinta forma que tengan iguales las medidas de los tres lados).

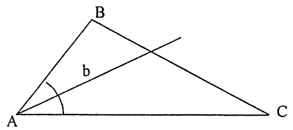
Elementos de un triángulo y algunas propiedades

- Se llama mediana correspondiente a un lado de un triángulo al segmento que une el punto medio del lado con el vértice opuesto.
- La mediatriz de un lado de un triángulo es la mediatriz del segmento que dicho lado constituye.
- Se llama altura correspondiente a un lado de un triángulo al segmento perpendicular al mismo trazado desde el vértice opuesto.



h, m y n son respectivamente altura, mediana y mediatriz del lado AC en el triángulo ABC

- Se llama bisectriz de un ángulo de un triángulo a la bisectriz de dicho ángulo.



b es la bisectriz del ángulo A en el triángulo ABC

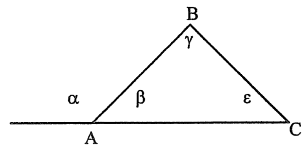
- En un triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º.
- El ángulo exterior de un triángulo (adyacente a uno de sus ángulos) es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

- En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a lados iguales son congruentes.
- En un triángulo isósceles la altura, bisectriz, mediana y mediatriz correspondiente a la base son coincidentes.
- Las bisectrices se intersecan en un punto (incentro) que es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo.
- Las mediatrices se intersecan en un punto (circuncentro) que es centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.
- Las medianas se intersecan en un punto (baricentro) tal que su distancia a cada vértice es el doble de su distancia al punto medio del lado opuesto.
- Las rectas que contienen a las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado ortocentro.

➲ EJERCICIOS:

11- Calcular las medidas de los ángulos α, β, γ y ε, sabiendo que:

i) $\begin{cases} \alpha = 6x + 26^\circ \\ \beta = 2x + 10^\circ \\ \gamma = 5x - 17^\circ \end{cases}$ ii) $\begin{cases} \alpha = 4x - 17^\circ\, 30' \\ \gamma = x + 26^\circ\, 30' \\ \varepsilon = 2x - 12^\circ \end{cases}$

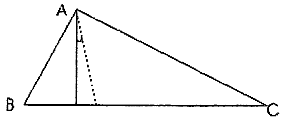


12- α, β, γ son los ángulos internos de un triángulo. β mide cuatro veces lo que mide α y γ mide cinco veces más que el doble de α. ¿Cuánto miden los tres ángulos?

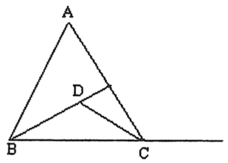
13- ¿Cuál es el valor de un ángulo de la base en un triángulo isósceles, si el ángulo del vértice que forman los lados congruentes es de 35º 24' ?

14- El ángulo del vértice que forman los lados congruentes de un triángulo isósceles mide 42º28'. ¿Cuánto mide el ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la prolongación de la base?

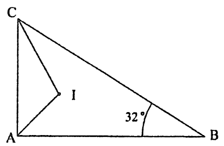
15- En un triángulo ABC, el ángulo B mide 60º y el ángulo C mide 20º. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman la altura y la bisectriz trazada desde el vértice A?.



16- Dado un ángulo A = 82° del triángulo ABC , averigue el ángulo D formado por las bisectrices interiores de los otros dos.



17- En un triángulo rectángulo el ángulo B mide 32°. ¿Cuánto valdrá el ángulo AIC, formado en el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos A y C ?.

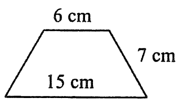


El teorema de Pitágoras:

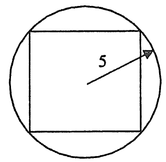
"En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos."

➲ EJERCICIOS:

18- Calcule la altura del trapecio isósceles.



19- Sea un cuadrado inscripto en una circunferencia de radio 5cm, hallar la medida del lado.



20- Pruebe que la altura (h) de un triángulo equilátero de lado l está dada por

$$h = \frac{\sqrt{3}\, l}{2}$$

21- Pruebe que la diagonal (d) de un cuadrado de lado l es $d = l\sqrt{2}$

Congruencia de triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus tres lados y sus tres ángulos tienen respectivamente las mismas medidas. Cuando dos triángulos son congruentes, sus ángulos congruentes son los opuestos a los lados de igual medida.

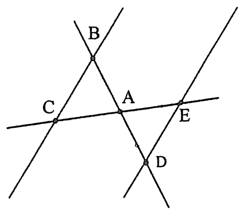
Se puede asegurar la congruencia de dos triángulos sin necesidad de verificar que sus tres lados y sus tres ángulos lo sean. Es suficiente, para comprobar la congruencia, el cumplimiento de alguna de las condiciones o criterios que siguen:

- Dos triángulos son congruentes si los tres lados son respectivamente congruentes.
- Dos triángulos son congruentes si dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos son respectivamente congruentes.
- Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado y los ángulos con vértice en los extremos de dicho lado (ángulos adyacentes al lado).
- Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes dos lados y el ángulo opuesto al lado mayor de ellos.

➲ EJERCICIOS:

22- Sabiendo que : $\overline{BC} \;||\; \overline{ED},\;\; \overline{AC} = \overline{AE} = 4cm,\;\; \overline{BA} = 2{,}5cm \; y \; \overline{DE} = 3cm$.

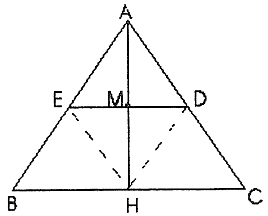
¿Se pueden calcular las medidas de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$?



23- Pruebe que la altura de un triángulo equilátero determina dos triángulos congruentes.

24- En un triángulo isósceles ABC (AB = AC) se toma un punto cualquiera, M sobre la altura AH, y por él trazamos una perpendicular ED a ésta. Demuestre que los ángulos BEH y HDC son congruentes.

Sugerencia: Probar primero que $\overline{AD} = \overline{AE}$.



25- Pruebe que cada punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos del mismo.

Semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes cuando sus tres ángulos son congruentes y sus lados homólogos son proporcionales.

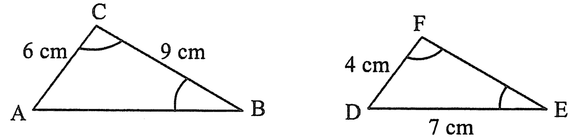
Sin embargo, como en el caso de la congruencia de triángulos, se puede afirmar la semejanza de triángulos si se cumplen algunas de las condiciones o criterios que siguen:

- Dos triángulos son semejantes si los tres lados son proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos congruentes.
- Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de lados homólogos proporcionales y son congruentes los ángulos comprendidos entre ellos.

➲ EJERCICIOS:

26- En cada caso los triángulos son semejantes, explique por qué y calcule la longitud de los lados que se piden.

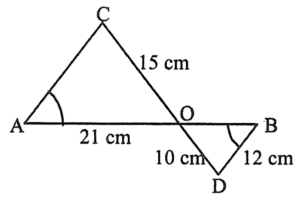
i)



AB = ...
C y F ángulos congruentes

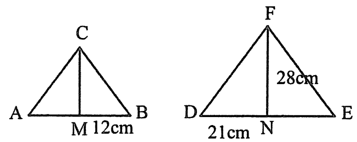
EF = ...
By E ángulos congruentes

ii)



AC = ...
OB = ...

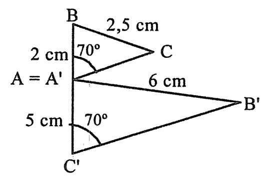
iii)



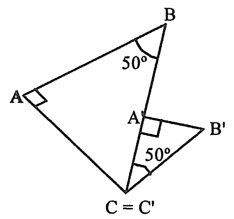
CM: mediana de AB
FN: mediana de DE
CM: . . . . .

27- Indique si los triángulos son o no semejantes. Justifique la respuesta.

i)



ii)

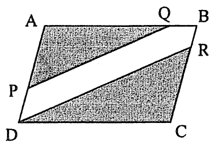


Propiedad

Si dos triángulos son semejantes, las alturas correspondientes, las medianas correspondientes y las bisectrices correspondientes son proporcionales a los lados correspondientes.

➲ EJERCICIOS:

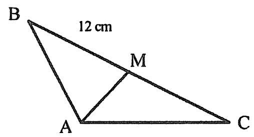
28- En el paralelogramo ABCD de la figura, PQ es paralela a DR. Pruebe que los triángulos PAQ y RCD son semejantes.

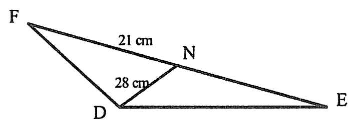


29- Calcule, aplicando la propiedad enunciada las longitudes que se piden.

i) Los triángulos ABC y DFE son semejantes.

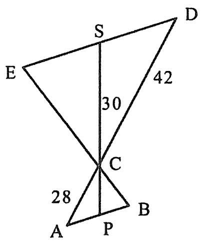
AM: mediana de BC. DN: mediana de FE





AM = ...

ii) Los triángulos ABC y DEC son semejantes. ED || AB.



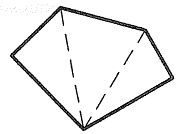
CP = ...

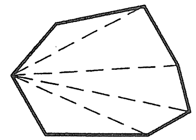
Polígonos (de más de tres lados)

Recuerde que los polígonos de más de tres lados se nombran: cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, eneágono, decágono, undecágono, dodecágono . . . polígono de n lados.

Propiedades

La observación de los esquemas ayuda a la comprensión de las propiedades que siguen.





- La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es igual a $(n-2).180°$
- La suma de los ángulos exteriores de un polígono es igual a 360°

➲ EJERCICIO:

30- i) Dibuje un pentágono y un hexágono regulares y marque en cada uno: ángulos interiores y exteriores, diagonales y apotemas.

ii) ¿Cuántas diagonales parten de un vértice de un polígono de n lados?

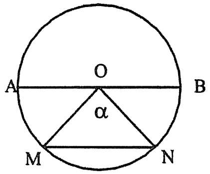
iii) ¿Cuántas diagonales tiene un polígono de n lados?

CIRCUNFERENCIA

Posiciones relativas de una recta y una circunferencia y de dos circunferencias.

- Una recta es exterior a una circunferencia si no tienen puntos en común.
- Una recta es tangente a una circunferencia si tienen un único punto en común.
- Una recta es secante a una circunferencia si tienen dos puntos en común.
- Dos circunferencias son secantes si tienen dos puntos en común.
- Dos circunferencias son tangentes si tienen un solo punto común.
- Dos circunferencias son concéntricas si tienen el centro en común.

Elementos de una circunferencia



AB :diámetro

MN : cuerda

$\overset{\frown}{MN}$: arco

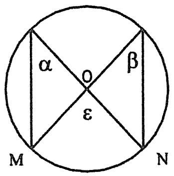
OA : radio

α : ángulo central que abarca el arco MN

Propiedad

La tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

Ángulos inscriptos en un arco de circunferencia



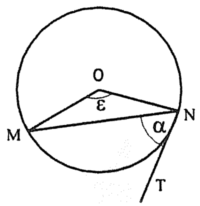
α y β son ángulos inscriptos en la circunferencia que abarcan el arco MN.

Propiedades

- Los ángulos inscriptos en un mismo arco son congruentes.
- Todo ángulo inscripto en una circunferencia es congruente con la mitad del ángulo central que abarca el mismo arco.

$$\alpha = \beta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ángulos semiinscriptos en un arco de circunferencia



α : ángulo semiinscripto que abarca el arco $\overset{\frown}{MN}$.

Es el ángulo con vértice en N, tal que uno de sus lados es la cuerda MN, y el otro lado NT es tangente a la circunferencia en ese punto.

Propiedad

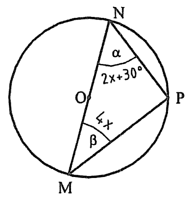
Todo ángulo semiinscripto es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$$

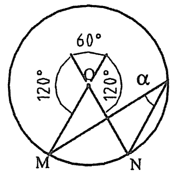
➲ EJERCICIO:

31- Calcule la amplitud de los ángulos que se indican:

i)



ii)



o: centro de las circunferencias

α =..... β =..... α =.....

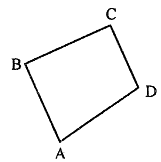
PERÍMETROS

- El perímetro de un polígono de n lados se obtiene sumando las longitudes de sus lados.
- La longitud de una circunferencia de radio r es igual a $2\pi r$.

➲ EJERCICIOS:

32- Calcule el perímetro de cada uno de los polígonos de las figuras.

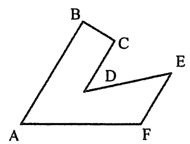
i)



AB = 10cm BC = 11cm

CD = 8 cm DA = 9 cm

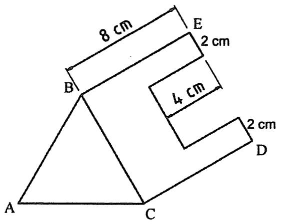
ii)



AB = 2 EF AF = 8cm BC = 2cm

DE = ¾ AF EF = CD = 4cm

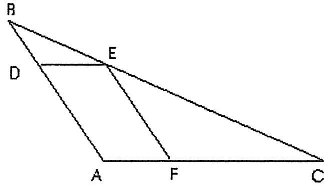
33- Calcule el perímetro de la figura, sabiendo que el triángulo ABC es equilátero y el cuadrilátero BEDC es un cuadrado.



34- Calcule el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que la base es de 12cm y la altura correspondiente a la base es de 8cm.

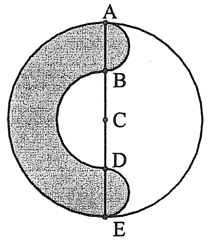
35- En una circunferencia de 25 cm. de diámetro se inscribe un rectángulo cuyos lados difieren en 17 cm. ¿Cuánto miden sus lados?

36- Calcule el perímetro del paralelogramo ADEF, siendo AB = 10 cm., BC = 16 cm., AC = 14 cm. y BE = 4 cm.



37- Calcule el perímetro de las zonas sombreadas.

i)



Los arcos AB, BD, DE y AE son semicircunferencias.

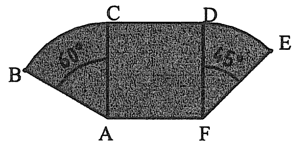
AB = BC = CD = DE

C: centro

AD = 24 cm

ii) ACDF es un cuadrado

DF = 8 cm



BC: arco de circunferencia con centro A

DE: arco de circunferencia con centro F

ÁREAS

- El área de un triángulo de base b y altura h es igual a

$$\frac{b\times h}{2}$$

- El área de un paralelogramo de base b y altura h es igual a

$$b\times h$$

- El área de un cuadrado de lado l es igual a

$$l\times l = l^2$$

- El área de un trapecio de base mayor B, base menor b y altura h es igual a

$$(B+b)\times\frac{h}{2}$$

- El área de un rombo o de un romboide de diagonal mayor D y diagonal menor d es igual a $\frac{D\times d}{2}$

- El área de un polígono regular de lado l y apotema ap es igual a

$$\frac{perímetro\times ap}{2}=\frac{n\times l\times ap}{2}$$

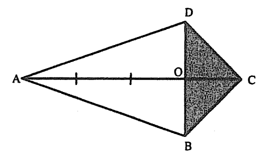
donde n es el número de lados del polígono.

- El área de una circunferencia de radio r es igual a $\pi\times r^2$

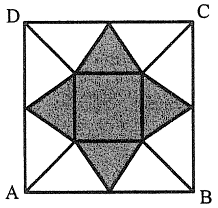
➲ EJERCICIOS:

38- Calcule el área de las figuras sombreadas.

i) $AC = 21cm$; $OC = \frac{2}{5}AC$; $DB = 10{,}5cm$

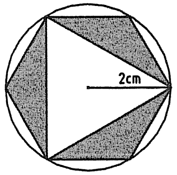


ii)



La diagonal AC del cuadrado ABCD mide 0,55 dm.
El perímetro del cuadrado del centro es de 4cm.

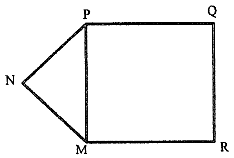
iii)



Recuerde: el lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscripta.

39- Calcule la base del rectángulo de área 16,423 m^2 y de altura 100m

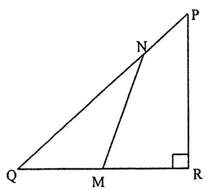
40- En la figura la altura del triángulo isósceles MNP es la mitad del lado del cuadrado MPQR y el área total de la figura es 180cm^2. ¿Cuánto mide cada lado del polígono MNPQR?



41- ¿Cuál es el lado y cuál es el área de un cuadrado, si la diagonal y el lado del mismo suman 5,80m ?

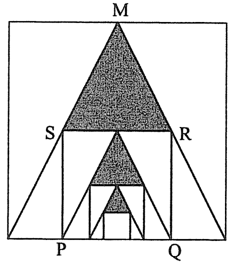
42- Dado el lado 0,25m. de un cuadrado, halle el lado de un triángulo equilátero de igual área.

43-

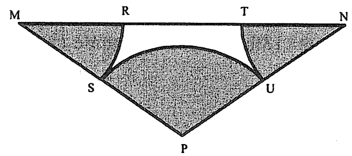


En el triángulo PQR: M es punto medio de QR y
4.PN = NQ.
Área triángulo QNM = 30 cm^2
¿Cuál es el área del cuadrilátero PNMR?

44- En el cuadrado grande se marca sobre un lado el punto medio M y se trazan los segmentos que unen M con los vértices opuestos.
Los puntos medios de estos segmentos son R y S; PQRS es un cuadrado. Se repite este procedimiento dos veces. ¿Qué fracción del cuadrado grande representa la zona sombreada?



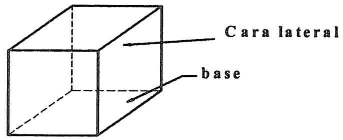
45- Calcule el área de la zona sombreada.



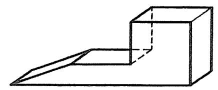
El triángulo MNP es isósceles.
MP = 10 cm
S y U son puntos medios de los lados.
RS, TU y SU son arcos de circunferencia con centro en M, N y P respectivamente.

CUERPOS

- Son poliedros los cuerpos cuyas caras son polígonos.



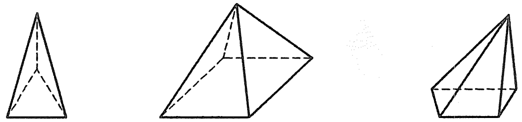
Poliedro convexo



Poliedro cóncavo

- Prisma es un poliedro que tiene dos caras (bases) que son polígonos congruentes y paralelos; las caras laterales son paralelogramos.

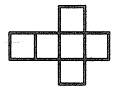
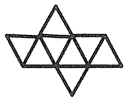
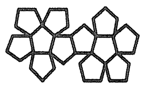
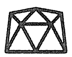
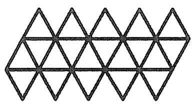
- Pirámide es un poliedro que tiene un polígono como base y cuyas caras laterales concurren en un punto (vértice).



Poliedros regulares

Son poliedros regulares aquellos cuyas caras son polígonos regulares congruentes entre sí. Solo hay cinco poliedros regulares.

En el cuadro que sigue se muestran sus desarrollos y las formas de sus caras.

Poliedro regular		nº de caras	Forma caras
tetraedro 		4	triángulo equilátero
cubo o hexaedro 		6	cuadrado
octaedro 		8	triángulo equilátero
dodecaedro 		12	pentágono regular
icosaedro 		20	triángulo equilátero

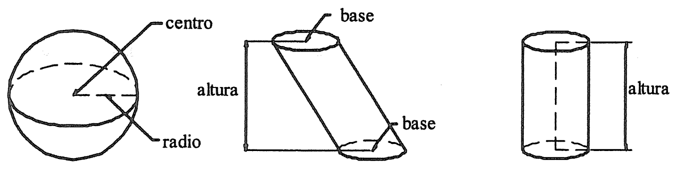
➲ EJERCICIO:

46- Coloque "siempre", "a veces" o "nunca".

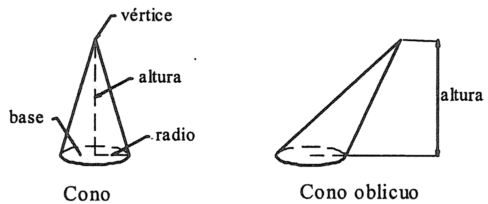
- Un prisma es un poliedro regular.
- Los cuerpos redondos son poliédricos.
- Un cilindro es un cuerpo redondo.
- Las pirámides tienen base cuadrada.
- Las caras de un paralelepípedo son paralelogramos.
- Si un cuerpo tiene base rectangular es un paralelepípedo.
- En un vértice de un poliedro concurren 3 o más caras.
- El volumen de un cono es la mitad del volumen de un cilindro de igual base.

Cuerpos redondos

Son cuerpos redondos la esfera, el cilindro y el cono.



Esfera Cilindro oblicuo Cilindro recto



Cono Cono oblicuo

➲ EJERCICIO:

47- Coloque "siempre", "a veces" o "nunca".

- El desarrollo de la cara lateral de un cilindro es un rectángulo.
- El desarrollo de la cara lateral de un cono es un triángulo.
- La altura de un cono interseca a la base.

Áreas laterales y totales

- El área lateral de un cuerpo es la suma de las áreas de sus caras laterales.
- El área total de un cuerpo es la suma de las áreas de todas sus caras.

➲ EJERCICIOS:

48- Calcule las áreas lateral y total de un paralelepípedo rectángulo que tiene 5,25m. de largo, 4,50m. de ancho y 3,75m. de alto.

49- El área total de un prisma recto, de base cuadrada de 5cm de lado, es de 230 cm^2. Determine el área lateral y la altura del prisma.

50- ¿Cuál es la altura de un prisma recto cuya área lateral es de $104m^2$, si la base es un pentágono regular de 2,6m de lado?

Volúmenes

- Los volúmenes de prismas y cilindros se obtienen:

$$\text{área de la base} \times \text{altura}$$

- Los volúmenes de pirámides y conos se obtienen:

$$\frac{\text{área de la base} \times \text{altura}}{3}$$

- El volumen de una esfera de radio r se obtiene:

$$\frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

➲ EJERCICIOS:

51- ¿Cuál es el volumen de un prisma recto P de base cuadrada de lado 5cm y altura 10cm?

52- ¿Cuál es el volumen de un prisma recto T cuya base es un triángulo rectángulo e isósceles cuyos lados congruentes miden 5cm y su altura es 10cm?. (Observe que el volumen de T es la mitad del volumen de P).

53- ¿Cuál es el volumen del prisma recto P de base cuadrada de lado 6cm y altura 9cm?

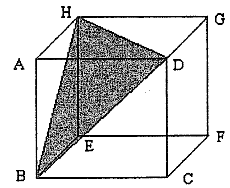
54- ¿Cuál es el volumen de una pirámide S de igual base y altura que P(ej.51)?. (Observe que el volumen de S es la tercera parte del volumen de P).

55- Con $3m^3$ de arena se llenan $\frac{2}{3}$ de un arenero cilíndrico de 1,5m de radio. ¿Qué altura tiene el arenero?

56- Se tiene un triángulo isósceles, cuya área es de $6m^2$ y la altura es la mitad de la base, ¿cuál será el volumen del prisma triangular recto construido tomando este triángulo por base y sabiendo que el área total del prisma es de $24m^2$?

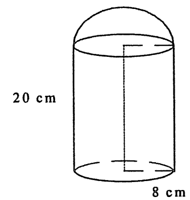
57- Halle el lado de un tetraedro regular de 10 m^3 de volumen.

58- Dado un cubo ABCDEFGH cuya arista mide $\sqrt{8}$ dm, hacemos pasar un plano transversal por la recta DH, diagonal de la cara superior, y por el vértice B, con lo cual queda determinada la pirámide ABDH. Exprese en m^3 el volumen y en cm^2 el área total de dicha pirámide.



59- Calcule el diámetro de una esfera cuyo volumen es $64cm^3$.

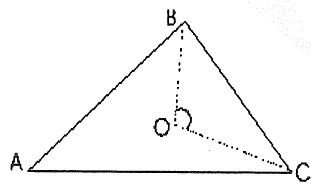
60- Calcule el volumen de un recipiente como el de la figura, sabiendo que el casquete superior es una semiesfera



61- Un frasco tiene forma cilíndrica de radio 5cm y altura 12cm, está lleno de esferas metálicas de 1,5cm de diámetro.
Se vierte hasta el tope del mismo un líquido lubricante del que luego se mide el volumen.
¿Cuántas bolitas hay en el frasco si se sabe que el líquido ocupa 2/3 de su capacidad?

AUTOEVALUACIÓN 8

1. Indique verdadero o falso. Justifique la respuesta.
   - El número total de diagonales de un heptágono es 7.
   - Un trapecio que tiene los dos lados paralelos congruentes es un paralelogramo.
   - Un paralelogramo que tiene las diagonales congruentes es un rectángulo.
   - La diagonal mayor de un romboide lo divide en dos triángulos congruentes.
2. Dados dos puntos A y B, fuera de una recta a, pero pertenecientes al mismo semiplano que define dicha recta, encuentre sobre a un punto que equidiste de A y B.
3. Pruebe que en el triángulo ABC, el ángulo o, que forman las bisectrices de los ángulos ABC y BCA, es igual a 90º más la mitad del ángulo BAC.



4. Sea P un punto interior del rectángulo ABCD tal que PA = 3cm, PD = 4cm y PC = 5cm. Calcule PB.

5. Jorge armó una caja de base rectangular. Estela armó otra caja como la de Jorge, pero con todas las dimensiones duplicadas.
   Si Jorge necesita ½ litro de pintura para cubrir toda la superficie exterior de su caja:
   i) ¿Cuánta pintura necesita Estela para pintar su caja?
   ii) ¿Cuánto mayor es la capacidad de la caja de Estela?

Un momento para la distracción.....

- Tres chicas se están arreglando en el salón para salir a bailar. Una se está pintando las uñas, otra se está peinando y otra se está maquillando:
  Flor no se está pintando las uñas y no está arreglada.
  Patricia no se está maquillando ni está arreglada.
  Ana no está arreglada ni pintándose las uñas.
  Flor no se está peinando.
  ¿Qué está haciendo cada chica?

- Sea ABC un triángulo tal que el ángulo $\hat{B}$ es agudo y $\hat{B} = 2\hat{C}$. Se traza la altura correspondiente al vértice A que corta a BC en D. Sea E en la prolongación del lado AB tal que $BE = BD$. La recta que pasa por E y D corta al lado AC en F.
  Calcular $\dfrac{DF}{AC}$.

- **La cifra tachada...**
  Un amigo piensa un número de varias cifras, por ejemplo el 847. Propóngale que halle la suma de los valores de las cifras de este número (8+4+7 = 19) y que le reste del número pensado. Le resultará: 847-19 = 828.
  Que tache una cifra cualquiera del resultado obtenido, la que desee y que te comunique las restantes. Le dirá la cifra tachada, aunque no sepa el número pensado y no haya visto lo que ha hecho con él.
  ¿En qué forma se hace esto y en qué consiste la clave del truco?.

CAPÍTULO 9 - TRIGONOMETRÍA

En este capítulo se tratarán problemas relativos a la ***Trigonometría***. La palabra proviene de los vocablos *trigon* y *metron* que significan, respectivamente, triángulo y medida y que describen el primer objeto de estudio de esta disciplina, cual fue el de resolver problemas que requerían conocer relaciones entre las medidas de los lados y los ángulos de un triángulo.

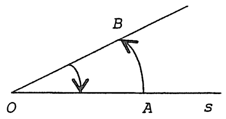
Nota de interés:

En realidad, durante mucho tiempo, los geómetras griegos no la consideraron como parte de la Matemática y dejaron su estudio en mano de los agrimensores y de los astrónomos, a quienes se deben los primeros avances en el estudio de la misma. En particular, hacia el año 150 D. C., los trabajos del astrónomo egipcio Ptolomeo dieron un gran impulso a la Trigonometría Esférica (en la que no se consideran ángulos planos, sino ángulos sobre una superficie esférica).

A finales del siglo XVII los avances en otras ramas de la Matemática provocan un nuevo impulso a la Trigonometría pues, las llamadas funciones trigonométricas comienzan a ser una herramienta de gran utilidad, no sólo en cuestiones de Matemática pura sino en el estudio de los fenómenos ondulatorios (ondas sonoras, vibraciones, ondas electromagnéticas, etc.) entre otras aplicaciones.

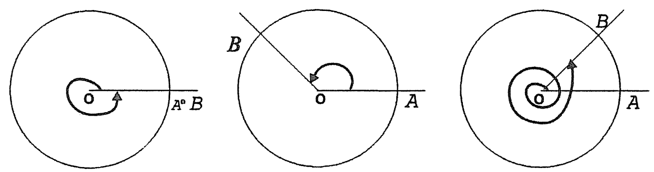
ÁNGULOS ORIENTADOS.

Consideremos, una semirrecta *s* del plano, con origen *O* que contiene al punto *A* (Fig.1). Si la semirrecta *s* gira alrededor de *O* (manteniéndose siempre en el mismo plano) hasta una posición cualquiera *OB*, se dice que esta rotación de *s* ha *generado el ángulo AOB*, de *vértice O* y lados *inicial, OA* y *final, OB*.



La semirrecta *s* puede girar en el sentido de las agujas del reloj, o en sentido contrario. En este caso se dice que el ángulo ha sido generado en sentido *positivo* (o bien, que el ángulo es *positivo*) y en el primero, que tal sentido es *negativo* (o que el ángulo es *negativo*).

Si el arco *AB* es una circunferencia, se dice que el ángulo generado es un ángulo de *una vuelta*. Los ángulos *menores que una vuelta* y *mayores que una vuelta* son los que corresponden a rotaciones de *s* para las cuales la longitud del arco *AB* es menor o mayor, respectivamente, que la de la circunferencia.



Ángulo de una vuelta	Ángulo menor que una vuelta	Ángulo mayor que una vuelta

Dos ángulos α y β son ***congruentes*** y se simbolizan $\alpha \equiv \beta$, cuando teniendo los mismos lados iniciales, los lados finales de ambos ángulos son coincidentes. Por ejemplo, el ángulo *nulo* (es decir el ángulo para el cual la semirrecta *s* no ha girado) es congruente con el ángulo de una vuelta.

Sistemas de medición de ángulos

i) ***El sistema sexagesimal***

La unidad de medida es el ***grado sexagesimal*** (o simplemente, *grado*), es la medida de un ángulo igual a la trescientos sesenta ava parte del ángulo de una vuelta.

$$1 \text{ grado sexagesimal} = \frac{1}{360} \text{ ángulo de una vuelta}$$

En símbolos:

- 1 grado sexagesimal: 1°
- $\frac{1}{60}$ grado: 1′ (un *minuto sexagesimal* o un *minuto*)
- $\frac{1}{60}$ minuto: 1″ (un *segundo sexagesimal* o un *segundo*)

Por ejemplo:

i) $\alpha = 20°13'47''$, indica que α ha sido generado en sentido positivo.

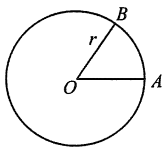
$\alpha = -20°13'47''$, indica que α ha sido generado en sentido negativo.

ii) $\alpha = 360° \Leftrightarrow$ α es un ángulo de una vuelta generado en sentido positivo

iii) $\alpha = -90° \Leftrightarrow$ α es un ángulo recto (es decir, de $\frac{1}{4}$ de vuelta), generado en sentido negativo

ii) *El sistema radial*

La unidad de medida de este sistema, es el ***radián,*** es la medida de un ángulo central de una circunferencia de radio *r*, cuyos lados inicial y final subtienden un arco *AB*, tal que long $AB = r$



Observe que si x es la medida en radianes de un ángulo α entonces la longitud del arco AB subtendido por α es long $AB = x.r$

es decir: $$x = \frac{\text{long } AB}{r} \qquad (*)$$

Como en el sistema sexagesimal cuando escribamos, por ejemplo:

i) $\alpha = 5{,}3512$ rad. (o simplemente: $\alpha = 5{,}3512$), indicaremos que la medida de α en el sistema radial es el número real 5,3512

ii) $\alpha = -5{,}3512$ rad (o simplemente $\alpha = -5{,}3512$), indicaremos que α ha sido generado en sentido negativo.

Consecuentemente, si, por ejemplo, α es un *ángulo de una vuelta*, entonces la longitud del arco que subtiende α es la de la circunferencia por lo cual, de (*) resulta:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

De lo expuesto hasta ahora resultan inmediatas las relaciones que vinculan las respectivas unidades de medida de ambos sistemas, pues:

$$360° \text{ ———— } 2\pi \text{ rad}.$$

$$1° \text{ ———— } \frac{1°\, 2\pi \text{ rad}}{360°} \cong 0{,}017453293\ldots \text{rad}$$

$$2\pi \text{ rad} \text{ ———— } 360°$$

$$1 \text{ rad} \text{ ———— } \frac{1\text{rad}360°}{2\pi\text{rad}} \cong 57°17'44'',8\ldots.$$

Sin embargo, independientemente de estas relaciones, es conveniente recordar las conversiones de un sistema a otro para ciertos ángulos "destacados", como se puede ver en el siguiente cuadro.

grados sexagesimales	0	30	45	60	90	180	270	360
radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

✎ OBSERVACIÓN:

Adoptado un sistema de medición de ángulos, queda establecida una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los ángulos orientados y el de los números reales. Por ello, de ahora en adelante, nos referimos indistintamente a ángulos o a números reales y, salvo indicación expresa, sobreentenderemos que el sistema de medición fijado es el radial.

➲ EJERCICIOS:

1- Exprese en radianes la medida de los siguientes ángulos.

i) $\alpha = 1°$ iii) $\alpha = 25°12'$

ii) $\alpha = 15°$ iv) $\alpha = 171°$

2- Exprese en el sistema sexagesimal la medida de los siguientes ángulos.

i) $\alpha = \frac{3}{4}$ rad. iii) $\alpha = 1$ rad.

ii) $\alpha = \frac{\pi}{5}$ rad. iv) $\alpha = 3$ rad.

3- Calcule, en radianes, la medida de la suma de los ángulos interiores de un hexágono regular.

4- Dada una circunferencia de radio 0,5 determine la longitud del arco correspondiente a un ángulo central de $45°$.

5- Determine la medida en radianes, del ángulo central de una circunferencia de 4cm de radio que subtiende un arco de 8cm de longitud.

6- Si la medida en radianes de cada ángulo externo de un polígono regular es

i) $\frac{\pi}{3}$ ii) $2\frac{\pi}{5}$

halle, en cada caso, el número de lados del polígono.

7- Dado el ángulo $\alpha = \frac{\pi}{3}$, determine:

a) 3 ángulos congruentes con α.

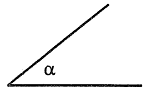
b) si los siguientes ángulos son o no, congruentes con α.

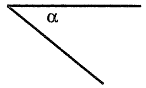
i) $\alpha = \frac{17}{4}\pi$, ii) $\alpha = -\frac{15}{4}\pi$, iii) $\alpha = -\frac{11}{3}\pi$

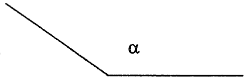
8- Complete el cuadro

α	Complemento de α	Suplemento de α
$\frac{\pi}{3}$		
	0	
		2π
-25°		

9- a) Dibuje el simétrico de cada uno de los siguientes ángulos (Recuerde que α y β se llaman ***simétricos*** (u *opuestos*) si $\alpha + \beta = 0$.

i) 

ii) 

iii) 

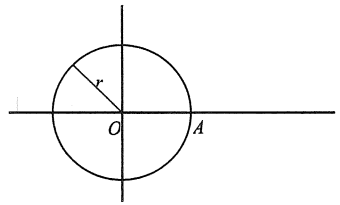
b) Complete el siguiente cuadro

α	simétrico de α
	$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{3}$	
	$-\frac{\pi}{2}$

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO

Conceptos Básicos

Sea un sistema de ejes coordenados ortogonales en el plano y una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y radio *r* como se indica en la siguiente figura.

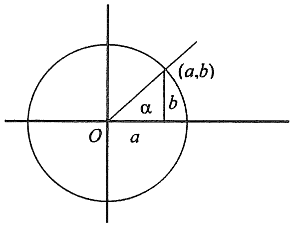


En lo que sigue consideraremos siempre ángulos α con vértice en *O* y lado inicial *OA* (con esto no se pierde generalidad puesto que cualquier ángulo del plano puede ubicarse siempre en esa posición, a la que se llama ***posición normal*** con respecto al sistema fijado).

Cualquiera sea el ángulo α en estas condiciones, su lado final determina un único punto $P(a,b)$ sobre la circunferencia; es decir:

$$\alpha \longrightarrow P(a,b) \in C(O,r)$$

como se ilustra en la figura siguiente.



Por ejemplo:

i) al ángulo nulo le corresponde el punto $(r, 0)$

ii) al ángulo (positivo) de un cuarto de vuelta, le corresponde el punto $(0, r)$

iii)al ángulo de media vuelta, le corresponde el punto $(-r, 0)$

iv) al ángulo (positivo) de tres cuartos de vuelta, le corresponde el punto $(0, -r)$

De acuerdo a la correspondencia:

$$\alpha \longrightarrow P(a,b) \in C(O,r)$$

dado el ángulo α, se pueden considerar los números reales: $\dfrac{b}{r}$ y $\dfrac{a}{r}$

llamados, respectivamente, ***seno de α*** ($sen\alpha$) y ***coseno de α*** ($\cos\alpha$).

Es decir: $\boxed{sen\alpha = \dfrac{b}{r}}$ $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{a}{r}}$

donde a y b son, respectivamente, la *abscisa* y la *ordenada* del punto P determinado sobre la circunferencia por el lado final de α.

Por ejemplo:

i) si α es el *ángulo nulo*, entonces:

$$sen\alpha = \frac{0}{r} = 0 \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{r}{r} = 1$$

ii) si α es el *ángulo de un cuarto de vuelta*, entonces:

$$sen\alpha = \frac{r}{r} = 1 \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{0}{r} = 0$$

iii) si α es el *ángulo de media vuelta*, entonces:

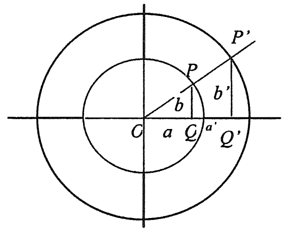
$$sen\alpha = \frac{0}{r} = 0 \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{-r}{r} = -1$$

iv) si α es el *ángulo de tres cuartos de vuelta*, entonces:

$$sen\alpha = \frac{-r}{r} = -1 \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = \frac{0}{r} = 0$$

OBSERVACIONES:

- Para un ángulo α dado, los valores de $sen\alpha$ y $\cos\alpha$ son independientes de la circunferencia (con centro en O) elegida.
- En efecto, sean dos circunferencias $C_1(O,r)$ y $C_2(O,r')$ con $r \neq r'$ y sea α un ángulo en su posición normal como se ilustra en la figura.



Puesto que los triángulos OPQ y $OP'Q'$ son semejantes, resulta:

$$\frac{\text{long } PQ}{\text{long } OP} = \frac{\text{long } P'Q'}{\text{long } OP'} \qquad \text{y} \qquad \frac{\text{long } OQ}{\text{long } OP} = \frac{\text{long } OQ'}{\text{long } OP'}$$

de donde $\quad sen\alpha = \dfrac{b}{r} = \dfrac{b'}{r'} \quad$ y $\quad \cos\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{a'}{r'}$

lo que prueba el enunciado.

De acuerdo a esto, se elige, salvo mención en contrario, para nuestros objetivos una circunferencia con centro en O y radio igual a 1.

A tal circunferencia, se la llama ***circunferencia trigonométrica***.

Para la circunferencia trigonométrica resulta:

$$sen\alpha = b \qquad \text{y} \qquad \cos\alpha = a$$

cualquiera sea el ángulo α (siendo $P(a,b)$ el punto de la circunferencia determinado por el lado final de α).

- De acuerdo a la correspondencia biunívoca entre ángulos y números reales ya indicada, es claro que si, por ejemplo, α es un ángulo recto generado en sentido positivo, se puede simbolizar indistintamente:

$\text{sen}\,90°$ o $sen\frac{\pi}{2}$ y análogamente

$\cos 90°$ o $\cos\frac{\pi}{2}$

puesto que 90° y $\frac{\pi}{2}$ son las medidas de α en los sistemas sexagesimal y radial, respectivamente.

Consecuentemente considerando, por ejemplo el sistema circular, se tiene:

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$sen\alpha$	0	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

➲ EJERCICIOS:

10- Construya un cuadro similar al recién realizado, considerando el sistema sexagesimal.

11- Dada la circunferencia de centro O y radio 3 determine, en cada caso, el punto en que el lado terminal del ángulo dado interseca a la misma.

i) $\alpha = 0$ iv) $\alpha = 2\pi$

ii) $\alpha = \pi$ v) $\alpha = 7\pi$

iii) $\alpha = -\pi$ vi) $\alpha = \frac{\pi}{4}$

12- Determine los valores de $sen\alpha$ y $\cos\alpha$ de un ángulo α cuyo lado final contiene al punto:

i) $P(-1,2)$ iv) $P(8,0)$

ii) $P(1,\sqrt{2})$ v) $P(0,3)$

iii) $P(3,0)$ vi) $P(-1,-1)$

13- Teniendo en cuenta la siguiente observación:

Si el punto $P(a,b)$ determinado por el lado final de ángulo α pertenece a un cuadrante, decimos que α es un ángulo de ese cuadrante y simbolizamos, respectivamente, $\alpha\in$Ic., $\alpha\in$IIc., $\alpha\in$IIIc. ó $\alpha\in$IVc,

a) complete el cuadro con los signos + o − según corresponda.

	Ic.	IIc.	IIIc.	IVc.
$sen\alpha$	+			
$\cos\alpha$	+			

b) determine el signo de:

i) $sen 45°$ iii) $sen 225°$ v) $sen(-\frac{1}{3}\pi)$

ii) $\cos 120°$ iv) $\cos\frac{9}{4}\pi$ vi) $sen\frac{9}{2}\pi$

14- Halle todos los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales:

i) $senx = 0$, iii) $senx = 1$, v) $senx = -1$

ii) $\cos x = 0$, iv) $\cos x = 1$, vi) $\cos x = -1$

Propiedades del seno y el coseno. Teorema:

Cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$, resulta:

i) ***Periodicidad del seno y del coseno***

$$\boxed{sen(x+2\pi) = senx \quad \text{y} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x}$$

ii) ***Acotación del seno y del coseno***

$$\boxed{-1 \le senx \le 1 \quad \text{y} \quad -1 \le \cos x \le 1}$$

iii) ***Relación Pitagórica***

$$\boxed{sen^2 x + \cos^2 x = 1}$$

iv) ***Imparidad del seno y paridad del coseno***

$$\boxed{sen(-x) = -senx \quad \text{y} \quad \cos(-x) = \cos x}$$

v) ***Relación entre el seno y el coseno de ángulos complementarios***

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x \text{ y } \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=senx$$

Nótese que $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ y x son ángulos complementarios pues $\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+x=\frac{\pi}{2}$.

vi) ***Relación entre el seno y el coseno de ángulos suplementarios***

$$\boxed{sen(\pi-x)=senx \quad y \quad \cos(\pi-x)=-\cos x}$$

Demostración:

i) Puesto que 2π es la medida del ángulo de una vuelta, se tiene que $x+2\pi$ y x son las medidas de dos ángulos que difieren en una vuelta (es decir de dos ángulos congruentes). Por tanto, los lados finales de ambos ángulos determinan el mismo punto P sobre la circunferencia y, por lo tanto:

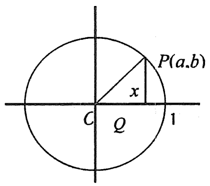
$$sen\ (x+2\pi)=senx \qquad y \qquad \cos\ (x+2\pi)=\cos x$$

ii) Cualquiera sea $P(a,b)\in C(0,1)$, se tiene:

$-1\leq b\leq 1$ y $-1\leq a\leq 1$

es decir:

$-1\leq senx\leq 1$ y $-1\leq \cos x\leq 1$



iii) En el triángulo rectángulo *OQP*, (fig. anterior), por el teorema de Pitágoras, es:

$a^2+b^2=1$

es decir: $(\cos x)^2+(senx)^2=1$

que se conviene en simbolizar: $\boxed{sen^2x+\cos^2 x=1}$

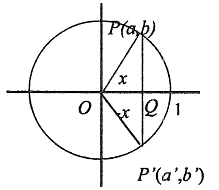
iv) Puesto que los triángulos *OPQ* y *OP'Q* son congruentes (¿por qué?), se tiene:

$b'=-b \quad y \quad a'=a$

es decir:

$sen(-x)=-senx$

y $\cos(-x)=\cos x$



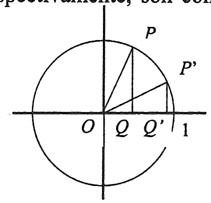
v) Si los ángulos $Q\hat{O}P$ y $Q'\hat{O}P'$ son complementarios, entonces los triángulos *OQP* y *OQ'P'*, rectángulos en *Q* y *Q'* respectivamente, son congruentes (¿por qué?).

Por lo tanto: long $P'Q'$ = long OQ

y

long OQ' = long PQ

es decir :



$$sen(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x \qquad y \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-x)=senx$$

vi) Queda propuesta como ejercicio.

✎ OBSERVACIONES:

- En las demostraciones anteriores hemos utilizado figuras auxiliares en las cuales se han considerado siempre ángulos del 1^er^ cuadrante. Sin embargo, los razonamientos empleados son independientes de tal suposición (Verifique considerando ángulos de distintos cuadrantes)
- A partir de la relación pitagórica ($sen^2x+\cos^2 x=1$), resulta:

  $sen^2x=1-\cos^2 x$ y $\cos^2 x=1-sen^2x$; de donde:

  (1) $senx=\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$, y

  (2) $\cos x=\pm\sqrt{1-sen^2x}$

  Utilizando estas relaciones y conociendo el cuadrante al que pertenece el ángulo, es posible obtener $senx$ si se conoce $\cos x$ y viceversa.

Ejemplos:

i) Si $\cos x=-\frac{3}{5}$, entonces, de (1), resulta $senx=\pm\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\pm\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}$

por lo cual:

$senx=\frac{4}{5}$, si el ángulo pertenece al IIc. ó $senx=-\frac{4}{5}$, si el ángulo pertenece al IIIc.

No existe otra posibilidad pues, como $\cos x<0$, el ángulo pertenece, al IIc. o al IIIc.

ii) Si $senx = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ y el ángulo pertenece al IIIc., de (2), resulta

$$\cos x = -\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

➲ EJERCICIOS:

15- Verifique las siguientes identidades:

i) $(1-senx)(1+senx) = \cos^2 x$

ii) $sen^2(x+4\pi) = 1-\cos^2 x$

16- Determine, sin utilizar calculadora, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $sen 7\pi = sen \pi$ iv) $\cos\pi = sen(-\frac{\pi}{2})$

ii) $sen 45° = \cos 45°$ v) $\cos(-30°) = sen 60°$

iii) $\cos 225° = sen(-135°)$ vi) $sen(-30°) = \cos 60°$

17- Obtenga $senx$, sabiendo que:

i) $\cos x = \frac{1}{3}$ y $0 < x < \frac{\pi}{2}$

ii) $\cos x = -\frac{1}{2}$ y $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

18- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) si $sen\alpha > 0$, entonces $\alpha \in$ Ic.

ii) si $\cos\alpha < 0$, entonces $\alpha \in$ Ic. ó $\alpha \in$IIIc.

iii) si $\alpha \in$IIc., entonces $sen\alpha > 0$

iv) $\alpha \in$IIc. ó $\alpha \in$IIIc.$\Rightarrow \cos\alpha < 0$

v) $\alpha \in$IIc. y $\cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

vi) $sen\alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha \in$Ic.$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{5}$

vii) $\alpha \in$IIc. ó $\alpha \in$IVc.$\Rightarrow sen\alpha.\cos\alpha > 0$

LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

A partir de $senx$ y $\cos x$, se definen:

- la ***tangente de x*** (tgx), por : $tgx = \frac{senx}{\cos x}$
- la ***cotangente de x*** (ctg x), por: $ctgx = \frac{\cos x}{senx}$
- la ***secante de x*** (sec x), por: $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
- la ***cosecante de x*** (cosec x), por: $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{senx}$,

donde, en cada caso, se consideran los $x \in$ R que no anulen el denominador del segundo miembro.

De estas definiciones es inmediato, por ejemplo, que:

i) $tg0 = \frac{sen0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

ii) $tg\frac{\pi}{2}$ no existe, pues $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

iii) cosec π, no existe, pues $sen\pi = 0$

iv) ctg $\frac{3}{2}\pi = \frac{\cos\frac{3}{2}\pi}{sen\frac{3}{2}\pi} = \frac{0}{-1} = 0$

v) $\sec 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = \frac{1}{1} = 1$

➲ EJERCICIOS:

19- Teniendo en cuenta las definiciones:

$$ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{sen\alpha}; \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{sen\alpha}$$

complete el siguiente cuadro con los signos + ó — según corresponda.

	Ic.	IIc.	IIIc.	IVc.
sen α				
cos α				
tg α				
ctg α				
sec α				
cosec α				

20- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) Si $senx \neq 0$, entonces dividir por $senx$ es equivalente a multiplicar por cosec$x$

ii) Si $tgx \neq 0$, entonces $tgx.\operatorname{ctg} x = 1$

iii) Si $tgx > 0$, entonces $senx > 0$ y $\cos x > 0$

21- Verifique:

i) $tgx = senx.\sec x$

ii) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x.\cos x$

iii) $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$

iv) $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$

v) $\cos x = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}$

22- Complete el cuadro:

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen α	0	1	0	-1	0
cos α	1	0	-1	0	1
tg α					
ctg α					
sec α					
cosec α					

23- Halle, si existen, los valores de $x \in \mathbf{R}$ para los cuales:

i) $tgx = 0$ iii) $\sec x = 0$

ii) $\operatorname{ctg} x = 0$ iv) $\operatorname{cosec} x = 0$

24- Complete:

i) Si $\cos x = -\dfrac{1}{2}$, entonces $\sec x = $...............................

ii) Si $tgx = 2$, entonces $\operatorname{ctg} x = $...............................

iii) Si $0 < tgx < 1$, entonces $\operatorname{ctg} x$ ....

iv) Si $\operatorname{cosec} x = \sqrt{2}$, entonces $senx = $..........................

v) Si $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{3}{4}$ y $\cos x = -\dfrac{3}{5}$, entonces $senx = $....................

25- Determine, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas siendo:

i) $senx = \dfrac{7}{25}$ y $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

ii) $tg\alpha = -1$ y $\alpha \in$ IIc.

iii) $\cos x = \dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

26- Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $tgx = \dfrac{1}{3} \Rightarrow senx = 1$ y $\cos x = 3$

ii) $senx = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow tgx = 1$

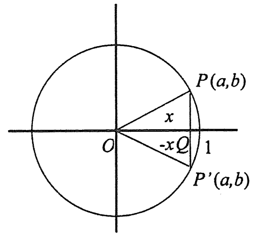
iii) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ y x ∈ IVc. $\Rightarrow tgx + \dfrac{1}{\cos x} = 1$

iv) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ y $x \in$ Ic. $\Rightarrow senx = 3\cos x - 1$

Seno, coseno y tangente de $x = \dfrac{\pi}{6}$

El triángulo OPP' de la figura es equilátero (¿por qué?), de donde:

long $\overline{PP'}$ = long $\overline{OP} = 1$



Además, como Q es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, se tiene:

- $sen\dfrac{\pi}{6} = b = \text{long } \overline{PQ} = \dfrac{1}{2}\text{long } \overline{PP'} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

y, consecuentemente:

- $tg\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{sen\dfrac{\pi}{6}}{\cos\dfrac{\pi}{6}} = \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

➲ EJERCICIOS:

27- i) Encuentre las razones trigonométricas de $x=\frac{\pi}{4}$ y $x=\frac{\pi}{3}$

ii) Complete el cuadro:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen\,x$	0	$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		
$tg\,x$					

28- Sin utilizar calculadora, obtenga x, si:

i) $x-3=tg\frac{\pi}{4}+4\cos^2\frac{\pi}{4}+3\sec^2(\frac{\pi}{6}+2\pi)$

ii) $x=3sen\frac{\pi}{2}+5tg\frac{\pi}{4}-2\cos 0$

iii) $x=9\,\mathrm{cosec}\frac{\pi}{2}-12sen\frac{\pi}{6}+\sec 0$

iv) $2x sen^2 45^\circ=\cos^2 30^\circ+\cos^2 60^\circ-tg^2 45^\circ$

v) $x=(tg 45^\circ+\mathrm{ctg}\,45^\circ)(sen 90^\circ\cos 45^\circ+\cos 0^\circ sen 45^\circ)$

29- Obtenga ω, sabiendo que:

i) $\omega\in$IIc. y $\cos\omega=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $sen\omega=-\frac{1}{2}$ y $\cos\omega>0$

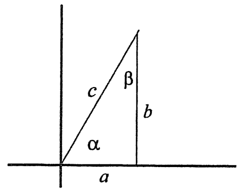
iii) $tg\omega=-1$ y $sen\omega<0$

30- Quitando la restricción de que ω sea menor que una vuelta. ¿Cuántas y cuáles son las soluciones de cada uno de los apartados del ejercicio anterior?

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Recordemos que para "resolver un triángulo rectángulo", es decir, para calcular las medidas de los lados y de los ángulos es necesario conocer, además del ángulo recto, al menos otros dos datos (uno de los cuales deberá ser siempre la longitud de uno de los lados).

Supongamos que fijado un sistema de coordenadas en el plano, representamos el triángulo en cuestión como se indica en la figura, es decir de modo que uno de sus ángulos agudos esté en su posición normal.



De las definiciones de seno, coseno y tangente de un ángulo, es claro que:

- $sen\alpha=\frac{\text{long. del cateto opuesto a }\alpha}{\text{long. de la hipotenusa}}=\frac{b}{c}$
- $\cos\alpha=\frac{\text{long. del cateto adyacente a }\alpha}{\text{long. de la hipotenusa}}=\frac{a}{c}$
- $tg\alpha=\frac{\text{long. del cateto opuesto a }\alpha}{\text{long. del cateto adyacente a }\alpha}=\frac{b}{a}$

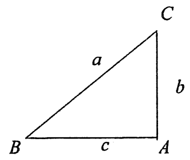
Teniendo en cuenta esto, el procedimiento general para la "resolución" de cualquier triángulo rectángulo es el siguiente:

- Si los datos son las medidas de un lado y un ángulo agudo, el restante ángulo agudo se obtiene inmediatamente pues es complementario del dado. Las longitudes de los otros dos lados se obtendrán planteando apropiadas razones trigonométricas que vinculen ambos datos con cada una de las incógnitas.
- Si los datos son las medidas de dos lados, la medida del tercero se obtiene por aplicación del teorema de Pitágoras y, para obtener los dos ángulos agudos, se procede análogamente al caso anterior, planteando razones trigonométricas que vinculen ambos datos con dichos ángulos.

Ejemplos:

Resuelva los siguientes triángulos rectángulos (con A, B y C indicamos, indistintamente, los vértices y sus ángulos correspondientes y con a, b y c las longitudes de los respectivos lados opuestos):

Datos $\begin{cases} c = 48 \\ C = \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$



Solución:

Cálculo de B: $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Cálculo de *a*: $senC = \frac{c}{a} = \frac{48}{a} \Rightarrow a = \frac{48}{senC}$

es decir $a = \frac{48}{sen\frac{\pi}{6}} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96$

Cálculo de *b*: $tgC = \frac{c}{b} = \frac{48}{b} \Rightarrow b = \frac{48}{tgC}$

es decir $b = \frac{48}{tg\frac{\pi}{6}} = \frac{48}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 48\sqrt{3}$

➲ EJERCICIOS:

31- Resuelva el triángulo ABC, recto en A, si:

i) $c = 3$, $a = 5$ iii) $B = 45°$, $a = 13{,}2$

ii) $B = 30°$, $b = 2$ iv) $c = 8$, $b = 4$

32- Calcule la longitud de la altura de un triángulo equilátero de 24cm de lado.

33- Los lados de un paralelogramo miden 22cm y 40cm, respectivamente. Calcule la superficie del mismo sabiendo que uno de sus ángulos mide $\frac{\pi}{6}$.

34- Un edificio proyecta una sombra de 43m cuando el sol se encuentra a 45° sobre el horizonte. Calcule la altura del edificio.

35- Teniendo como eje central un árbol de una plazoleta, se intenta construir un gran árbol navideño. Para ello, se atan al extremo superior del árbol 6 sogas que se sujetan a estacas ubicadas a 3m del pie del mismo. Se desea saber la longitud de cada soga (sin contar lo que se utiliza en atarlas al árbol o a la estaca), sabiendo que cada una forma con el suelo un ángulo de 60°.

36- La dirección de un avión al despegar, forma con la pista un ángulo de 13°. ¿A qué altura se encuentra luego de haber recorrido 10km en esa dirección?

37- ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 35m proyecta una sombra de 20m?

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE SUMA O DIFERENCIA DE ÁNGULOS

Se aceptará sin demostrar la siguiente propiedad, válida cualesquiera sean $x, y \in \mathbf{R}$.

(1) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - senxseny$ ("coseno de la suma")

A partir de ésta, se deducen otras importantes propiedades que tienen numerosas aplicaciones. Tales son:

(2) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + senxseny$ ("coseno de la diferencia")

(3) $sen(x+y) = senx\cos y + \cos xseny$ ("seno de la suma")

(4) $sen(x-y) = senx\cos y - \cos xseny$ ("seno de la diferencia")

(5) $tg(x+y) = \dfrac{tgx + tgy}{1 - tgxtgy}$ ("tangente de la suma")

(6) $tg(x-y) = \dfrac{tgx - tgy}{1 + tgxtgy}$ ("tangente de la diferencia")

✎ OBSERVACIÓN:

(5) y (6) son válidos sólo si en cada una de ellas ambos miembros están definidos.

Las fórmulas enunciadas permiten obtener los valores exactos de las razones trigonométricas de ángulos que pueden escribirse como suma o diferencia de ángulos cuyas razones sean conocidas.

Por ejemplo:

i) $sen15^\circ = sen(60^\circ - 45^\circ) = sen60^\circ \cos 45^\circ - sen45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} =$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ii) $tg75^\circ = tg(45^\circ + 30^\circ) = \frac{tg45^\circ + tg30^\circ}{1 - tg45^\circ tg30^\circ} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

A partir de (1), (2) y (5), tomando $y = x$, se deducen, respectivamente, las fórmulas para el ángulo doble:

(7) $$\boxed{\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x}$$
("coseno del ángulo doble")

(8) $$\boxed{sen2x = 2senx \cos x}$$
("seno del ángulo doble")

(9) $$\boxed{tg2x = \frac{2tgx}{1 - tg^2 x}}$$
("tangente del ángulo doble")

En efecto, por ejemplo, para (7), se tiene:

$$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cos x - senxsenx = \cos^2 x - sen^2 x$$

Las demostraciones de (8) y (9) son totalmente análogas y se proponen como ejercicio.

➲ EJERCICIOS:

38- Sin utilizar calculadora, obtenga:

i) $sen\ 75^\circ$

ii) $\cos 105^\circ$

iii) $\cos 75^\circ$

iv) $ctg\ 75^\circ$

39- Determine $sen(\alpha+\beta)$ y $sen(\alpha-\beta)$ si:

i) $sen\alpha = \frac{3}{5}$, $sen\beta = \frac{3}{10}$ y $\alpha,\beta \in$ Ic.

ii) $tg\alpha = -\frac{3}{5}$, $sen\beta = \frac{1}{2}$ $\alpha \in$ IIc. y $\beta \in$ Ic.

40- Pruebe:

i) $\frac{sen2x}{tg2x} = \cos^2 x - sen^2 x$

ii) $(senx + \cos x)^2 = 1 + sen2x$

iii) $sen(x+y).sen(x-y) = sen^2 x - sen^2 y$

iv) $\frac{sen\,2x}{sen\,x} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \sec x$

v) $\frac{\cos(x-y)}{\cos x.sen\,y} = tg\,x + ctg\,y$

AUTOEVALUACIÓN 9

1. La ecuación $R = \dfrac{1}{\omega.C(tg\theta + tg\phi)}$ se presenta en la teoría de corrientes alternas.

   Muestre que esta ecuación es equivalente a: $R = \dfrac{\cos\theta.\cos\phi}{\omega.Csen(\theta+\phi)}$

2. Calcule el área de un trapecio isósceles sabiendo que sus bases son de 12m y 18m, respectivamente, y que el lado oblicuo determina con la base menor un ángulo $\alpha = 102°30'$

3. Pruebe $\cos\beta = \sec\beta - tg\beta.sen\beta$

4. Sin utilizar la calculadora, obtenga:

$$x = \frac{sen75° + \cos 390°}{sen(-30°) + 2\cos 15°}$$

5. Determine el valor de $sen2\alpha$ sabiendo que $sen\alpha = \frac{4}{5}$ y $\cos\alpha > 0$

6. Calcule $\cos\theta$, sabiendo que:

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \text{ y } \cos\theta < 0$$

7. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son de 30° y la altura es 15m. Obtenga la longitud de la base.

8. a) Si $\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\text{sen}\,\beta = \frac{3}{10}$ y $\alpha, \beta \in \text{IC}$, determine el valor de $\text{sen}(\alpha+\beta)$ y $\tan 2\alpha$.

   b) Si $\text{sen}\,\alpha = -\frac{4}{5}$ con $\alpha \in \text{IIIC}$ y $\sec\beta = \frac{5}{3}$ con $\beta \in \text{IC}$, determine el valor de $\tan(\alpha+\beta)$ y $\cos\frac{\alpha}{2}$.

   c) Si $\tan\alpha = -\frac{3}{5}$ con $\alpha \in \text{IIC}$ y $\text{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$ con $\beta \in \text{IC}$, determine el valor de $\cos(\alpha-\beta)$.

Un momento para la distracción.....

Una "travesura" de Gauss

Estando en la escuela, cuando tenía 11 años, Gauss y sus compañeros recibieron de su maestro la tarea de sumar los primeros cien números naturales, es decir:

$$1+2+3+4+\text{..........}+98+99+100 = ?$$

Mientras sus compañeros estaban en el arduo trabajo de sumar número tras número, Gauss descubrió una interesante simetría en esta suma. Por conmutatividad, es lo mismo sumar todos los números en orden creciente que hacerlo por los extremos (el primero con el último, más el segundo con el anteúltimo, etc.):

$$(1+100)+(2+99)+(3+98)+\text{........} = ?$$

Cada uno de los paréntesis suma 101. Al haber 100 números, deben formarse 50 paréntesis:

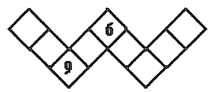
$$1+2+3+\text{.......}+98+99+100 = 50.101 = 5050$$

A los pocos minutos, Gauss entregó el resultado a su azorado profesor......

- Calculen la suma de los primeros 200 números naturales y la de los primeros 10000.
- ¿Cuánto será la suma de los primeros n números naturales?

Ubicando números

Hay que escribir los números del 1 al 9, uno en cada casilla y sin repeticiones, de modo que la suma de los tres números de cada una de las 4 líneas sea la misma. Ya se escribieron el 6 y el 9. Ubicar los demás números.



CAPÍTULO 10 – EL PLANO COMPLEJO. FORMA TRIGONOMETRÍCA Y POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En este capítulo se verá cómo se pueden representar geométricamente los números complejos, así como también otras formas de presentarlos que entre otras cosas nos servirán para calcular raíces de índice mayor que dos.

EL PLANO COMPLEJO

Otra forma de presentar los números complejos

Los números complejos pueden ser definidos como el conjunto de pares ordenados (a,b) de números reales donde a es la parte o componente real y b es la parte o componente imaginaria. Con ellos se definen:

- **Igualdad**: $(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$
- **Suma**: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- **Producto**: $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Según esta definición se establece una correspondencia biunívoca entre los pares $(a,0)$ y los números reales a. Entonces **R** se identifica con un subconjunto $\mathbf{C}^*$ de **C** y esta correspondencia se establece también, entre sumas en **R** y sumas en $\mathbf{C}^*$ y entre productos en **R** y productos en $\mathbf{C}^*$.

$$\begin{array}{ccccc}(a,0)&+&(c,0)&=&(a+c,0)\\ \updownarrow&&\updownarrow&&\updownarrow\\ a&+&c&=&a+c\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccc}(a,0)&\times&(c,0)&=&(ac,0)\\ \updownarrow&&\updownarrow&&\updownarrow\\ a&\times&c&=&a\times c\end{array}$$

La unidad imaginaria se define por: $i=(0,1)$, que verifica

$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

Por otra parte: $\quad(b,0)\times(0,1)=(0,b)=bi$

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

$$\boxed{(a,b)=a+bi}$$

Esta última igualdad muestra la equivalencia entre las dos formas de expresión de un número complejo, como **par ordenado**: (a,b) y en **forma binómica**: $a+bi$.

OBSERVACIÓN:

Todavía no hemos definido ninguna relación de la forma $z<w$ con $z,w\in\mathbf{C}$, ya que es **imposible** dar una relación de orden para los números complejos a diferencia de los números reales como lo hicimos en el capítulo 6.

Para justificar esto, supongamos que fuese posible definir una relación "<" como lo hicimos con los números reales. Como $i\neq 0$, entonces $i<0$ ó $0<i$.

Supongamos que $0<i$, entonces $0\cdot i<i\cdot i$, es decir $0<i^2=-1$ lo cual es un absurdo. Análogamente, si suponemos $i<0$.

Por lo tanto, el cuerpo de los números complejos **C** no puede ser ordenado.

Representación geométrica de los números complejos

Sabemos que fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, se establece naturalmente una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales.

Esta correspondencia es adecuada para representar los números complejos, atendiendo a que cada $z=a+bi$ es un par ordenado de números reales. Entonces cada z se corresponde con un punto P del plano y recíprocamente

$$\boxed{P\leftrightarrow z=a+bi}$$

P recibe el nombre de **afijo** de z.

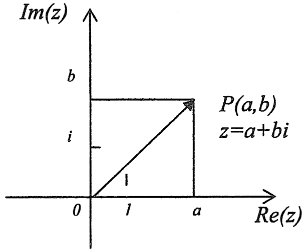
En virtud de esta correspondencia biunívoca entre puntos y números complejos se identifica **C** con el plano que por este motivo se llama ***plano complejo.***

En este plano:

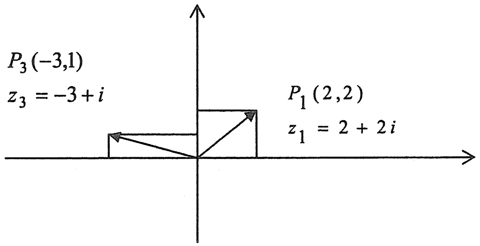
- El eje de abscisas se llama **eje real** (*Re(z)*) y en él se presentan todos los números reales, es decir los complejos $z=a+0i=(a,0)$

- El eje de ordenadas se llama **eje imaginario** (*Im(z)*) y sus puntos representan los números imaginarios puros $z=0+bi=(0,b)$. Además a cada complejo z le corresponde un vector $\overline{0P}$ de origen 0 y extremo el afijo P de z, de modo que:

$$\boxed{z=a+bi \leftrightarrow P \leftrightarrow \overline{0P}.}$$



Ejemplo:



➲ EJERCICIOS:

1- Represente los afijos y vectores correspondientes a los complejos:

$(1,3)$; $-2-4i$; i^7; $-5i$

2- Indique a que cuadrante pertenece cada uno de los siguientes complejos:

$z_1=3-2i$; $z_2=-2\sqrt{3}-5i^2+i$; $z_3=(1-2i).(i-\sqrt{5})$

3- Para $z_1=4-i$; $z_2=2+3i$ represente gráficamente:

a) z_1+z_2 c) $\overline{z_2}$

b) $-z_1$ d) z_1-z_2

4- Represente los siguientes conjuntos del plano complejo

a) $A=\{z\,/\,|\mathrm{Re}\,(z)|\leq 2;|\mathrm{Im}\,(z)|\leq 3\}$

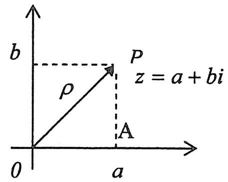
b) $B=\{z\,/\,1\leq \mathrm{Re}(z)\leq 4\,;\,\mathrm{Im}\,z=2\}$

c) Determine si $z_1=\sqrt{2}-\frac{7}{5}i\in A$ y si $z_2=\left(\frac{5}{2}-2i\right)^2\in B$. Justifique.

Módulo y argumento de un número complejo

Se llama **módulo** del complejo $z=a+bi$ al número real no negativo, igual a la longitud del vector $\overline{0P}$ asociado a z.

Para indicar módulo de z se usará $|z|$ o bien se empleará la letra griega ρ.



De la observación del triángulo *0PA* es sencillo comprobar, utilizando el teorema de Pitágoras, que: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

Ejemplo:

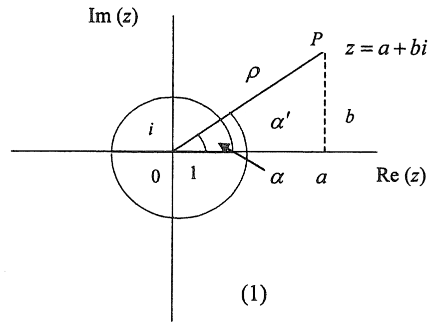
Si $z=2+5i$ entonces $|z|=\sqrt{29}$

➲ EJERCICIO:

5- a) Dado $z=a+bi$ represente: z ; $-z$; $\bar{z}$; $-\bar{z}$; y verifique: $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$

b) Pruebe: $|z|^2=z.\bar{z}$

Se llama **argumento** del número complejo z al ángulo α que forma la dirección positiva del eje *Re(z)* con el vector asociado a z.



(1)

↬ OBSERVACIONES:

- El argumento de un complejo $z \neq 0$ no está unívocamente determinado, ya que puede variar en un múltiplo de 2π radianes.
- El complejo nulo $z = 0$ no posee argumento.

Si α y α' son dos argumentos de z, entonces $\alpha - \alpha' = 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}_0$;

$$\boxed{\alpha' = \alpha + 2\pi k \ ; \ k \in Z}$$

En lo que sigue se adoptará, salvo mención en contrario, el llamado **argumento principal** de z que se define como el ángulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$.

$$\boxed{\alpha = \arg z \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < 2\pi}$$

La razón $tg\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ (siempre que $a \neq 0$), permite calcular α

Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Si $a = 0$ y $b < 0$, entonces $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$

En el triángulo de la figura (1) se puede notar que:

$a = \rho.\cos\,\alpha$ $\qquad$ $b = \rho.\text{sen}\,\alpha$ $\qquad$ y por lo tanto

$$\boxed{z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}$$

Ésta expresión recibe el nombre de **forma trigonométrica** del complejo z.

Ejemplos:

Para escribir la forma trigonométrica de

1) $z = -2 + 2i$ calculamos $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ y su argumento α por la relación

$tg\ \alpha\ = \dfrac{-2}{2} = -1$ de modo que $\alpha\ = 135°$.

Así: $z = 2\sqrt{2}$ (cos 135° + i sen 135°)

2) $z = -2i$, como su módulo es 2 y su argumento es $\alpha\ = 270°$ resulta

$z = 2$ (cos 270° + i sen 270°)

Para el complejo $z = a + bi = \rho\,(\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$, se puede adoptar también otra expresión llamada **forma polar** de z que se indica:

$$\boxed{z = \rho_\alpha}$$

ρ y α se llaman las **coordenadas polares** de z.

Ejemplos:

a) La forma polar de $z = -2 + 2i$ es $z = 2\sqrt{2}_{135°}$

b) La forma polar de $z = -3$ es $z = 3_\pi$

Hemos visto como determinar la forma polar de z cuando éste está expresado en forma binómica. Interesa el caso recíproco, esto es, hallar la forma binómica de z cuando éste está expresado en forma polar.

Por ejemplo si $z = 2_{\frac{\pi}{4}}$, dado que $\rho = 2$ y $\arg\ z = \dfrac{\pi}{4}$; se tiene

$a = 2\ \cos\ \dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\ b = 2\ \text{sen}\ \dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; luego $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

En el cuadro siguiente se muestran las **formas de pasaje** de una a otra forma.

$z = a + bi$ $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $tg\ \alpha = \dfrac{b}{a} \qquad a \neq 0$ $\therefore z = \rho_\alpha$	$z = \rho_\alpha$ $a = \rho\cos\,\alpha$ $b = \rho\ \text{sen}\,\alpha$ $\therefore z = \rho\ (\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$

➲ EJERCICIOS:

6- Escriba en forma polar los complejos z:

$1 + i$; $\qquad$ 5; $\qquad$ -2; $\qquad$ $-i$

7- Escriba en forma binómica los complejos $3_{\frac{\pi}{6}}$; $\ 1_{\frac{\pi}{2}}$; $\ \left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2$

8- Represente los conjuntos del plano complejo:

$A = \{z / 1 < |z| \leq 2\}$

$B = \{z / \arg z = 45°\}$

$C = \left\{ z / 1 \le |z| < 2;\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{4} \right\}$

9- Represente:

$z_1 = 3(\cos 45° + i\ \text{sen}\, 45°)$

$z_2 = 3(\cos 405° + i\ \text{sen}\, 405°)$

¿cómo son los afijos de z_1 y z_2?

Igualdad de complejos expresados en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1_{\alpha_1}}$ y $z_2 = \rho_{2_{\alpha_2}}$ se define:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Producto y cociente de complejos en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1_{\alpha_1}}$ y $z_2 = \rho_{2_{\alpha_2}}$ se define:

1) $\boxed{z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2\,_{(\alpha_1+\alpha_2)}}$ 2) $\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\alpha_1-\alpha_2}}$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 2_{\frac{\pi}{2}}$ y $z_2 = 5_{\frac{\pi}{4}}$, entonces:

a) $z_1.z_2 = 10_{\frac{3}{4}\pi}$ b) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{5}\right)_{\frac{\pi}{4}}$

Potencia entera de un número complejo

Dado $z = \rho_\alpha$ y $n \in \mathbf{Z}$ se puede demostrar que

$$\boxed{z^n = \rho^n{}_{n\alpha}}$$

Esta expresión de la potencia se conoce con el nombre de fórmula de De Moivre (matemático inglés 1667-1754)

Ejemplo:

Si $z = 1_{\frac{\pi}{6}}$ entonces, $z^9 = 1_{9.\frac{\pi}{6}} = 1_{\frac{3}{2}\pi}$

➲ EJERCICIO:

10- Para $z_1 = 1 + i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$; $z_3 = 2_{\frac{\pi}{4}}$; $z_4 = 2_{60°}$, calcule en forma polar:

a) $(z_1.z_2)z_3$ b) $\frac{z_2}{z_4}$ c) z_3^{-1} d) z_1^8

Raíces enésimas de un número complejo

Dado un complejo $z = a + bi$, se llama **raíz de índice *n*** (enésima) a toda solución de la ecuación $x^n = a + bi$. Se indica $x = \sqrt[n]{a + bi}$.

Expresado *z* en su forma polar $z = \rho_\alpha$ es posible obtener las soluciones de manera simple.

Antes de dar una expresión general, veamos un ejemplo:

Dado $z = 8_{60°}$, queremos hallar $x = \sqrt[3]{8_{60°}}$.

Suponemos: $x = \gamma_\theta$, entonces debe verificar: $\gamma^3_{3\theta} = 8_{60°}$

Pero: $\gamma^3_{3\theta} = 8_{60°} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^3 = 8 \\ 3\theta = 60° + k.360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \sqrt[3]{8} \\ \theta = \dfrac{60° + k.360°}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \theta = 20° + k.120° \end{cases}$

Entonces: $\boxed{x = 2_{20°+k.120°} \text{ donde } k \in \mathbf{Z}}$

Se podría pensar que para cada valor de *k* hay una solución distinta. Sin embargo, se puede observar que variando *k* en los enteros se obtienen tres argumentos distintos entre 0° y 360°, siendo los restantes congruentes con ellos. De modo que es suficiente tomar tres valores sucesivos para *k* (resulta conveniente tomar para *k* los valores 0; 1 y 2) para obtener las tres soluciones distintas de $x^3 = 8_{60°}$.

$k = 0 \longrightarrow x_0 = 2_{20°}$

$k = 1 \longrightarrow x_1 = 2_{140°}$

$k = 2 \longrightarrow x_2 = 2_{260°}$

$k=3 \longrightarrow x_3 = 2_{380°} = x_0$

$k=4 \longrightarrow x_4 = 2_{500°} = x_1$

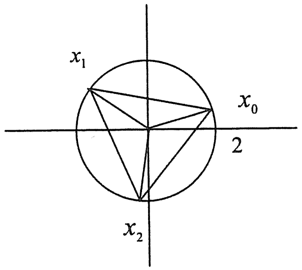
$k=5 \longrightarrow x_5 = 2_{620°} = x_2$

$k=-1 \longrightarrow x_{-1} = 2_{-100°} = x_2$

Podríamos seguir asignando valores a *k*, pero siempre obtendremos complejos x de módulo 2 y argumentos congruentes con $\alpha = 20°$ o con $\alpha = 140°$ o con $\alpha = 260°$

↳ OBSERVACIÓN:

La representación de los afijos de x_0, x_1 y x_2, muestra que son los vértices de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Todo lo expuesto para el ejemplo proporciona los lineamientos para probar el siguiente **teorema**, que generaliza el resultado, y cuya demostración se deja como ejercicio.

Todo complejo $z = |z|_\alpha$ tiene exactamente n raíces enésimas dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_{\frac{\alpha}{n}+\frac{2\pi}{n}k} \quad ; \quad k = 0,1,\ldots,n-1 \quad (*)$$

↳ OBSERVACIÓN:

Todas las raíces enésimas tienen igual módulo: $\sqrt[n]{|z|}$ y sus argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo tanto, los afijos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

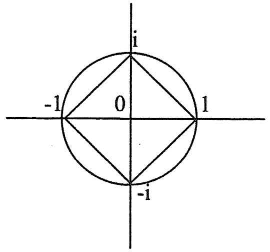
A continuación se verá otro ejemplo:

Calcule las raíces cuartas de la unidad.

Se trata de hallar $\sqrt[4]{1_{0°}}$.

La aplicación de (*) da:

$\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{2\pi}{4}k} = 1_{\frac{\pi}{2}k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$



entonces para:

$k=0 \longrightarrow x_0 = 1$

$k=1 \longrightarrow x_1 = 1_{\frac{\pi}{2}} = i$

$k=2 \longrightarrow x_2 = 1_{\pi} = -1$

$k=3 \longrightarrow x_3 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i$

➲ EJERCICIOS:

11- Calcule:

a) $\sqrt[3]{i}$ d) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

b) $\sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt[4]{-16}$ f) $\sqrt[5]{1+i}$

12- Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 0$

b) $x^2 - (2+i)x + (1+i) = 0$

c) $x^2 + x(4+3i) + (1+5i) = 0$

13- Calcule las raíces cúbicas de 1. Sean éstas: $x_0 = 1$, x_1 y x_2. Pruebe que x_1 y x_2 son conjugadas y verifican, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

✐ AUTOEVALUACIÓN N°10

1. Calcule z^{-5} para $z=1-i$
2. Represente gráficamente los siguientes números complejos

   a) $z_1=\dfrac{1+i}{1-i}$

   b) $z_2=2.(1+i)+3.(2-i)$

   c) $z_3=6.i^{10}$
3. Sabiendo que una de las raíces quintas de un número $z\in\mathbb{C}$ es $1-\sqrt{3}i$, halle las restantes raíces quintas. ¿Cuál es z?
4. Resuelva la ecuación $z^5+32i=0$
5. Sea $z=(1+\sqrt{3}i)^n$ con $n\in\mathbb{N}$. Encuentre $n\in\mathbb{N}$ tal que $z\in\mathbb{R}^+$.
6. ¿Puede un número complejo no real tener alguna raíz enésima real? Justifique.
7. Pruebe que el producto, el cociente y potencia entera de raíces enésimas de la unidad son también raíces enésimas de la unidad.
8. a) Represente gráficamente los siguientes conjuntos:

   $A=\{z\in C/2\le|\mathrm{Re}(z)|\le 5\ ,\ -4\le \mathrm{Im}(z)\le 3\}$

   $B=\{z\in C/\ |\mathrm{Re}(z)|\le 2;\ -4\le \mathrm{Im}(z)\le 3\}$

   $C=\left\{z\in C/2\le|z|\le 5{,}0\le \arg z\le\dfrac{\pi}{6}\right\}$

   $D=\left\{z\in \mathrm{C}:\mathrm{Im}(z)\le 2,\ |z|>1,\ \dfrac{\pi}{4}\le\arg(z)\le\pi\right\}$

   Dé en cada uno de los casos un elemento que pertenezca y uno que no pertenezca al conjunto indicado.

b) $¿z=\dfrac{(2-i)^2}{1+i}\in A$?, y $¿z\in B$?

🕘 *Un momento para la distracción.....*

Los socios desconfiados...

Tres socios comparten una caja fuerte, pero no se fían mucho unos de otros. Quieren poner varias cerraduras y repartir las llaves de tal modo que uno sólo no pueda abrir la caja, pero dos cualesquiera de ellos sí puedan hacerlo.

¿Cuántas cerraduras deberán poner y cómo deben distribuir las llaves?

¿Y si fueran cuatro socios?

Jaimito, generoso...

Jaimito sale de su casa con un montón de bolitas y vuelve sin ninguna. Su madre le pregunta qué ha hecho con ellas:

- *A cada amigo con que me encontré le di la mitad de las bolitas que tenía más una.*
- *¿Con cuántos amigos te encontraste?*
- *Con seis*

¿Podrías decir con cuántas bolitas salió Jaimito de su casa?

Números mágicos....

- Escoge un número de tres cifras y forma otro repitiendo el primero. Por ejemplo: 234234.
- Divide este número entre 7; después entre 13 y, por último, entre 11.
- ¡Has obtenido el número inicial!

Explicar por qué.

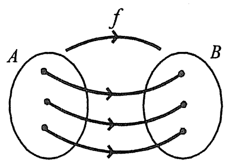
CAPÍTULO 11 – FUNCIONES

Uno de los conceptos más importantes de la Matemática es el de ***función***. Durante mucho tiempo este concepto se utilizó sin precisarlo en forma rigurosa. Recién en el siglo XIX el matemático francés Dirichlet (1805-1859) lo define como actualmente se conoce.

Si A y B son conjuntos no vacíos y f es una ley que **a cada** elemento de A le hace corresponder **un único** elemento de B, decimos que la terna: (A, B, f) es una **función de A en B**. Se simboliza f: A → B.   A los conjuntos A y B se los denomina respectivamente **dominio** (D_f) y **codominio** (C_f) de la función.

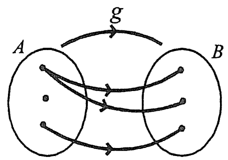
Ejemplos:

i)



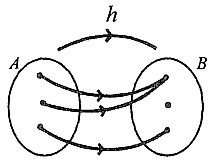
(A,B,f) es función.

ii)



(A,B,g) no es función.

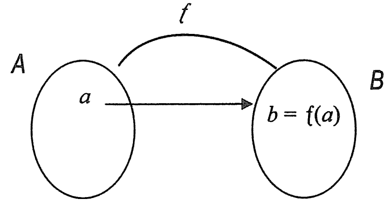
iii)



(A,B,h) es función.

A continuación se dan otras definiciones y notaciones que serán de uso común en todo lo que sigue.

- Dada una función f: A → B, se dice que $b \in$ B es la **imagen** de $a \in$ A (o que ***a* es una preimagen de *b***) y lo simbolizamos $b = f(a)$, si b es el correspondiente de a por la ley f.
  (La imagen de cada elemento del dominio es **única** por definición de función; mientras que un elemento del codominio puede tener más de una preimagen)



- Al conjunto de todas las imágenes $f(a)$, con a en A se lo llama **conjunto imagen** (o **contradominio**) de la función y se lo indica Im_f.
  En símbolos $Im_f = \{f(a)\colon\ a \in A\}$

Igualdad de funciones

Se dice que las funciones $f\colon A \to B$ y $g: C \to D$, son **iguales** si se verifican las siguientes tres condiciones:

$$\begin{cases} A = C \\ B = D \\ f(a) = g(a) \quad \forall a \in A \end{cases}$$

Ejemplos:

i) Las funciones: $f: \mathbf{R}^{*} \to \mathbf{R} /\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-2}$ y $g: \mathbf{R}^{*} \to \mathbf{R} / g(x) = x + 2$

son iguales pues:

- tienen el mismo dominio ($\mathbf{R}^{*}$)
- tiene el mismo codominio (**R**)
- $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x-2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2 = g(x)$

ii) En cambio, las funciones:

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,f(x)=2x$ y $g:\mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}\,/\,g(x)=2x$

no son iguales pues tienen distinto dominio.

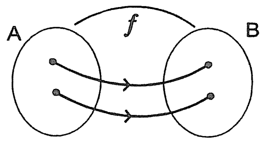
Funciones inyectivas

Una función f: $A\to B$ es **inyectiva** si dados dos elementos distintos de A, sus imágenes resultan distintas. En símbolos:

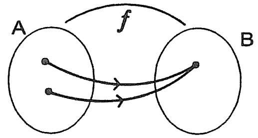
$$\forall x, y \in A,\quad x\neq y \Rightarrow f(x)\neq f(y)$$

Ejemplos:

i)



f es inyectiva



f no es inyectiva

ii) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,f(x)=2x$

Es inyectiva pues: $x_1\neq x_2 \Rightarrow 2\,x_1\neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

iii) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\,/\,f(x)=x^2$

no es inyectiva pues, por ejemplo $-2\neq 2$, pero $(-2)^2=2^2$

➲ EJERCICIOS:

1- Dados los conjuntos $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B=\{a, b, c, d, e\}$ determine, en cada caso, si (A,B,f) es una función para la ley f que asigna:

i) la letra b a todo número par de A.

ii) la letra a cada número impar y la letra b a cada número par.

iii) las letras b y c al número 1 y la letra d a los restantes elementos de A.

En los casos que corresponda obtenga Im_f y las preimágenes de cada elemento de Im_f

2- Dada $f: A\to B$, donde $A=[0,1]$; $B=[0,2]$ y $f(x)=x^2$.

i) ¿Cuál es la imagen de $\frac{1}{2}$? ¿ y de $\frac{\sqrt{2}}{10}$?

ii) ¿ $\sqrt{2}$ tiene preimagen?, ¿y 0?

iii) ¿Cuál es el contradominio de la función?

3- Pruebe que la función $f: A\to B$, donde:

$A=\{x\in Z\,/\,x^2-4=0\}$; $B=\{-8,-6, 0, 6, 8\}$ y $f(x)=x^3$

es inyectiva.

Funciones Reales de Variable Real

En lo que sigue se estudian funciones $f: A\to B$ donde A y B son subconjuntos de números reales. Estas funciones reciben el nombre de **funciones reales de una variable real** (o, simplemente, **funciones reales**)

En estos casos, la ley se da, generalmente, por una o más fórmulas que expresan la relación que existe entre los elementos del dominio (que se suelen denominar **variables independientes**) y los del codominio (**variables dependientes**), a los que es común simbolizar con las letras x e y, respectivamente.

Por ejemplo, son funciones reales:

- $f:(0,1)\to\mathbf{R}\,/\,f(x)=x^2$
- $l:[5,10]\to\mathbf{R}\,/\,l(x)=\begin{cases}x^3+2 & \text{si } 5\le x<7\\ \sqrt{x} & \text{si } 7\le x\le 10\end{cases}$

De ahora en adelante, salvo expresa mención en contrario, para dar una función sólo se explicitará la ley f, conviniendo en aceptar que su dominio (D_f) será el conjunto de todos los números reales x tales que existe $f(x)$ y, su codominio (C_f), será $\mathbf{R}$.

En símbolos $\quad D_f=\{x\in\mathbf{R}: f(x) \text{ existe}\}$; $C_f=\mathbf{R}$

Ejemplos:

i) Dada $f(x)=\dfrac{2}{x(x-1)}$, se tiene:

$D_f=\mathbf{R}-\{0, 1\}$ y $C_f=\mathbf{R}$.

ii) Análogamente, para las funciones:

$f(x)=\sqrt{-x+6}$;

$g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{-x+6}}$;

$h(x)=x^2+8$;

$i(x)=3x-2$;

se tiene:

$D_f=\{x/-x+6\geq 0\}=(-\infty,6]$

$D_g=\{x/-x+6>0\}=(-\infty,6)$

$D_h=\mathbf{R}$

$D_i=\mathbf{R}$

y, en todos los casos, el codominio correspondiente es $\mathbb{R}$.

➲ EJERCICIOS:

4- a) Un rectángulo tiene área 10. Exprese el perímetro en función de la longitud de uno de sus lados, ¿cuál es el dominio de esta función?

b) Un recipiente rectangular de almacenamiento, sin tapa, tiene 10 m^3 de volumen. La longitud de su base es el doble del ancho. El material de la base cuesta \$10 por metro cuadrado, y el de los lados, \$6 por metro cuadrado. Exprese el costo de los materiales en función del ancho de la base e indicar su dominio.

c) Una caja rectangular sin tapa, de 2 m^3 de volumen, tiene base cuadrada. Exprese el área de la superficie de la caja en función de la longitud de uno de los lados de su base e indicar su dominio.

5- Encuentre el dominio de cada una de las siguientes funciones:

i) $f(x)=x^2-4$

ii) $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

iii) $h(x)=\dfrac{1}{x^2+4}$

iv) $k(x)=\dfrac{1}{5-\sqrt{x}}$

v) $l(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

vi) $t(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$

6- Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & si\ x\leq 1\\ x^2 & si\ x>1\end{cases}$$

i) obtenga: f(0), f(1) y f(5).

ii) determine, si existen, las preimágenes de 0, 1 y –5

7- Sea la función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, donde

$$x\to g(x)=|x+5|+|x-2|,$$

a) Calcule $g(0)$, $g(1)$, $g(4)$, $g(-5)$, $g(t+2)$, $g(x-1)$.

b) ¿Existe $a\in\mathbb{R}$ tales que $g(a)=0$?

8- Se llama función **polinómica** a toda función:

p: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que:

$p(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_o$

donde: $a_i\in\mathbb{R}$ $\forall$ i = 0, …, n y $n\in\mathbb{N}_0$

Dada la función polinómica $p(x)=x^2-5x+6$

i) calcule: p (-1) y p (2)

ii) obtenga x / p(x) = 0

iii) a partir de la descomposición factorial de p, determine los intervalos para los cuales

- $p(x)>0$
- $p(x)<0$

9- Sea $f(x)=x^2-2x+1$, obtenga:

i) f(0)

ii) f(-2)

iii) $f(x+1)$

iv) $f(x+h)$

v) $\{x\in R\ /\ f(x)=f(2x)\}$

vi) $\{x\in R\ /\ f(x)>f(x-1)\}$

10- Se llama **función racional** a toda función que es cociente de funciones polinómicas. Por ejemplo:

- $r(x)=\dfrac{3x^2+6x}{x^2-2}$
- $q(x)=\dfrac{x^3-5x+3}{2x^2+1}$

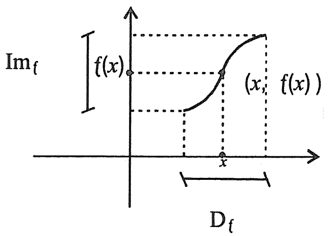
son funciones racionales. ¿Cuál es el dominio de una función racional $r(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$?

Gráfica de Funciones

Fijado en el plano un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal, se llama **gráfica** (o **gráfico**) de una función f a la representación gráfica del conjunto:

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

conviniendo en representar los $x \in D_f$ sobre el eje horizontal y los $f(x) \in Im\, f$ sobre el eje vertical.



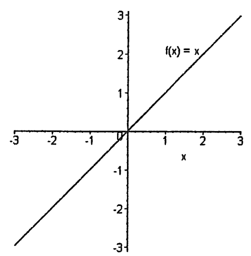
¿Cómo dibujar la gráfica de una función?

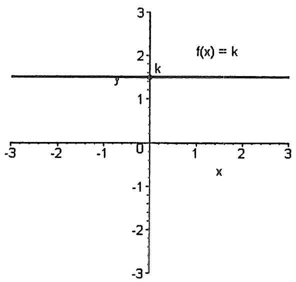
En algunos pocos casos la tarea es sencilla. Por ejemplo, para las funciones: $f(x) = x$ (denominada función **identidad**) y $g(x) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ (denominada función **constante**) se tiene, respectivamente:

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D_f\} = \{(x, x) : x \in R\}$$
$$G_g = \{(x, g(x)) : x \in D_g\} = \{(x, k) / x \in \mathrm{R}\}$$

Es decir:

- los puntos de G_f son todos los puntos del plano cuya abscisa es igual a su ordenada
- los puntos de G_g son todos los puntos del plano cuya ordenada es k e donde se deduce que las respectivas gráficas son:

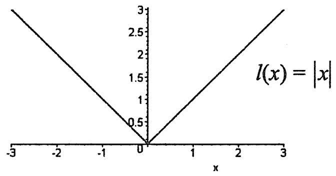


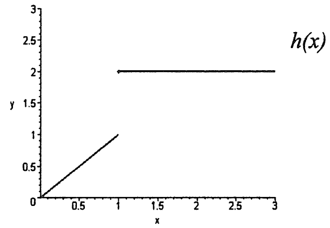


Asimismo, las gráficas de las funciones:

$$l(x) = |x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases} \quad \text{o} \quad h(x) = \begin{cases} x & si\ 0 \leq x < 1 \\ 2 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Se obtienen, fácilmente, a partir de las gráficas anteriores (¿Por qué?)

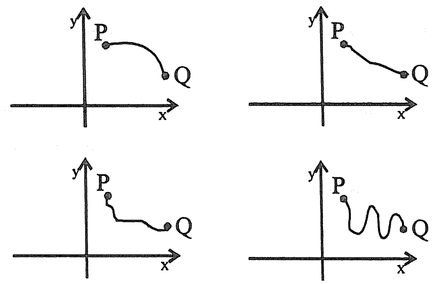




Sin embargo, en general, el problema de obtener la gráfica de cualquier función no es tan simple.

El procedimiento de averiguar algunos puntos de paso para luego unirlos por un trazo que pase por esos puntos es incorrecto, porque hay una infinidad de posibilidades para ese trazo y, salvo que se disponga de informaciones adicionales, no tendremos formas de decidir acerca de cual sería el adecuado.

Por ejemplo, si la única información de la que disponemos es que P y Q son dos puntos de la gráfica de una función *f*, cualquiera, o ninguno, de los siguientes trazos podría ser una porción de la gráfica de *f*. Además, es claro que el problema no se resuelve tomando puntos P y Q "más cercanos".



Para decidir cuál es la opción más adecuada para unir (o no) puntos de la gráfica de una función, es necesario tener más información acerca de esa función. Para ello, es necesario incorporar nuevos conceptos que nos pueden ayudar. Entre ellos se encuentran los de funciones *"pares"* o *"impares"*.

Funciones pares e impares

Se dice que una función f es:

i) **par**, si $f(-x) = f(x)$ para todo x en D_f

ii) **impar**, si $f(-x) = -f(x)$ para todo x en D_f

Ejemplos:

i) $f(x) = 2$ es una función par ya que $f(-x) = f(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = x$ es una función impar ya que $f(-x) = -x = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = |x|$ es una función par ya que $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

iv) $f(x) = x^2$ es una función par ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

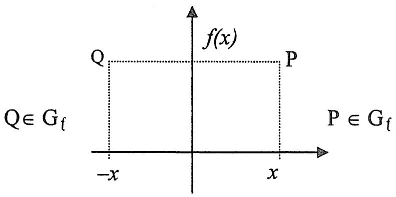
v) $f(x) = x^3$ es una función impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Gráfica de una función par

Si f es una función par, entonces:

$$(x, f(x)) \in G_f \Leftrightarrow (-x, f(x)) \in G_f \qquad \text{(¿Por qué?)}$$

por lo que su gráfica resulta simétrica con respecto al eje y.

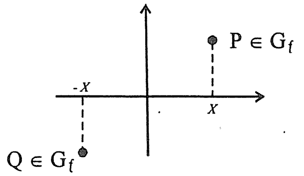


Gráfica de una función impar

Si f es una función impar, entonces:

$$(x, f(x)) \in G_f \Leftrightarrow (-x, -f(x)) \in G_f$$

y, por lo tanto, su gráfica resulta simétrica con respecto al origen de coordenadas.



Debido a estas propiedades de simetría de las gráficas de las funciones pares o impares, concluimos que la gráfica de una función par o impar queda determinada si se la conoce a la derecha o a la izquierda del origen (es decir, para los $x \geq 0$ o para los $x \leq 0$).

En los siguientes ejemplos se aplican estas propiedades.

I- ***Gráfica de la función $f(x) = x^2$***

Es inmediato que $D_f = \mathbb{R}$. Además, es fácil verificar que:

i) f es par

ii) $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

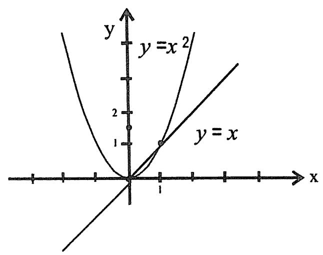
iii) $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$

iv) Si $0 < x < 1$, entonces: $f(x) < x$ y si $x > 1$, entonces: $f(x) > x$.

De i) tenemos que basta con estudiar el comportamiento de f para $x \geq 0$ y, de ii), que la gráfica de f se encuentra ubicada "por encima" del eje x.

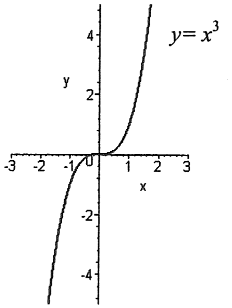
Utilizando iii) podemos ubicar dos puntos de la gráfica de f y, finalmente, por iv), es posible relacionar esta gráfica con la gráfica ya conocida de la función $y = x$ de la siguiente manera:

Si $0 < x < 1$, entonces la gráfica de f se encuentra por debajo de la gráfica de la función $y = x$, y, si $x > 1$, por sobre la misma.



II- ***Gráfica de las función $g(x) = x^3$***

Procediendo de modo similar al realizado para $f(x) = x^2$ y teniendo en cuenta el carácter de **impar** de la función $g(x) = x^3$, resulta:



Se puede observar que el "achatamiento" de la gráfica de $f(x) = x^3$ en el (0,1) es mayor que el de $f(x) = x^2$ porque, en ese intervalo, es: $x^3 < x^2$. Inversamente, para $x > 1$, el "empinamiento" de la gráfica de $f(x) = x^3$ es mayor que el de $f(x) = x^2$ porque la desigualdad anterior se invierte.

¿Es difícil imaginar ahora cómo serán las gráficas de las funciones $f(x) = x^n$, con $n \in \mathbb{N}$?

III- *Gráfica de* $f(x) = \dfrac{1}{x}$

- $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

  en consecuencia, la gráfica de f no corta al eje y.
- La función es impar, ya que:

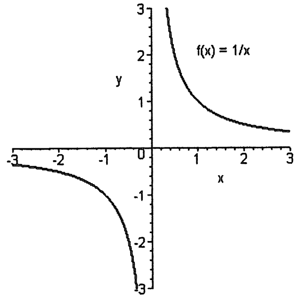
$$f(x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)\ , \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

  por lo que su gráfica es simétrica con respecto al origen de coordenadas y, por lo tanto, es suficiente analizarla en el primer cuadrante.
- Como 0 no pertenece al dominio de f es evidente que el eje y no "corta" a la gráfica (pues $P(x,y) \in$ eje $y \Leftrightarrow x = 0$).
- A medida que x se aproxima a 0, (con valores positivos), los valores de $f(x)$ crecen "sin tope" (es decir superan a cualquier número por más grande que este sea).
- A medida que x crece, los valores de la función se aproximan a 0 tanto como se desee. Por lo tanto, a medida que x crece, la gráfica de la función se aproxima, tanto como se quiera, al eje x.
- Ayudándonos ahora con una "tabla de valores":

x	$1/x$
1	1
2	1/2
3	1/3
1/2	2
1/3	3

obtenemos algunos puntos de paso de la gráfica en el primer cuadrante: (1,1), (2,1/2), (3,1/3), (1/2,2), (1/3,3)

Con ellos podemos bosquejar la gráfica en ese cuadrante y completarla luego, teniendo en cuenta la imparidad de la función. Se obtiene:



↳ OBSERVACIONES:

Con respecto a la representación gráfica de funciones corresponde señalar dos cuestiones de importancia:

- Las funciones de la forma: $mx + h$, son llamadas **funciones lineales** y puede demostrarse que sus gráficas son siempre rectas no perpendiculares al eje x (así, por ejemplo, las funciones $f(x) = -x$ y $g(x) = 3x - 1$ son lineales y sus gráficas son rectas no perpendiculares al eje x). Consecuentemente, para dibujar la gráfica de cualquier función lineal bastará obtener dos puntos de paso de la misma.
- Para otras funciones que se nos puedan presentar, en las que la información acerca de las simetrías, y el "crecimiento" o "decrecimiento" no sean suficientes, nos conformaremos, por ahora, con determinar algunos puntos de la gráfica para dibujar luego, aproximadamente, la curva.

➲ EJERCICIOS:

11- ¿Puede una circunferencia del plano ser la gráfica de una función? Justifique la respuesta.

12- Complete y justifique:

Si la curva Γ es la gráfica de una función, cualquier recta perpendicular al eje x ....

13- Indique el dominio y la imagen de las siguientes funciones, y calcule el valor de la función en los puntos que se indican:

a) $m(x)=3$, $\qquad x=-1,\ x=2$

b) $p(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad x=-2,\ x=1/2$

c) $\begin{array}{rccl} G: & [0,9] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G(x)=2-4x \end{array}$ $\qquad x=1,\ x=4$

d) $q(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si } -2\le x\le 0 \\ 3 & \text{si } 0<x\le 3 \end{cases}$ $\qquad x=-1,\ x=0,\ x=2$

14- Sean las funciones:

$$f(x)=x^2+1\ ;\ g(x)=\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad h\colon [0\,,3) \to \mathbb{R}\ /\ h(x)=x^2$$

Determine si el punto P(a,b) dado pertenece, o no, al gráfico de la función que en cada caso se indica:

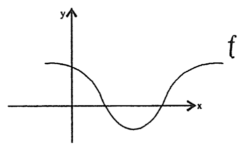
i) P (2,5) ; f

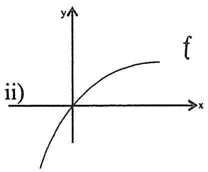
ii) P (-1, f(1)) ; f

iii) P(0,0) ; g

iv) P (h (2), 2) ; h

15- En cada caso determine, a partir de la gráfica de f, si la función es o no inyectiva.

i) 

ii) 

Complete:

Si Γ es la gráfica de una función inyectiva, entonces cualquier recta paralela al eje x ....

16- ¿Puede decir que $f(x)=\sqrt{x}$ es una función par?, ¿e impar?

17- ¿Puede el intervalo (–2, 3) ser el dominio de una función par o de una función impar? Justifique su respuesta. ¿Cómo deber ser, en general, el dominio de una función par o de una función impar?

18- i) Intente graficar una función impar f, tal que $f(0)=1$

ii) Pruebe que si f es una función impar y $0\in Dom_f$, entonces $f(0)=0$

19- Pruebe utilizando el ejercicio anterior, que $f(x)=3x^3+x^2-1$ no es impar.

20- Obtenga las gráficas de las siguientes funciones:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\ x>1 \\ -2 & si\ x\le 1 \end{cases}$

ii) $g(x)=\begin{cases} x^3 & si\ 0<x<1 \\ x+2 & si\ x\ge 1 \end{cases}$

iii) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & si\ x<0 \\ x & si\ x\ge 0 \end{cases}$

iv) $t(x)=\sqrt{x}$

v) $p(x)=3x-2$

vi) $l(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & si & x\ge 0 \\ 2 & si & -1<x<0 \\ x & si & x\le -1 \end{cases}$

21- Las gráficas de las funciones: $f(x)=x^2$, $g(x)=x^4$, $h(x)=x^6$, "pasan" (todas) por los puntos (0,0) y (1,1). Dibuje dichas gráficas en un mismo sistema de ejes coordenados.

Operaciones con funciones

Dadas dos funciones f y g tales que el conjunto $D_f\cap D_g\neq\varnothing$, es posible definir otras funciones: **suma** (f+g), **producto** $(f\cdot g)$ y **cociente** $\left(\dfrac{f}{g}\right)$, de f y g así:

- **Suma** de f y g

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\,,\ \forall\, x\in D_f\cap D_g$$

- **Producto** de f y g

$$(f\,.\,g)(x)=f(x)\,.\,g(x)\,,\ \forall\, x\in D_f\cap D_g$$

- **Cociente** de f y g

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \forall\, x\in D_f\cap D_g-\{x\,/\,g(x)=0\}$$

Ejemplos:

Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x)= x^3$, resultan:

i) $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 3 + x^3, \ \forall x \in \mathbf{R}$

ii) $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x^2+3).x^3 = x^5 + 3x^3, \ \forall x \in \mathbf{R}$

iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2+3}{x^3}, \ \forall x \in \mathbf{R} - \{0\}$

Como las definiciones de operaciones entre funciones se traducen en operaciones entre números reales, resulta que las propiedades de las operaciones entre funciones son análogas a las conocidas entre números reales.

De esta manera, si f, g y h son funciones para las que están definidas la suma y el producto de dos cualesquiera de ellas, se verifican las siguientes propiedades:

- $f + g = g + f$ (conmutativa de la suma)
- $(f+g)+h = f+(g+h)$ (asociativa de la suma)
- $f \cdot g = g \cdot f$ (conmutativa del producto)
- $(f \cdot g)\cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ (asociativa del producto)
- $f \cdot (g+h) = f \cdot g + f \cdot h$ (distributiva del producto respecto de la suma)

Además, cualquiera sea la función f se verifica que:

- Existe la función **nula**, O, tal que: $f + O = f, \ \forall f$ (existencia de **neutro**)
  (La función O, es la función definida por: $O(x) = 0, \ \forall x \in R$)
- Para cada función f existe $-f$ tal que: $f + (-f) = O$ (existencia de **opuesto**)
  (La función $-f$ es la función definida por: $(-f)(x) = -f(x) \ ; \ \forall x \in D_f$)

Debido a la existencia de opuesto, es posible definir la **diferencia** de f y g $(f-g)$:

$$\boxed{(f-g)(x) = f(x) + (-g)(x), \ \forall x \in D_f \cap D_g}$$

➲ EJERCICIOS:

22- Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+2}$

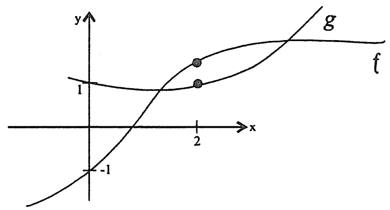
i) ¿Cuál es el dominio de $f+g$?

ii) Calcule, si existen, $(f+g)(2)$; $(f \cdot g)(1)$; $(f-g)(3)$ y $\dfrac{f}{g}(-2)$

iii) ¿Cuál es el dominio de $\dfrac{f}{g}$? ¿y el de $\dfrac{g}{f}$?

23- A partir de las gráficas de las funciones f y g, estime:

$(f+g)(2)$; $(f-g)(2)$; $(f \cdot g)(2)$ y $\left(\dfrac{f}{g}\right)(2)$



24- Determine, en cada caso, si la proposición es verdadera o falsa (f y g son dos funciones para las cuales existe $f+g$; $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$). Justifique su respuesta.

i) f par $\Rightarrow$ $f+g$ par cualquiera sea g.

ii) f par y g par $\Rightarrow$ $f+g$ par

iii) f par ; g impar $\Rightarrow$ $f \cdot g$ impar

iv) f, g impares $\Rightarrow$ $\dfrac{f}{g}$ impar

25- Sean f y g dos funciones lineales $f(x) = m_1x + h_1$; $g(x) = m_2x + h_2$ y c una constante, demuestre que las funciones: $f+g$ y cf son también lineales.

26- Analice la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones. Justifique

a) Si $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$, entonces el dominio de $f.g$ es $\mathbf{R}$

b) Las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y $g(x) = x+2$ son iguales

c) La función $f(x) = \sqrt[3]{2x}$ es impar

d) $f : [-5,3] \to \mathbf{R} \ / \ f(x) = x^2$ es par

e) Las funciones $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$ y $g(x) = \sqrt{x^2}$ son iguales

f) la función $f(x) = x^3 - x$ es inyectiva

AUTOEVALUACIÓN N°11

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones verifican que $f(x + y) = f(x)+f(y)$ cualesquiera sean x e y del dominio de f?
   i) $f(t) = 2t$
   ii) $f(t) = t^2$
2. Para cada x, $f(x)$ indique el área de un triángulo equilátero de perímetro x. Escribe una fórmula para $f(x)$.
3. Determine el dominio de cada una de las siguientes funciones:
   i) $f(x) = \dfrac{3x-6}{\sqrt{x^2-x}}$
   ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$
   iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+2x-3}$
4. Dibuje una función f que verifique simultáneamente las siguientes tres condiciones:
   i) f es par. ii) $f(3) = 2$ iii) $f(x) \geq 0$, si $x \geq 0$
5. Dada la función $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, donde $f(x) = x^2$, determine, en cada uno de los siguientes casos, los conjuntos de números reales para los cuales la igualdad es válida:
   a) i) $f(-x) = f(x)$ ii) $f(-x) = -f(x)$ iii) $f(2x) = 4f(x)$
   b) Repita el ejercicio de la parte a) para el caso en que la función sea $f(x) = x^3$
6. Considere la función $f(x) = \sqrt{x-1} + 2x$
   a) Calcule $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$
   b) ¿Existe un valor de x tal que $f(x) = 12$?
   c) ¿Existe $x \in \mathbf{R}$ tal que $f(x)$ no esté definida?

Un momento para la distracción.....

Pasatiempos

- De valores a las letras para que se verifique:
  i. $(HE)^2 = SHE$
  ii. $\sqrt{LAPICEROS} = AAIIR$, ¿qué número es *LAPICEROS*?

- Observa:

$$1^3 = 1^2$$
$$1^3 + 2^3 = 3^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = ?^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?^2$$

  Siga adelante. ¿Qué sospecha?, ¿puede demostrarlo?

- Halle los 5 números que se deben escribir en cada una de las 5 casillas vacías para obtener un cuadrado mágico: las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales tienen la misma suma.

	39	
33		
40		36

Adivinanza

Tres contenedores herméticamente cerrados contienen, respectivamente, lavadoras, televisores y ambas cosas a la vez, y tienen etiquetas que deberían indicar su contenido, pero estamos seguros que están todas mal puestas.
¿Habría alguna forma de saber el contenido exacto de los contenedores abriendo solamente uno?. Aconsejan abrir solamente el de etiqueta "lavadoras y televisores" y al asomarse se ve un televisor. ¿Sabría ya poner bien las etiquetas?
¿Qué ocurriría si en vez de ese abriera el de etiqueta "televisores"?.

MISCELÁNEA

"Quien pone en juego su potencial creativo para resolver por sus propios medios una situación problemática, llegará a sentir la emoción y el tiempo del descubrimiento"...

"Resolver problemas es una meta específica de la inteligencia y la inteligencia es, por excelencia, el don específico de los seres humanos" (Polya, George; 1887 – 1985)

1- Dados los conjuntos $A=\{x\in\mathbb{R}:|-1+2x|\leq 3\}$ y $B=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{-2+x}{3x}>1\right\}$. Halle el conjunto $A\cap\overline{B}$.

2- a) Sabiendo que $A\cup B=U$, ¿puede asegurar que $A=\overline{B}$?

b) Sabiendo que $C\cap D=\varnothing$, ¿puede asegurar que $C=\overline{D}$?

c) Sabiendo que $E\cup F=U$ y que $E\cap F=\varnothing$, ¿puede asegurar que $E=\overline{F}$?

3- En una comisión de 50 alumnos ingresantes a la universidad, 30 estudiarán ingeniería civil, 25 ingeniería industrial y 10 ambas carreras. ¿Cuántos alumnos no estudiarán ninguna de estas dos carreras?

4- Encuentre el error cometido en la solución siguiente y resuelva correctamente:

$$x^2+6x+5=x^2-1$$
$$(x+5).(x+1)=(x-1).(x+1)$$
$$x+5=x-1$$
$$¿5=-1?$$

5- Determine las valores de k de manera tal que la ecuación tenga una o dos soluciones, siendo $4x^2+kx+25=0$

6- Una pieza rectangular de hojalata tiene su largo igual al doble de su ancho. En cada esquina se cortan cuadrados de 2cm de lado, y los extremos se doblan hacia arriba para formar una caja cuyo volumen es de 480cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza de hojalata?

7- A las 15 hs un hombre de 165cm de altura tiene una sombra de 132cm de largo. Al mismo tiempo, un edificio alto de las cercanías produce una sombra de 160m de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

8- En el triángulo ABC se trazan las bisectrices de los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ que se cortan en P. Por P se traza una paralela a BC que corta al lado AB en D y al lado AC en E. Se sabe que $BD=5{,}3$ y $CE=7{,}8$. Calcule la medida del segmento DE.

9- Factorice los siguientes polinomio:

a) $P(x)=x^4+x^3+7x^2+9x-18$

b) $Q(x)=x^5-x^3+x^2-1$

c) $R(x)=x^6+x^4+4x^2+4$

d) $S(x)=x^6+1$

e) $T(x)=8x^3-1$

10- Obtenga el polinomio $P(x)$ con coeficientes reales que satisfaga las condiciones dadas:

a) $1-2i$ raíz simple, 1 raíz doble y $P(-1)=2$

b) es divisible por $(x-i)^2$, $P(-3)=0$ y el resto de dividir $P(x)$ por $x+1$ es 2.

11- ¿A través de cuántos radianes se habrán movido el minutero y la manecilla de las horas de un reloj desde las 13 hasta las 18.45 hs?

12- Una persona desea invertir $15000. Piensa depositar una parte en una cuenta de ahorros que produce 5% de interés por período y el resto en un fondo de inversión que produce el 8% de interés por período. ¿De qué cantidad debe ser cada inversión para obtener una ganancia del 7% después de un período?

13- a) Represente gráficamente los siguientes conjuntos de números complejos:

$A=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z)\geq 0\}$

$B=\{z\in\mathbb{C}:\ 0\leq\mathrm{Re}(z)<1,\ 1<\mathrm{Im}(z)\leq 2\}$

$C=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|\geq 2\}$

$D=\left\{z\in\mathbb{C}:0<\arg(z)<\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$E=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq 2,\ |\arg(z)|\geq\dfrac{\pi}{4}\right\}$

$F=\{z\in\mathbb{C}:\ -3\leq\mathrm{Im}(z)\leq\sqrt{2}\}$

b) Para cada uno de los conjuntos anteriores, determine si el complejo $z=1+\sqrt{3}\,i$ pertenece o no a él.

14- Indique verdadero o falso. Justifique:

i) $(a + ib).\overline{(a + ib)} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \forall\, a,b \in \mathbb{R}$

ii) $\dfrac{i^{324}\, i^{-5}}{i^3} = i$

iii) El complejo $(a + ia)^2$ es un imaginario puro $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

iv) $x + 2 - 3i = 4 + yi \;\Rightarrow\; x = 2 \wedge y = -3$

v) $z = 2 + 3i \;\in\; \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < 2, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$

vi) $\dfrac{\sqrt{x\,y}\,(y-1)}{\sqrt{x\,y} - \sqrt{x}} = y + \sqrt{y}$

vii) $sen(3x) = 3sen\,x - 4sen^3 x$

viii) $\left|\dfrac{3x-1}{-2}\right| = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{3}$

x) $\left(\dfrac{a^{-\frac{5}{2}}\, b^{-10}}{32b^{-5}}\right)^{-\frac{1}{5}} = 2ab$

xi) $\dfrac{1+\cos x}{sen\,x} + \dfrac{sen\,x}{1+\cos x} = 2\csc x$

15- Un granjero coteja cada mañana el número de sus gallinas contando sus patas. Una mañana, cuando el granjero se acerca, cuatro gallinas levantan una pata (para hacerle una broma, se entiende) y el granjero cree que tiene solo la mitad. ¿Puede decir:

a) cuántas gallinas tiene el granjero?

b) cuántas gallinas no tienen buen sentido del humor?

16- Un boxeador que ha peleado en 72 ocasiones ganó 16 peleas más que las que perdió. Si solo empató en 4 ocasiones, ¿cuántas peleas perdió?

17- Determine los valores de k para que el sistema sea incompatible:

$$\begin{cases} (2k+1)x - 2y = 5 + k \\ -5kx + (k+2)y = 11 \end{cases}$$

18- Para estimar la altura de una montaña sobre una llanura, se encuentra que el ángulo de elevación a la cima de la montaña es de 32°. Mil pies mas cerca de la montaña sobre la llanura se determina que el ángulo de elevación es de 35°. Estime la altura de la montaña.

19- Suponga que (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\dfrac{x_0 + x_1}{2}, \dfrac{y_0 + y_1}{2}, \dfrac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también solución.

20- Un granjero tiene 2000m de alambre para delimitar un terreno rectangular. Exprese el área del terreno como una función de la longitud de uno de sus lados. ¿Cuál será el área del terreno si uno de sus lados mide 150m?, ¿y si mide 200m?

21- Una artesana fabrica macetas de cerámica horneadas que vende a \$35 cada una. El material que utiliza en cada maceta tiene un costo de \$10. Le ofrecen un stand en una feria artesanal a \$200 por mes, ¿cuántas macetas debe vender para tener ganancia?

Nota: recuerde que ganancia = ingreso por ventas - costos

22- Halle el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - x - 6$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{1 - x^2}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

d) $t(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{x+3}}$

23- La diferencia de un número y 11 veces su recíproco es -10. Determine el número.

24- La diferencia entre dos números es 11. El doble del más pequeño más tres veces el mayor es 123. ¿Cuáles son los números?

25- En el paralelogramo $ABCD$, los lados AB y CD miden 5cm y los lados AD y BC miden 6cm. Se traza la bisectriz del ángulo $\hat{A}$ que corta al lado BC en el punto E. Calcule las medidas de BE y EC.

26- En un instituto de idiomas se enseña alemán, inglés y francés. El número de alumnos de inglés es igual que el de francés y cuatro veces más que de alemán. El número de alumnos que estudian francés e ingles a la vez es igual al de matriculados en alemán, y es tres veces el de los matriculados en alemán e inglés.

De los matriculados en alemán, 7 lo están en francés, 8 en inglés y 5 en francés e inglés. ¿Cuántos alumnos tiene el instituto?

27- Un comerciante, nada confiable por cierto, ha agregado un litro de agua a un botellón que contenía $\frac{5}{3}$ de litros de vino. En otra ocasión ha mezclado $\frac{1}{2}$ litro de agua con $\frac{3}{4}$ de litro de vino del mismo tipo. ¿En cuál de las dos oportunidades el vino ha quedado más aguado?

28- Una pecera en forma de prisma tiene 92cm de largo, 75cm de ancho y 56cm de alto. ¿Cuántos cm^3 de agua caben en la pecera?

Llenamos la pecera hasta la mitad. Después echamos los peces y el nivel aumenta en 2cm. ¿Qué volumen ocupan los peces?

29- Un número es cuatro veces otro número y la suma de ambos es 175. ¿Cuáles son esos números?

30- La *pirámide de Keops* (s. 25 a.c.) es una pirámide regular de base cuadrada. Tiene una altura de 138m y una arista lateral de 219m.

a) Calcule su volumen.

b) Cuántos m^2 de lona serían necesarios para cubrirla.

31- En cierta ciudad, los cambios anuales en la población durante 3 años consecutivos son, respectivamente, un incremento del 20%, un incremento del 30% y una disminución del 20%. ¿Cuál es el porcentaje de incremento o disminución global desde el inicio del primer año hasta el final del tercero?

32- A un albañil se le puede pagar de dos maneras:

Plan A: \$500 mas \$9 por hora

Plan B: \$14 por hora

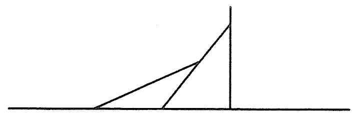
Suponga que una tarea requiere n horas de trabajo. ¿Para qué valores de n es mejor para el albañil el plan A que el plan B?

33- Después de recibir un aumento salarial del 20%, una persona recibe una paga de \$18000 anuales. ¿Cuál era su salario antes del aumento?

34- Encuentre el valor de la constante c para que $x = 2$ sea solución de la ecuación $|3x - c| = 5 + (c+1).x - x^2$

35- Se tienen tres postes alineados de altura h (la misma para los tres), con separaciones de 10m entre ellos. Una ráfaga de viento voltea al primero, el cual voltea al segundo.

El segundo queda apoyado en el tercero a dos metros del extremo superior de este último (ver dibujo). Halle la altura h de los postes.



36- En un número racional el numerador es 3 unidades más grande que el denominador. Si se suma 2 tanto al numerador como al denominador, el resultado es $\frac{3}{2}$. Determine el número original.

37- Efectúe las divisiones $P(x) \div Q(x)$ para:

	$P(x)$	$Q(x)$
i)	$2x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 15x + 10$	$x^2 + 2x + 3$
ii)	$4x^5 - x^4 + 8x^3 + x^2 + 7$	$4x^3 - x^2 + 1$
iii)	$x^5 - 1$	$x^2 - 1$
iv)	$x^6 - 1$	$x^3 - 1$
v)	$x^8 - y^8$	$x^4 + y^4$

38- i) Encuentre un polinomio $P(x)$ sabiendo que es de grado 3, que es divisible por $Q(x) = x^2 + 2x + 1$ y que $P(2) = 1$.

ii) Escriba un polinomio $P(x)$ de grado 3 que sea divisible por $Q_1(x) = (x-2)^2$ y por $Q_2(x) = x + 1$

SOLUCIONES

CAPÍTULO 1 - CONJUNTOS

1- i) F iii) F v) V

ii) F iv) V

2- i) F iii) F v) F

ii) F iv) V vi) V

3- i) $A \cup B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$

ii) $A \cap B = \{7\}$

iii) $B \cup C = \{1;3;4;5;6;7\}$

iv) $A \cap B \cap C = \varnothing$

v) $A \cap B \cup C = \{1;3;6;7\}$

vi) $A\text{-}B = \{1;2;3\}$

vii) $\overline{A} = \{4;5;6\}$

viii) $D = \{2;6;7\}$

ix) $\overline{A \cup B} = \varnothing$

x) $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$

xi) $C\text{-}B = \{1;3\}$

xii) $(C\text{-}B) \cup (B\text{-}C) = \{1;3;4;5;7\}$

xiii) $(A \cap B) \cup C = \{1;3;6;7\}$

xiv) $\overline{B} \cap C = \{1;3\}$

xv) $\overline{A \cap B} = \{1;2;3;4;5;6\}$

4- i) V iv) V vii) V

ii) F v) V viii) F

iii) F vi) F ix) V

AUTOEVALUACIÓN 1

1- i) $B = \{0; 1; 2; 3\}$ iv) $E = \{0; 4; 8\}$

ii) $C = \{0;2;4;6;8;10\}$ v) $F = \{2; 3; 5; 7; 11\}$

iii) $D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

2- $\overline{A-B}$; $\left(\overline{A \cup B}\right) \cup (A \cap B)$; $(A-B) \cup (A \cap C)$

3- i) No habían tomado ninguno de los tres tipos de cursos 106 estudiantes.

ii) Tomaron sólo un curso de Ciencias de la Computación 60 estudiantes.

CAPÍTULO 2 - NUMEROS REALES

2- i) $\frac{1093}{900}$ ii) $\frac{9}{20}$ iii) $\frac{22}{3}$ iv) $\frac{11114}{99}$

3- i) $0.\overline{3}$ iii) 5.5 v) $0.\overline{12}$

ii) 1.4 iv) $0.\overline{27}$

4- i) $\frac{63}{2}$ ii) $\frac{379}{20}$

5- i) -29 iii) $\frac{9}{2}$

ii) $-\frac{3}{8}$ iv) $\frac{64}{15}$

7- i) $\frac{14}{15}$ ii) $\frac{9}{2}$

9- i) $\frac{128}{2187}$ iv) 1024

ii) 25 v) $\frac{3}{5}$

iii) $\frac{2}{7}$ vi) $\frac{16}{15625}$

10- i) 2 iii) abc^{-1}

ii) $\frac{4}{243}$ iv) $a^5 b^{-m}$

13- 7×10^{-13}

14- -3.49998×10^{12}

15- i) 12 iii) 6 v) 20

ii) $\nexists$ solución en $\mathbb{R}$ iv) -6 vi) 0.05

16- i) $2\sqrt[5]{2}$ iii) x^2 v) $3b\sqrt[3]{a}$

ii) $3\sqrt[3]{9}$ iv) $2a\sqrt{a}$

17- i) $-2\sqrt[4]{3}$ iii) $4\sqrt{x}$

ii) $2\sqrt{3} + 7\sqrt{10}$ iv) $-\frac{13}{10}\sqrt{x-1}$

18- i) $2^{\frac{1}{2}}$ iii) $2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{4}}$ v) $5^{\frac{1}{4}}$

ii) $3^{\frac{1}{8}}$ iv) $a^{\frac{1}{3}} x^{-\frac{5}{6}}$ vi) $x^{\frac{7}{8}}$

19- i) $x^{\frac{3}{4}}$ ii) $x^2 y^{-\frac{1}{4}}$

20- i) $2\sqrt{2}x^3$ ii) $2x^{\frac{1}{6}} - 3x^{-1}$

21- i) $\sqrt[4]{27}$ iii) $\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{7}}{42}$ iv) $\frac{x-\sqrt{x}}{x}$ con $x>0$

ii) $18\sqrt[3]{25}$

22-

n	2	4	8	16	32	64	128	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
$\log_2 n$	1	2	3	4	5	6	7	-1	-2	-3	-4

N	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000	10000
$\log_{10} n$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

23- i) $\frac{7}{2}$ iii) 10

ii) $\frac{7}{3}$ iv) 2

24- i) $\log_a \frac{A^4}{B}$ ii) $\log_a \frac{A^4 B}{C\sqrt{D}}$

25- i) 3.459431619 ii) 1.160964047 iii) 0.185636577

27- a) 3 y $\frac{1}{3}$ b) 2 y $\frac{1}{2}$ c) 2 y $\frac{1}{2}$

En general $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

28- i) F ii) F iii) F

AUTOEVALUACIÓN 2

1. i) No ii) No iii) Si iv) No

2. i) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ ii) $\frac{717}{722}$

3. $\frac{104791}{16830}$

5. i) $9.11\ 10^{-28}$ ii) 5.895×10^9

7. $\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$

CAPÍTULO 3 – NÚMEROS COMPLEJOS

2- $\sqrt{2}i$; $\frac{3}{4}i$; $4\sqrt{5}i$

3- $i^r(-i)$; i^r ; $-i^r$ donde $r=0, 1, 2, 3$

4- a) $5+3i$; b) $6+3i$; c) $-13+41i$; d) $10+11i$; e) 0 ;

f) $5+2i$; g) $-2-2i$; h) $24i$

6- $a=-4$

7- a) $-i$; b) $2-i$; c) $-\frac{35}{4}-3i$; d) i

8- a) $\frac{24}{41}+\frac{30}{41}i$

b) $-11-13i$

c) $-1-4i$

d) $-2-14i$

e) $1-i$

f) 2

g) $-36+12i$

h) -1

i) $\frac{13}{2}+\frac{11}{2}i$

j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

k) $\frac{\sqrt{2}i}{2}$

l) $\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$

9- a) $\frac{1}{4}i$ b) $\frac{8}{13}-\frac{12}{13}i$ c) $-\frac{4}{19}-\frac{\sqrt{3}}{19}i$

10- a) Los reales tales que $a^2+b^2=1$

b) Todos los imaginarios puros

11- a) $x=\frac{10}{13}; y=\frac{11}{13}$

b) $x=1, y=-2$

c) $x=\frac{7}{2}; y=0$

13- $\frac{5}{61}-\frac{6}{61}i$

14- $a=2$

AUTOEVALUACIÓN 3

2. $x=-\frac{2}{13}$; $y=-\frac{3}{13}$

4. a) $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}i$

   b) 2

   c) $2-i;-2+i$

5. a) $1+i,-1-i$

   b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

   c) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}i,\ -\frac{\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}}i$

6. $-\frac{3}{4}-i;\ \ -\frac{1}{2}+i$

CAPÍTULO 4 - ECUACIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

1- i) $x=2$; ii) $x=\frac{5}{6}$; iii) $x=-\frac{23}{7}$; iv) $x=-9$; v) $x=-\frac{1}{2}$

2- $k=1$

4- i) $1+i$; $1-i$; ii) 1; 2 ; iii) 2, -2 ; iv) $2a$; $\frac{1}{2}a$

5- $k=2$

6- $k=-3$

7- $a\,(x-\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})=0$, siendo a un número real arbitrario distinto de cero

8- i) $x=3 \vee x=7$; ii) $x=4$; iii) $x=-1$; iv) $x=4$

9- i) S ={-1; 1; -2$\sqrt{2}$; 2$\sqrt{2}$ } ; ii) $x=16$

10- Rta: 5,75m y 17,25m

11- Rta: $\frac{1}{2}$

12- Rta: $ 61.764,71

13- Rta: 84

14- Rta: 11, 13 y 15

15- Rta: 3 o -1

16- Rta: 16, 18 y 20

17- Rta: 3, 4 y 5 o bien 9, 10 y 11

AUTOEVALUACIÓN 4

1. Los pares de ecuaciones equivalentes son: i), iii) y iv)

2. i) S = {6} ; ii) S = {3} ; iii) S = ϕ ; iv) S = $\mathbb{R}$; v) S = ϕ ; vi) $x=0 \vee x=\frac{3}{7}$; vii) $x=4$; viii) $x=1$

3. $k=\frac{9}{4}$

5. Rta: 15km/h y 8km/h

6. Rta: Se necesita añadir 1429 de agua dulce

CAPITULO Nº 5 - POLINOMIOS

1- a) Si b) No c) Si d) No e) No

2- a) 5 ; 3 b) constante; 0 c) lineal ; -1 + i d) nulo, no tiene grado

3- $n=m$ y $a_k=b_k \quad \forall\ k=0,....m$

4- a) $a=2 \quad b=3 \quad c=1 \quad d=-\frac{3}{2}$

   b) $a=i \quad b=1 \quad c=-1 \quad d=1-i$

6- i) $x^4-2x^3-x^2+ix+2$; grado 4

   ii) $3x^3-2x^2-x$; grado 3

   iii) $x^4-x^3+(-1+i)x$; grado 4

10- $P(x)Q(x)=(1+i)x^3+(2+i)x^2+(1-i)x-i$; grado 3

   $P(x)S(x)=(1+i)x^4+(-2-3i)x^3+(1+i)x^2-x$; grado 4

   $S(x)T(x)=3ix^3-6ix^2+3x$; grado 3

$Q(x)R(x)=0$; no tiene grado

12- Si, los polinomios constantes no nulos

14- i) Cociente: $-2ix$; Resto: $-x+1$

ii) Cociente: i^3x^2+x+i ; Resto: $-1+i$

iii) Cociente: 1 ; Resto: $1+i$

16- Resto: $-2-4i$

17-

$P(x)$	$Q(x)$	$P(x)$ **es divisible por** $Q(x)$ **para** n:
x^n+a^n	$x+a$	impar
x^n+a^n	$x-a$	$\nexists n$
x^n-a^n	$x+a$	par
x^n-a^n	$x-a$	$\forall n$

18- $h=-4+i$

19- $h=-42$

20- $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-1$; $\alpha_3=i$; $\alpha_4=-i$

21- Negativo

22- $P(\alpha)=0 \Leftrightarrow Q(\alpha)=kP(\alpha)=0 \quad k\neq 0$

24- $\beta=4+i$

25- $P(x)=\dfrac{1}{160}(x-2)(x+2)^3(x-3-i)(x-3+i)$

26- i) $\alpha_1=2$ (raiz doble); $\alpha_3=i$; $\alpha_4=-i$; $\alpha_5=-\dfrac{1}{3}$;

$$P(x)=3(x-2)^2(x+\frac{1}{3})(x-i)(x+i)$$

ii) $\alpha_1=0$; $\alpha_2=\sqrt{2}$; $\alpha_3=-\sqrt{2}$; $\alpha_4=\sqrt{3}$; $\alpha_5=-\sqrt{3}$

$$R(x)=x(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$$

iii) $\alpha_1=i$; $\alpha_2=-i$; $\alpha_3=2$; $\alpha_4=-2$; $\alpha_5=\dfrac{1}{2}$

$$S(x)=(x-i)(x+i)(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2})$$

iv) $\alpha_1=1$; $\alpha_2=-1$; $\alpha_3=\sqrt{2}i$; $\alpha_4=-\sqrt{2}i$

$$T(x)=(x-1)(x+1)(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$$

v) $\alpha=-\dfrac{1}{2}$; $R(x)=10(x+\dfrac{1}{2})$

vi) $\alpha_1=2$; $\alpha_2=-2$; $\alpha_3=2i$; $\alpha_4=-2i$

$$S(x)=(x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)$$

vii) $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ (raíz triple); $T(x)=27\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^3$

viii) $\alpha_1=-1$ (raiz triple); $\alpha_2=i$; $\alpha_3=-i$;

$$U(x)=(x+1)^3(x-i)(x+i)$$

27- i) $P(i)=0$

ii) $P(x)=(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)$

28- $P(x)=(x-i)(x+i)(x-1+i)(x-1-i)(x+1)^2=(x^2+1)((x-1)^2+1)(x+1)^2$

29- $\alpha=3$; $\beta=-4$

30- i) $\dfrac{8}{x-2}=\dfrac{8x}{x^2-2x}$, $x\neq 0 \wedge x\neq 2$ ii) $\dfrac{x-y}{2x}=\dfrac{y-x}{-2x}$, $x\neq 0$

32- i) $x^2+xy+y^2 \ \forall x;y\in\mathbb{R}/x\neq y$ iv) $x-3 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{3\}$

ii) $x+5 \ \forall x\in\mathbb{R}-\{0\}$ v) $x^2+b^2 \ \forall x,b\in\mathbb{R}/x\neq\pm b$

iii) $3-x \ \forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$ vi) $\dfrac{4x^2+12x+9}{x} \ \forall x\in\mathbb{R}/x\neq 0\wedge x\neq -\dfrac{3}{2}$

33- i) $(x+4)^2(x-4)$ iii) $9x^2y(xy-4)$

ii) $(x-3)(x+3)$ iv) $(x^2-1)(x-2)$

34- i) $\dfrac{a^2+ax+3}{x^2-a^2} \ \forall x\in\mathbb{R}/x\neq\pm a$ ii) $\dfrac{5x-3c}{xc(x+c)} \ \forall x\in\mathbb{R}/x\neq 0\wedge x\neq -c$

iii) $\dfrac{2x^3+x^2-2x+3}{x(x-1)(x+1)} \ \forall x\in\mathbb{R}-\{0;-1;1\}$ iv) $\dfrac{2x^2-3x-1}{x^2-1} \ \forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

35- i) $\dfrac{x+1}{x-1} \ \forall x\in\mathbb{R}/x\neq 1\wedge x\neq -1\wedge x\neq -2$

ii) $\dfrac{9(x+9)(x^2+3x+9)}{x^2(x+3)^3}\ \forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -9$

iii) $\dfrac{x(x-4)(x+8)}{x+2}\ \forall x \in \mathbf{R} / x \neq -2 \wedge x \neq 2 \wedge x \neq 0$

iv) $6\ \forall x \in \mathbf{R} / x \neq 0 \wedge x \neq -2$

36- i) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2x+6\sqrt{2}x+9}$ ii) $\dfrac{7x+15a}{2x}$ iii) $\dfrac{x^4(5x^2+2)}{(x+5)^2(25x+2)}$

37- i) $S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{33}}{2};\dfrac{7-\sqrt{33}}{2}\right\}$ ii) $S=\mathbf{R}-\{2\}$

iii) $S=\left\{-\dfrac{10}{3}\right\}$ iv) $S=\{5;-6\}$

40- 36km/h

AUTOEVALUACIÓN 5

1. $\alpha=-i$; $\beta=i$

2. i) $x^5+2x^4-3x^2$

ii) $x^{10}-2ix^5-1$

iii) Cociente: $x^2+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$; Resto: $-\dfrac{1}{4}x-1$

3. $k=5$

4. $P(x)=a(x^4-\dfrac{10}{3}x^3+5x^2-\dfrac{10}{3}x+\dfrac{2}{3}),\ a\in\mathbf{R}-\{0\}$

5. $P(x)=\dfrac{8}{15}(x^2+1)(x+1)$

7. $-1;\ \forall x\neq 0$

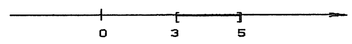
CAPÍTULO 6 – REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES

2- i) $\dfrac{17}{11}>1>\dfrac{7}{9}>\dfrac{2}{3}>0>-\dfrac{1}{5}>-3>-\pi$

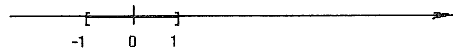
ii) $-3{,}12>-3{,}121>-3{,}\overline{12}$

iii) $5{,}001<5{,}009<5{,}09$

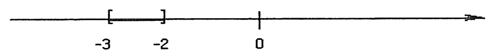
5- i)



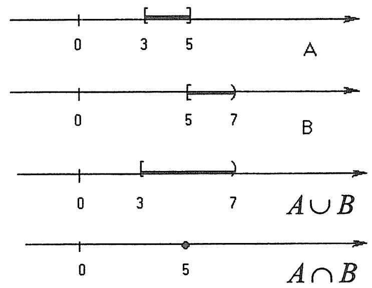
ii)



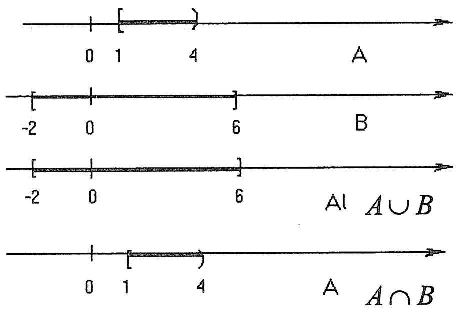
iii)



6- i)

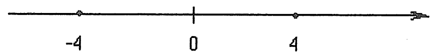


ii)

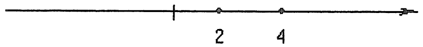


9.

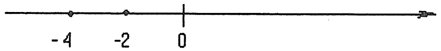
i)



ii)

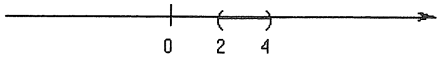


iii)

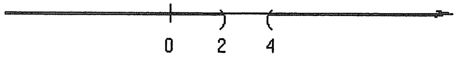


iv)

v)



vi)

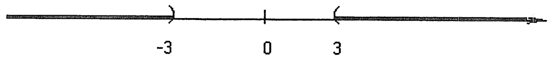


10- i) $S = (-\infty, 6)$

ii) $S = (\frac{19}{9}, +\infty)$

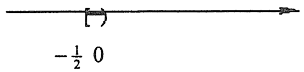
iii) $S = (-\infty, 15)$

iv) $S = (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$



v) $S = (-\infty, 2]$

vi) $S = [-\frac{1}{2}, 0)$

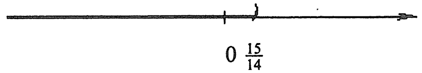


11- La puntuación que le hace falta en la tercera prueba para obtener por lo menos una a: es $60 \leq x \leq 820$.

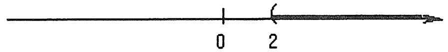
12- Si el total de las ventas es inferior a \$ 20.000 el plan A es mejor que el plan B.

13- El valor de la entrada debe ser menor de \$2.

14- i) $S = (-\infty, \frac{15}{14})$

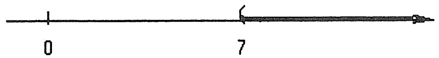


ii) $S = (2, +\infty)$



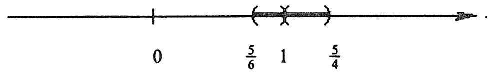
iii) $S = \phi$

iv) $S = (7, +\infty)$



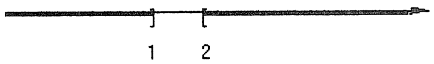
15- i) $S = (-4, 10)$

ii) $S = (\frac{5}{6}, 1) \cup (1, \frac{5}{4})$

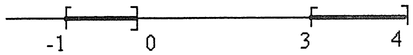


iii) $S = [8;16]$

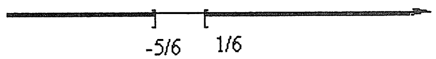
iv) $S = (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$



v) $S = [-1; 0] \cup [3; 4]$

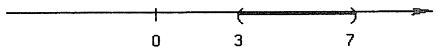


vi) $S = \left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$

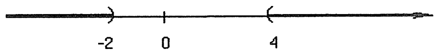


AUTOEVALUACIÓN 6

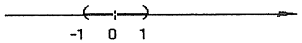
1. i) $3 < x < 7$



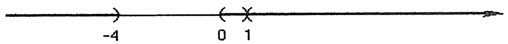
ii) $x < -2 \vee x > 4$



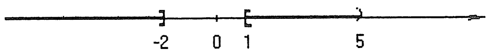
2. i) V ii) V iii) V iv) V v) F
3. i) $S = (-1,1) - \{0\}$



ii) $S = (-\infty,-4) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$



4. $S = (-\infty,-2] \cup [1,5)$



5. $68 \leq {}^{\circ}F \leq 86$ y $10 \leq {}^{\circ}C \leq 35$
6. $A \cup B = (-\infty; 2]$ y $A \cap B = \varnothing$

CAPÍTULO 7 – SISTEMAS DE ECUACIONES

2- $P \in IIIc.$; $Q \in IVc.$; $R \in Ic.$; $S \in IIIc.$

3- $S(1,1)$

4- a) $(3,7)$ b) $(-a,b)$ c) $A'(-3,3)$; $B'(-6,1)$; $C'(-1,-4)$

6- $\left(\frac{3}{2};0\right)$ y $(1;1)$ son soluciones de la ecuación

7- i) $x = 2 \wedge y = -7$

ii) $x = 1 \wedge y = 2$

iii) Sistema Incompatible

iv) Sistema Incompatible

v) Sist. Indeterminado, $S = \{(1-2\alpha;\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

vi) $x = 1 \wedge y = -2 \wedge z = 3$

vii) $x = \frac{3}{2} \wedge y = \frac{13}{2} \wedge z = \frac{5}{2}$

viii) $u = 0 \wedge v = 1 \wedge w = 5$

ix) Sistema Incompatible

x) Sist. Indeterminado, $S = \{(1-\alpha;\alpha-1;\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

xi) Sist. Indeterminado, $S = \{(1;5-\alpha;\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

8- Rta.: el flete de la caja grande cuesta \$16 y el de la caja chica \$13

9- Rta.: Se necesitan 30 lts. de la primera solución y 70 lts. de la segunda

10- Rta.: a una distancia de 375km

11- Rta.: Se vendieron 8 remeras blancas y 22 amarillas

12- Rta.: Carlos tiene 28 años y María 20 años

13- Rta.: $\frac{5}{3}$

14- Rta.: Las dimensiones del campo son 45m por 57m

15- Rta.: Compraron 2 libros 180 miembros

16- Rta.: 4 ; 9 y 11

17- Rta.: El espectáculo C tenía entrada gratuita

18- Rta.: Latas de tomate \$5, yogures \$2 y paquetes de sal \$2

19- Rta.: 24 ; 56 y 96

20- Había 70 chicos y 56 chicas

21- Paula tiene 32 años y Roberto 20 años

AUTOEVALUACIÓN 7

1. $a=-\frac{1}{2}\wedge b=\frac{5}{2}$
2. $k=2$
3. i) $x=1\wedge y=2$

   ii) $S=\left\{\left(\frac{5\alpha-3}{2};\frac{5-\alpha}{2};\alpha\right),\ \alpha\in\mathbb{R}\right\}$

   iii) $x=0\wedge y=1$
4. Rta.: Se necesitan 5 lts. de cada una
5. Rta.: el número es 120
6. a) $k\neq 7$ c) $\nexists k$ / el sistema sea incompatible

   b) $k=7$

CAPÍTULO 8 – GEOMETRÍA

2- i) 46° 51'   iii) 19° 12'

ii) 86° 24'   iv) 36° 21' 47"

3- i) 62°   ii) 51° 38'   iii) 24° 45'

4- i) 91°   ii) 66° 14' 54"   iii) 46°

5- $\alpha=4°54'12"$, $\beta=3°53'11"$

7- $\alpha=62°$, $\beta=\gamma=118°$

9- 40°38'

10- 90°

11- i) $\alpha=134°$, $\beta=46°$, $\gamma=73°$, $\varepsilon=61°$

ii) $\alpha=110°30'$, $\beta=69°30'$, $\gamma=58°30'$, $\varepsilon=52°$

12- $\alpha=12°$, $\beta=48°$, $\gamma=120°$

13- $\beta=72°18'$

14- $\alpha=111°14'$

15- $\alpha=20°$

16- $\hat{D}=131°$

17- 106°

18- $\frac{\sqrt{115}}{2}$

19- $5\sqrt{2}$

22- Si

26- i) AB = 10,5cm; EF = 6cm   iii) CM = 16cm

ii) AC = 18cm; OB = 14cm

27- i) No   ii) Sí

29- i) AM = 16cm   ii) CP = 20cm

30- ii) n-3   iii) $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$

31- i) $\alpha=50°$, $\beta=40°$ ii) $\alpha=30°$

32- i) P(*ABCD*)=38cm

ii) P(*ABCDEF*)=32cm

33- 48cm

34- 32cm

35- 24cm y 7cm

36- 22cm

37- i) 32π cm   ii) $32+\frac{14}{3}\pi$ cm

38- i) $44{,}1\,cm^2$ ii) $3{,}8891\,cm^2$ iii) $3\sqrt{3}\,cm^2$

39- 0,16423m

40- PQ = QR = RM = 12cm; MN = NP = $6\sqrt{2}$ cm

41- 2,403m y $5{,}77\,m^2$

42- 0,38m

43- $45\,cm^2$

44- $\frac{21}{128}$

45- $\frac{25}{2}\pi\,cm^2$

48- $73{,}125\,m^2$ y $120{,}375\,m^2$

49- $180\,cm^2$ y 9cm

50- 8m

51- $250\,cm^3$

52- $125\,cm^3$

53- $324\,cm^3$

54- $\frac{250}{3}\,cm^3$

55- $\frac{2}{\pi}\,m$

56- $6(\sqrt{12}-\sqrt{6})$

57- 4,39

58- $3{,}77\times10^{-3}\,m^3$ y $1892{,}82\,cm^2$

59- 4,963cm

60- $\frac{4864}{3}\pi\,cm^3$

61- 177

AUTOEVALUACIÓN 8

4. PB = $3\sqrt{2}$ cm

5. i) 2 *l* ii) 8

CAPITULO 9 - TRIGONOMETRÍA

1- i) $\frac{\pi}{180}$ rad. ii) $\frac{\pi}{12}$ rad. iii) $\frac{7}{50}\pi$ rad iv) $\frac{19}{20}\pi$ rad

2- i) $42°58'18{,}6''$ ii) $36°$ iii) $57°17'44{,}81''$ iv) $171°53'14{,}4''$

3- 4π

4- $\frac{\pi}{8}$

5- 2 rad

6- i) 6 ii) 5

7- a) $\frac{7}{3}\pi, \frac{13}{3}\pi, \frac{25}{3}\pi$

b) i) no ii) no iii) si

8-

α	complemento de α	suplemento de α
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\pi$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$-\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$-25°$	$115°$	$205°$

9- b)

α	simétrico de α
$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

11- i) (3, 0)
ii) (-3, 0)
iii) (-3, 0)
iv) (3, 0)
v) (-3, 0)
vi) $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$

12- i) $sen\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

ii) $sen\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

iii) $sen\alpha=0$, $\cos\alpha=1$

iv) $sen\alpha=0$, $\cos\alpha=1$

v) $sen\alpha=1$, $\cos\alpha=0$

vi) $sen\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

13- a)

	Ic.	IIc.	IIIc.	IVc.
$sen\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+

b) i) > 0 iv) > 0

ii) < 0 v) < 0

iii) < 0 vi) > 0

14- i) $x = k\pi;\ k \in Z$ iv) $2k\pi;\ k \in Z$

ii) $x = (2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in Z$ v) $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi;\ k \in Z$

iii) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ k \in Z$ vi) $\pi + 2k\pi;\ k \in Z$

15- i) $(1 - senx)(1 + senx) = 1 - sen^2 x = \cos^2 x$

ii) $sen^2(x + 4\pi) = sen^2(x + 2\pi) = sen^2 x = 1 - \cos^2 x$

16- i) V iii) V v) V

ii) V iv) V vi) F

17- i) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

18- i) F iii) V v) V vii) F

ii) F iv) V vi) V

19-

	Ic.	IIc.	IIIc.	IVc.
sen α	+	+	–	–
cos α	+	–	–	+
tg α	+	–	+	–
ctg α	+	–	+	–
sec α	+	–	–	+
cosec α	+	+	–	–

20- i) V ii) V iii) F

21- i) $tgx = \frac{senx}{\cos x} = senx\frac{1}{\cos x} = senx.\sec x$

ii) $\text{ctg}\, x = \frac{\cos x}{senx} = \cos x \frac{1}{senx} = \cos x \cdot \text{cosec}\, x$

iii) $1 + tg^2 x = 1 + \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

iv) $1 + \text{ctg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{sen^2 x + \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen^2 x} = \ = \text{cosec}^2 x$

v) $sen^2 + \cos^2 = 1 \Rightarrow tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + tg^2 x}}$

22-

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen α	0	1	0	-1	0
cos α	1	0	-1	0	1
tg α	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0
ctg α	$\nexists$	0	$\nexists$	0	$\nexists$
sec α	1	$\nexists$	-1	$\nexists$	1
cosec α	$\nexists$	1	$\nexists$	-1	$\nexists$

23- i) $k\pi;\ k \in Z$ iii) $\nexists$

ii) $(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in Z$ iv) $\nexists$

24- i) -2 iv) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

ii) $\frac{1}{2}$ v) $\frac{4}{5}$

iii) > 1

25- i) $\cos x = \frac{24}{25}$, $tgx = \frac{7}{24}$, $\text{ctg}\, x = \frac{24}{7}$, $\sec x = \frac{25}{24}$, $\text{cosec}\, x = \frac{25}{7}$

ii) $sen\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{ctg}\,\alpha = -1$, $\sec\alpha = -\sqrt{2}$, $\text{cosec}\,\alpha = \sqrt{2}$

iii) $senx = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tgx = -\sqrt{3}$, $\text{ctg}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec x = 2$, $\text{cosec}\, x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

26- i) F iii) F

ii) V iv) V

27- ii)

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$sen\,x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\,x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

28- i) 10   iii) 4   v) $2\sqrt{2}$

ii) 6   iv) 0

29- i) $\frac{3}{4}\pi$ iii) $\frac{7}{4}\pi$

ii) $\frac{11}{6}\pi$

30- i) $\omega = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi;\ k \in Z$ iii) $\omega = \frac{7}{4}\pi + 2k\pi;\ k \in Z$

ii) $\omega = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi;\ k \in Z$

31- i) $b = 4$, $C = 36°52'12''$, $B = 53°7'48''$

ii) $C = 60°$, $a = 4$, $c = 2\sqrt{3}$

iii) $C = \frac{\pi}{4}$, $b = 6{,}6\sqrt{2}$, $c = 6{,}6\sqrt{2}$

iv) $a = 4\sqrt{5}$, $C \cong 63°26'6''$, $B = 26°33'54''$

32- $12\sqrt{3}$ cm

33- 440cm^2

34- 43m

35- 6m

36- 2,2495 km

37- $60°15'18''$

38- i) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ii) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

iii) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ iv) $2-\sqrt{3}$

39- i) $sen(\alpha+\beta) = \frac{3\sqrt{91}+12}{50}$, $sen(\alpha-\beta) = \frac{3\sqrt{91}-12}{50}$

ii) $sen(\alpha+\beta) = \frac{3\sqrt{3}-5}{2\sqrt{34}}$, $sen(\alpha-\beta) = \frac{3\sqrt{3}+5}{2\sqrt{34}}$

40-

i) $\frac{sen2x}{tg2x} = \frac{sen2x}{\frac{sen2x}{\cos 2x}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos x}} = \cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$

ii) $(senx+\cos x)^2 = sen^2 x + \cos^2 x + 2senx\cos x = 1 + sen2x$

iii)

$sen(x+y)sen(x-y) = (senx\cos y + \cos x seny)(senx\cos y - \cos x seny) =$

$= sen^2 x\cos^2 y - senx\cos y\cdot\cos x seny + \cos x seny\cdot senx\cos y - \cos^2 x sen^2 y =$

$= sen^2 x\cos^2 y - \cos^2 x sen^2 y =$

$= sen^2 x(1-sen^2 y) - (1-sen^2 x)sen^2 y =$

$= sen^2 x - sen^2 x sen^2 y - sen^2 y + sen^2 x sen^2 y = sen^2 x - sen^2 y$

iv)

$\frac{sen2x}{senx} - \frac{\cos 2x}{\cos x} = \frac{\cos x.sen2x - sen x.\cos 2x}{sen x.\cos x} =$

$= \frac{\cos x(2.sen x.\cos x) - senx.(\cos^2 x - sen^2 x)}{sen x.\cos x} = \frac{2sen x.\cos^2 x - senx\cos^2 x + sen^3 x}{sen x.\cos x} =$

$= \frac{sen x.\cos^2 x + sen^3 x}{sen x.\cos x} = \frac{sen x.(\cos^2 x + sen^2 x)}{sen x.\cos x} = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos x} =$

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$

v) $\frac{\cos(x-y)}{\cos x.sen\,y} = \frac{\cos x.\cos y + sen\,x.sen\,y}{\cos x.sen\,y} = \frac{\cos y}{sen\,y} + \frac{sen\,x}{\cos x} = ctg\,y + tg\,x$

AUTOEVALUACIÓN 9

2. 202,98188 m^2

3. $\sec\beta - tg\beta.sen\beta = \frac{1}{\cos\beta} - \frac{sen^2\beta}{\cos\beta} = \frac{1-sen^2\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos^2\beta}{\cos\beta} = \cos\beta$

4. $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{2\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}-1\right)}$

5. $sen\,2\alpha=\dfrac{24}{25}$

6. $\cos\theta=-\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

7. $30\sqrt{3}$ m

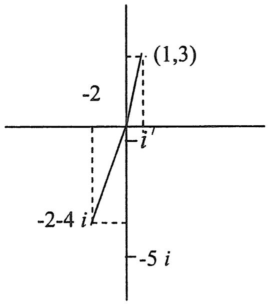
8. a) $sen(\alpha+\beta)=\dfrac{3\sqrt{91}+12}{50}$ y $\tan 2\alpha=\dfrac{24}{7}$

b) $\tan(\alpha+\beta)=-\dfrac{24}{7}$ y $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{3\sqrt{34}-5\sqrt{102}}{68}$

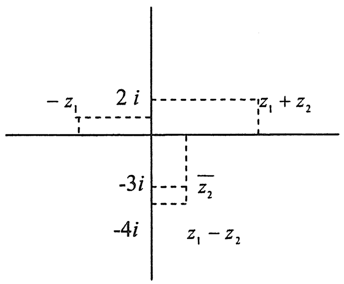
CAPÍTULO 10 – PLANO COMPLEJO. FORMA TRIGONOMÉTRICA Y POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

1-

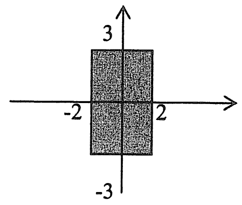


2- $z_1 \in$ IVc. ; $z_2 \in$ Ic. ; $z_3 \in$ IIc.

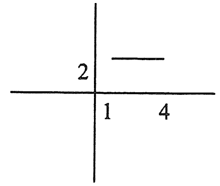
3-



4- a)



b)



c) $z_1 \in A$ y $z_2 \notin B$

5- a) Si $z=a+bi$

$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |-z|=|-a-bi|=\sqrt{(-a)^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

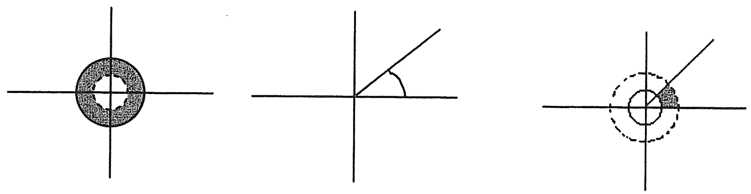
$|\bar{z}|=|a-bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |-\bar{z}|=|-a+bi|=\sqrt{(-a)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

b) $|z|^2=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)=z.\bar{z}$

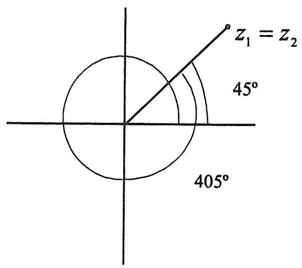
6- $\sqrt{2}_{\frac{\pi}{4}}$, 5_{0°, 2_{π}, $1_{\frac{3\pi}{2}}$

7- $3_{\frac{\pi}{6}}=3\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$; $1_{\frac{\pi}{2}}=i$; $\left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2=-4$

8-



9-



10- a) $(4\sqrt{2})_{\frac{2}{3}\pi}$

b) $1_{-\frac{\pi}{6}}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)_{-\frac{\pi}{4}}$

d) 16

11- a) $x_0 = 1_{\frac{\pi}{6}}$; $x_1 = 1_{\frac{5\pi}{6}}$; $x_2 = 1_{\frac{3\pi}{2}}$

b) $x_0 = 3_0$; $x_1 = 3_{\frac{2\pi}{3}}$; $x_2 = 3_{\frac{4\pi}{3}}$

c) $x_0 = 2_{\frac{\pi}{4}}$; $x_1 = 2_{\frac{3\pi}{4}}$; $x_2 = 2_{\frac{5\pi}{4}}$; $x_3 = 2_{\frac{7\pi}{4}}$

d) $x_0 = 4_{40^\circ}$; $x_1 = 4_{160^\circ}$; $x_2 = 4_{280^\circ}$

e) $x_0 = 3_{\frac{\pi}{2}} = 3i$; $x_1 = 3_{\frac{3\pi}{2}} = -3i$

f) $x_0 = (\sqrt[10]{2})_{\frac{\pi}{20}}$; $x_1 = (\sqrt[10]{2})_{\frac{9\pi}{20}}$; $x_2 = (\sqrt[10]{2})_{\frac{17\pi}{20}}$; $x_3 = (\sqrt[10]{2})_{\frac{5\pi}{4}}$; $x_4 = (\sqrt[10]{2})_{\frac{33\pi}{20}}$

12- a) $x_0 = 1_{\frac{5\pi}{24}}$; $x_1 = 1_{\frac{17\pi}{24}}$; $x_2 = 1_{\frac{29\pi}{24}}$; $x_3 = 1_{\frac{41\pi}{24}}$

b) $x_1 = 1 + i$; $x_2 = 1$

c) $x_1 = -1 - i$; $x_2 = -3 - 2i$

AUTOEVALUACIÓN 10

1. $(2^{-5/2})_{\frac{5}{4}\pi}$

3. $z_0 = 2_{-60^\circ}$ $\quad z_1 = 2_{12^\circ}$ $\quad z_2 = 2_{84^\circ}$

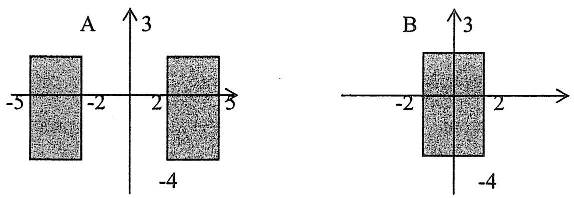
$z_3 = 2_{156^\circ}$ $\quad z_4 = 2_{228^\circ}$ $\quad z = 32_{60^\circ}$

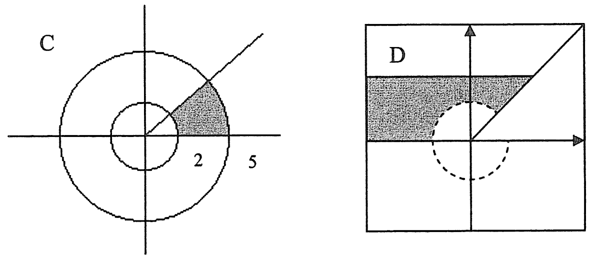
4- $z_0 = 2_{54^\circ}$ $\quad z_1 = 2_{126^\circ}$ $\quad z_2 = 2_{198^\circ}$

$z_3 = 2_{270^\circ}$ $\quad z_4 = 2_{342^\circ}$

5- $n = 6k$; $k \in \mathbb{N}$

8. a)





c) $z \notin A$, $z \in B$

CAPÍTULO 11 - FUNCIONES

1- i) No $\qquad$ ii) Sí $\qquad$ iii) No

En ii) Imf = $\{a,b\}$.

Preimágenes de a: 1,3 y 5.

Preimágenes de b: 2, 4 y 6.

2- i) $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}; f(\frac{\sqrt{2}}{10}) = \frac{1}{50}$.

ii) $\sqrt{2}$ no tiene preimagen. La preimagen de 0 es 0.

iii) $[0,1]$

3- $A = \{-2;2\}$; $\quad -2 \neq 2$ y $f(-2) \neq f(2)$

4- a) $P(b) = 2b + \frac{20}{b}$; $\quad Dom_P = \mathbb{R}^+$

b) $C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x}$; $\quad Dom_C = \mathbb{R}^+$

c) $S(x) = x^2 + \frac{8}{x}$; $\quad Dom_S = \mathbb{R}^+$

5- i) $\mathbb{R}$ $\qquad$ iii) $\mathbb{R}$ $\qquad$ v) $\mathbb{R} - \{3,2\}$

ii) $\mathbb{R} - \{-2,2\}$ $\qquad$ iv) $\mathbb{R} - \{25\}$ $\qquad$ vi) $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$

6- i) $f(0) = 1$; $f(1) = 0$; $f(5) = 25$

ii) 1y 0 son, respectivamente, las preimágenes de 0 y 1; -5 no tiene preimagen

7- a) $g(0) = g(1) = g(-5) = 7$; $g(4) = 11$; $g(t+2) = |t+7| + |t|$;

$g(x-1) = |x+4| + |x-3|$

b) No

8- i) p(–1) = 12; p (2) = 0

ii) $x = 2$ o $x = 3$

iii) p (x) > 0 en $(-\infty, 2)$ y en $(3, +\infty)$

p(x) < 0 en (2, 3)

9- i) 1

ii) 9

iii) x^2

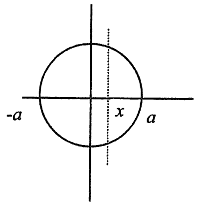
iv) $(x + h)^2 - 2(x + h) + 1$

v) $\left\{\frac{2}{3}, 0\right\}$

vi) $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

10- $Dom_r = \{x / q(x) \neq 0\}$

11- No pues a cada x ∈ (–a, a) le corresponderían dos imágenes.



12- interseca a la misma en, a lo sumo, un punto.

13- a) $Dom_m = \mathbb{R}$; $\text{Im}_m = \{3\}$; $m(-1) = m(2) = 3$

b) $Dom_p = \text{Im}_p = \mathbb{R} - \{0\}$; $p(-2) = -\frac{1}{2}$, $p\left(\frac{1}{2}\right) = 2$

c) $Dom_G = [0,9]$; $\text{Im}_m = [-34,2]$; $G(1) = -2$, $G(4) = -14$

d) $Dom_q = [-2,3]$; $\text{Im}_m = [-3,1] \cup \{3\}$; $q(-1) = -1$, $q(0) = 1$, $q(2) = 3$

14- i) Si

ii) Si

iii) No

iv) No

15- i) No

ii)Si

...la interseca en, a lo sumo, un punto.

16- No

17- No pues, por ejemplo, la función está definida en 5/2 pero no en – 5/2. El dominio de una función par o impar debe ser un conjunto simétrico con respecto al origen.

18- i) No es posible.

ii) Como f es impar y 0 ∈ D_f resulta:

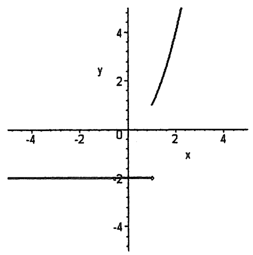
f(0) = – f(–0), de donde:

f(0) = – f(0) y, por lo tanto, f(0) = 0 (cero es el único número que coincide con su opuesto)

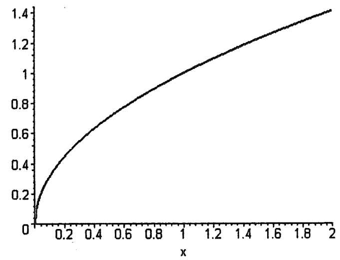
19- f no es impar pues f(0) ≠ 0

20-

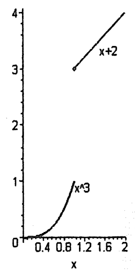
i)



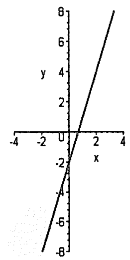
iv)



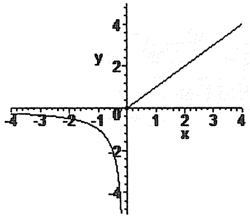
ii)



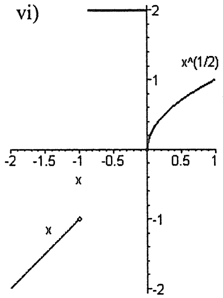
v)



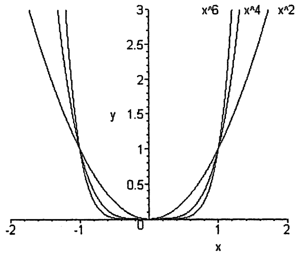
iii)



vi)



21-



22- i) $Dom_{f+g} = \mathbb{R} - \{-2\}$

ii) $(f+g)(2) = \dfrac{41}{4}$; $(f.g)(1) = \dfrac{4}{3}$; $(f-g)(3) = \dfrac{89}{5}$; No está definida $\dfrac{f}{g}$ en -2

iii) $Dom_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{-2\}$; $Dom_{\frac{g}{f}} = \mathbb{R} - \{0,-3,-2\}$

23- $(f+g)(2) \approx 2{,}4$; $(f-g)(2) \approx 0{,}4$; $(f.g)(2) \approx 1{,}4$; $\dfrac{f}{g}(2) \approx 1{,}4$

24- i) Falso, por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$; $f+g$ no es una función par

ii) $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x), \quad \forall x \in Dom_{f+g}$

iii) $(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).[-g(x)] = -(f.g)(x), \quad \forall x \in Dom_{f.g}$

iv) Falso, por ejemplo, si $f(x) = x^5$ y $g(x) = x^3$; $\dfrac{f}{g}$ no es una función impar.

25- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (m_1 x + h_1) + (m_2 x + h_2) = (m_1 + m_2)x + (h_1 + h_2)$

por lo tanto $f+g$ es lineal

$(c.f)(x) = c.f(x) = c.(m_1 x + h_1) = c.m_1 x + ch_1$

por lo tanto $c.f$ es lineal

26- a) F c) V e) F

b) F d) F f) F

AUTOEVALUACIÓN 11

1. $f(t) = 2t$

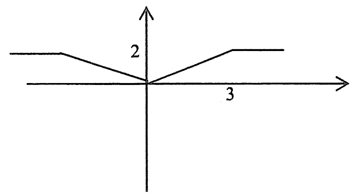
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{36} x^2$

3. i) $Dom_f = (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$

   ii) $Dom_f = (1;+\infty)$

   iii) $Dom_f = \mathbb{R}^+ - \{1\}$

4. por ejemplo:



5. a) i) $\forall x \in \mathbb{R}$ ii) $x = 0$ iii) $\forall x \in \mathbb{R}$

   b) i) $x = 0$ ii) $\forall x \in \mathbb{R}$ iii) $x = 0$

6. a) $f(1) = 2$; $f(2) = 5$; $f(3) = 6 + \sqrt{2}$

   b) Sí, $x = 5$

   c) Sí, $\forall x < 1$

MISCELÁNEA

1- $A \cap \overline{B} = \{-1\} \cup [0;2]$

2- a) No   b) No   c) Si

3- Rta.: hay 5 alumnos que estudiarán otra carrera

5- $k \geq 20 \vee k \leq -20$

6- Rta.: $14\,cm \times 28\,cm$

7- Rta.: la altura es de $200m$

8- $DE = 13{,}1$

9- a) $P(x) = (x-1).(x+2).(x+3i).(x-3i)$

b) $Q(x) = (x+1)^2.(x-1).(x - \frac{1+\sqrt{3}i}{2}).(x - \frac{1-\sqrt{3}i}{2})$

c) $R(x) = (x+i).(x-i).(x-1-i).(x-1+i).(x+1+i).(x+1-i)$

10- a) $P(x) = \frac{1}{16}.(x^2 - 2x + 5).(x-1)^2$

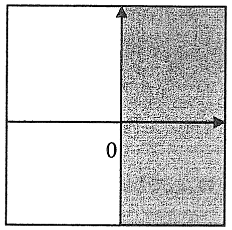
b) $P(x) = \frac{1}{4}.(x^2+1)^2.(x+3)$

11- Rta.: el minutero giró 2070° y la manecilla $172°30'$

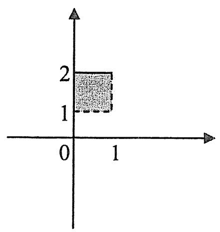
12- Rta.: en la cuenta de ahorro \$5000 y en un fondo de inversión \$10000

13-

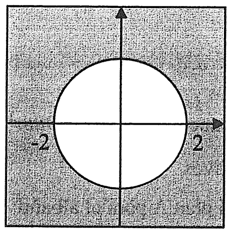
a)



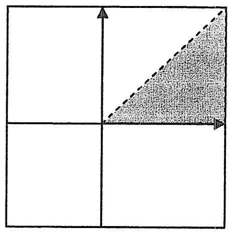
b)



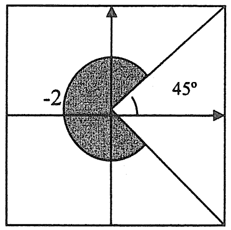
c)



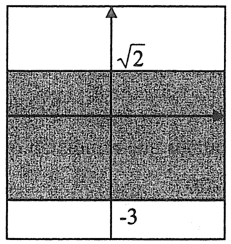
d)



e)



f)



14- i) F   iv) V   vii) V   x) F

ii) F   v) F   viii) F   xi) V

iii) V   vi) V

15- a) Rta.: Tiene 4 gallinas

b) Todas tienen sentido del humor

16- Rta.: Perdió 26 peleas

17- $k = 2 \vee k = \frac{1}{2}$

18- Rta.: la altura estimada es de 5807,66 pies

20- Rta.: $A(150) = 127500m^2$ y $A(200) = 160000m^2$

21- Rta.: Debe vender más de 8 macetas.

22- a) $Dom_f = \mathrm{R}$

b) $Dom_g = \mathbb{R} - \{-1;1\}$

c) $Dom_h = \mathbb{R}$

d) $Dom_t = (-\infty;-3) \cup \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$

23- Rta.: el número es -11 o 1

24- 29 y 18

25- $BE = 5cm \wedge EC = 1cm$

26- Rta.: El instituto tiene 21 alumnos

27- Rta.: El segundo botellón quedó mas aguado

28- $V = 386400cm^3$. Los peces ocupan $13800cm^3$

29- 140 y 35

30- a) $V = 7981092m^3$ b) Rta.: Serían necesarios $88035{,}98m^2$

31- Rta.: Se incrementó un 24,8% durante tres años consecutivos

32- Rta.: Si la tarea requiere menos de 100 horas, es mejor el plan A para el albañil

33- Rta.: El salario mensual era de \$1250

34- $c = 1 \vee c = -9$

35- Rta.: La altura de los postes es de 52m

36- Rta.: El número es $\frac{7}{4}$

37- i) $C(x) = 2x^2 + x + 5$; $R(x) = 2x - 5$

ii) $C(x) = x^2 + 2$; $R(x) = 2x^2 + 5$

iii) $C(x) = x^3 + x$; $R(x) = x - 1$

iv) $C(x) = x^3 + 1$; $R(x) = 0$

v) $C(x) = x^4 - y^4$; $R(x) = 0$

38- i) Por ejemplo,

$P(x) = (x - \frac{17}{9})(x+1)^2$

ii) Por ejemplo,

$P(x) = (x-2)^2(x+1)$