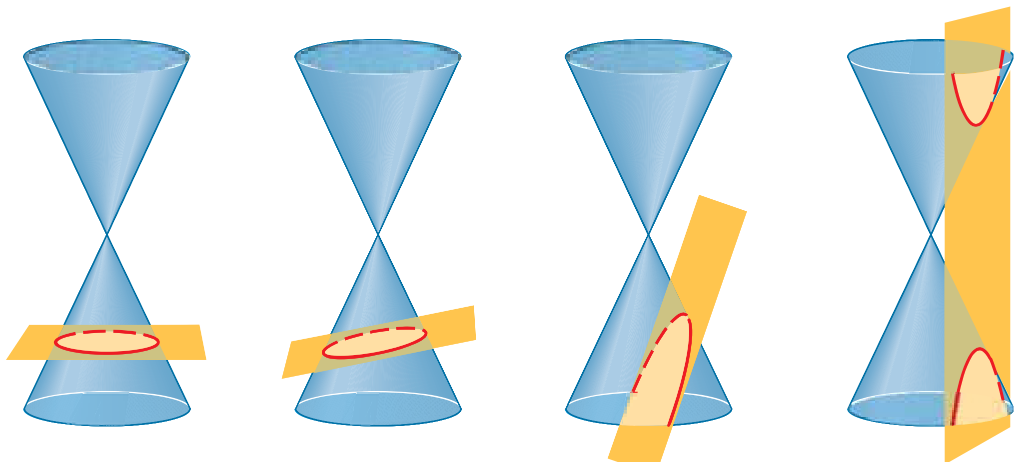
SCE/Sandia National Laboratory

CAPÍTULO 11

SECCIONES CÓNICAS

Las secciones cónicas son las curvas que obtenemos cuando hacemos un corte recto en un cono, como se ve en la figura. Por ejemplo, si un cono se corta horizontalmente, la sección transversal es una circunferencia. Entonces, una circunferencia es una sección cónica. Otras formas de cortar un cono producen parábolas, elipses e hipérbolas.



Circunferencia   Elipse   Parábola   Hipérbola

Nuestro objetivo en este capítulo es hallar ecuaciones cuyas gráficas son las secciones cónicas. Ya sabemos de la Sección 1.8 que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es una circunferencia. Encontraremos ecuaciones para cada una de las otras secciones al analizar sus propiedades *geométricas.*

Las secciones cónicas tienen propiedades interesantes que las hacen útiles para numerosas aplicaciones prácticas. Por ejemplo, una superficie reflectora con secciones transversales parabólicas concentra luz en un solo punto. Esta propiedad de una parábola se utiliza en la construcción de plantas solares para generación de electricidad, como la de California que se ve en la foto de esta página.

11.1 PARÁBOLAS

Definición geométrica de una parábola ▶ Ecuaciones y gráficas de parábolas ▶ Aplicaciones

▼ Definición geométrica de una parábola

Vimos en la Sección 3.1 que la gráfica de la ecuación

$$y = ax^2 + bx + c$$

es una curva en forma de U llamada *parábola* que abre ya sea hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si el signo de a es positivo o negativo.

En esta sección estudiamos parábolas desde un punto de vista geométrico más que algebraico. Empezamos con la definición geométrica de una parábola y mostramos cómo esto nos lleva a la fórmula algebraica con la que ya estamos familiarizados.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA PARÁBOLA

Una **parábola** es el conjunto de puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija l (llamada **directriz**).

Esta definición está ilustrada en la Figura 1. El **vértice** V de la parábola se encuentra a la mitad entre el foco y la directriz, y el **eje de simetría** es la recta que corre por el foco perpendicular a la directriz.

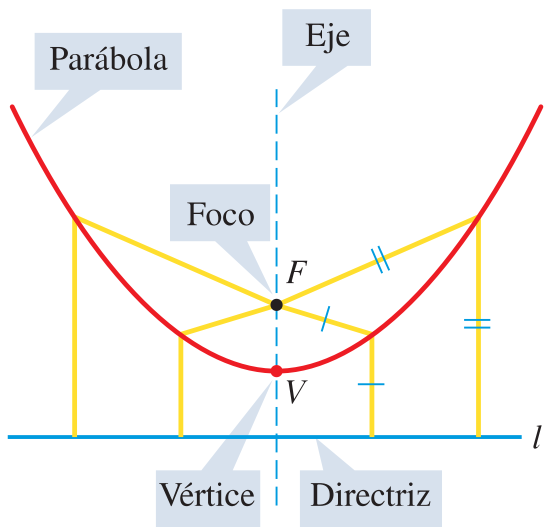


FIGURA 1

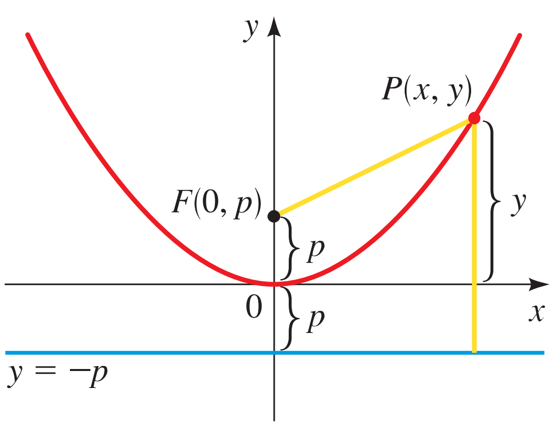


FIGURA 2

En esta sección restringimos nuestra atención a parábolas que están situadas con el vértice en el origen y que tienen un eje de simetría vertical u horizontal. (Parábolas en posiciones más generales se estudian en las Secciones 11.4 y 11.5.) Si el foco de dicha parábola es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical y la directriz tiene la ecuación $y = -p$. La Figura 2 ilustra el caso $p > 0$.

Si $P(x, y)$ es cualquier punto en la parábola, entonces la distancia de P al foco F(usando la Fórmula de la Distancia) es

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

La distancia de P a la directriz es

$$|y - (-p)| = |y + p|$$

Por la definición de una parábola estas dos distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Expanda}$$

$$x^2 - 2py = 2py \qquad \text{Simplifique}$$

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba; pero si $p < 0$, abre hacia abajo. Cuando x es sustituida por $-x$ la ecuación permanece sin cambio, de modo que la gráfica es simétrica respecto al eje y.

Ecuaciones y gráficas de parábolas

El recuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y características de una parábola con eje vertical.

PARÁBOLA CON EJE VERTICAL

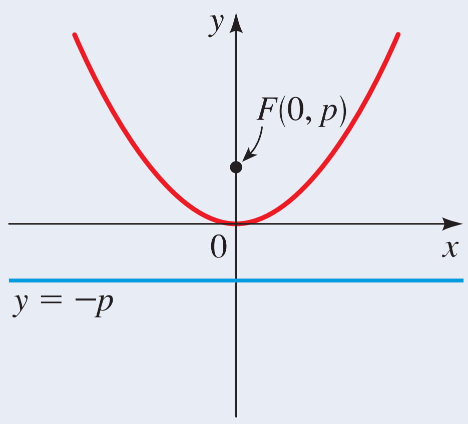
La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

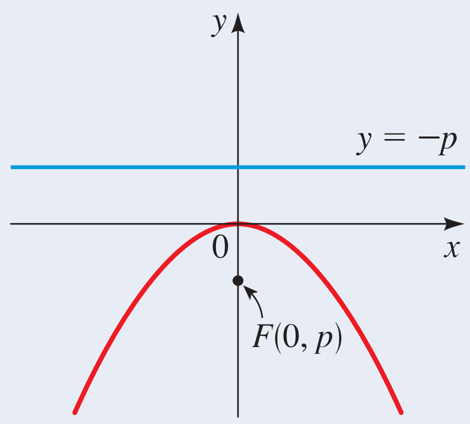
es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(0, p)$
DIRECTRIZ	$y = -p$

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.



$x^2 = 4py$ con $p > 0$



$x^2 = 4py$ con $p < 0$

EJEMPLO 1 | Hallar la ecuación de una parábola

Encuentre una ecuación para la parábola con vértices $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Como el foco es $F(0, 2)$, concluimos que $p = 2$ (de modo que la directriz es $y = -2$). Entonces la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Como $p = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Vea Figura 3.

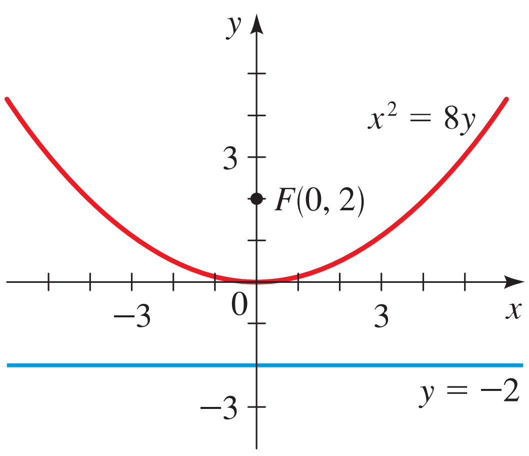


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **29** Y **41**

EJEMPLO 2 | Hallar el foco y directriz de una parábola a partir de su ecuación

Encuentre el foco y directriz de la parábola $y = -x^2$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma normal $x^2 = -y$. Comparando esto con la ecuación general $x^2 = 4py$, vemos que $4p = -1$, de modo que $p = -\frac{1}{4}$. Entonces el foco es $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestra en la Figura 4(a). También podemos trazar la gráfica usando una calculadora graficadora como se muestra en la Figura 4(b).

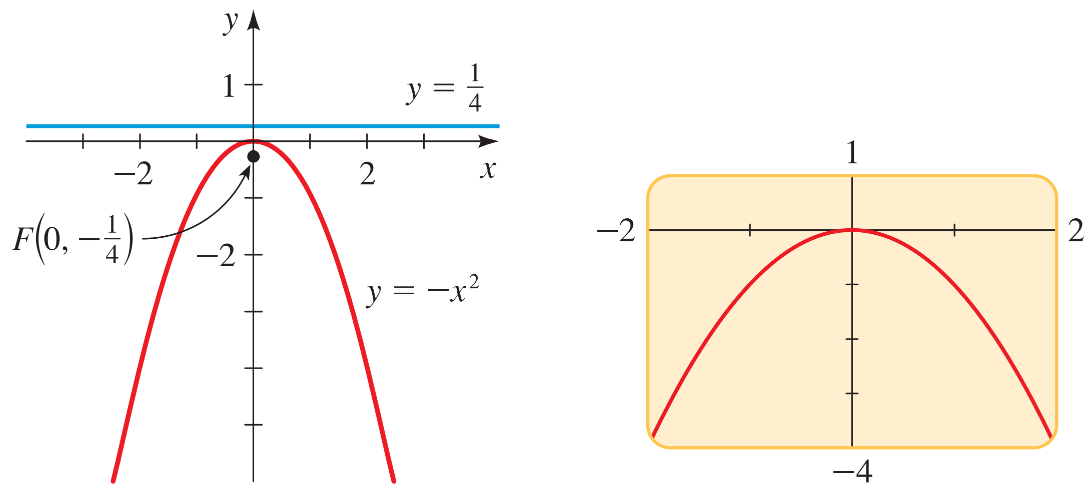


FIGURA 4

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Reflejar la gráfica de la Figura 2 respecto de la recta diagonal $y = x$ tiene el efecto de intercambiar las funciones de x y y. Esto resulta en una parábola con eje horizontal. Por el mismo método que antes, podemos demostrar las siguientes propiedades.

PARÁBOLA CON EJE HORIZONTAL

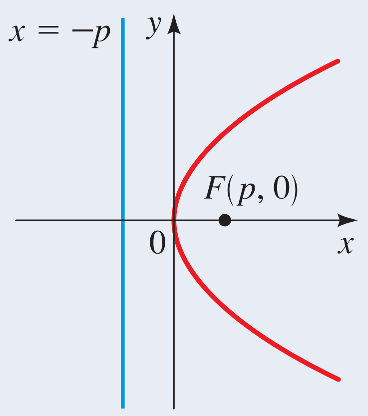
La gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4px$$

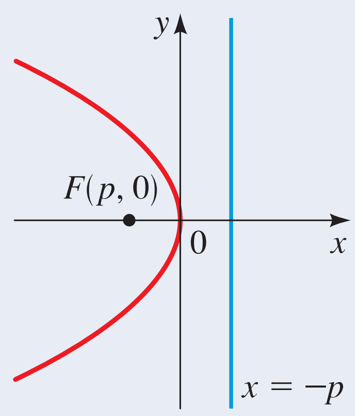
es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(p, 0)$
DIRECTRIZ	$x = -p$

La parábola abre a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$.



$y^2 = 4px$ con $p > 0$



$y^2 = 4px$ con $p < 0$

EJEMPLO 3 | Una parábola con eje horizontal

Una parábola tiene la ecuación $6x + y^2 = 0$.

(a) Encuentre el foco y directriz de la parábola y trace la gráfica.

(b) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN

(a) Para hallar el foco y directriz, ponemos la ecuación dada en la forma normal $y^2 = -6x$. Comparando esto con la ecuación general $y^2 = 4px$, vemos que $4p = -6$, de modo que $p = -\frac{3}{2}$. Entonces el foco $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Como $p < 0$, la parábola abre a la izquierda. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestra en la Figura 5(a) a continuación.

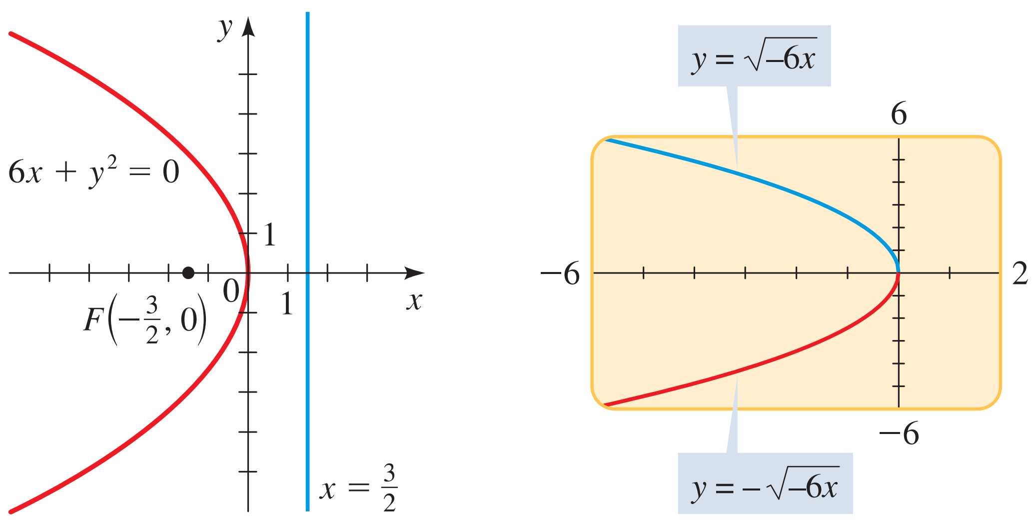
(b) Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora, necesitamos despejar y

$$
\begin{aligned}
6x + y^2 &= 0 \\
y^2 &= -6x && \text{Reste } 6x \\
y &= \pm\sqrt{-6x} && \text{Tome raíces cuadradas}
\end{aligned}
$$

Para obtener la gráfica de la parábola, graficamos ambas funciones

$$y = \sqrt{-6x} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{-6x}$$

como se ve en la Figura 5(b).



(a) (b)

FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

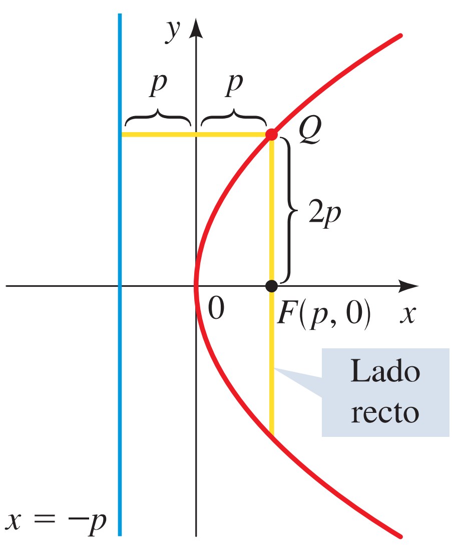


FIGURA 6

La ecuación $y^2 = 4px$, no define y como función de x (vea página 158). Por lo tanto, para usar calculadora graficadora para graficar una parábola con eje horizontal, primero debemos despejar y. Esto lleva a dos funciones: $y = \sqrt{4px}$ y $y = -\sqrt{4px}$. Necesitamos graficar ambas funciones para obtener la gráfica completa de la parábola. Por ejemplo, en la Figura 5(b) teníamos que graficar $y = \sqrt{-6x}$ y $y = -\sqrt{-6x}$ para graficar la parábola $y^2 = -6x$.

Podemos usar las coordenadas del foco para estimar el "ancho" de una parábola cuando tracemos su gráfica. El segmento de recta que pasa por el foco y es perpendicular al eje, con puntos extremos en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro focal** de la parábola. De la Figura 6 podemos ver que la distancia de un punto extremo Q del lado recto a la directriz también es $|2p|$. En consecuencia, la distancia de Q al foco también debe ser $|2p|$ (por la definición de una parábola), de modo que el diámetro focal es $|4p|$. En el siguiente ejemplo usamos el diámetro focal para determinar el "ancho" de una parábola cuando la grafiquemos.

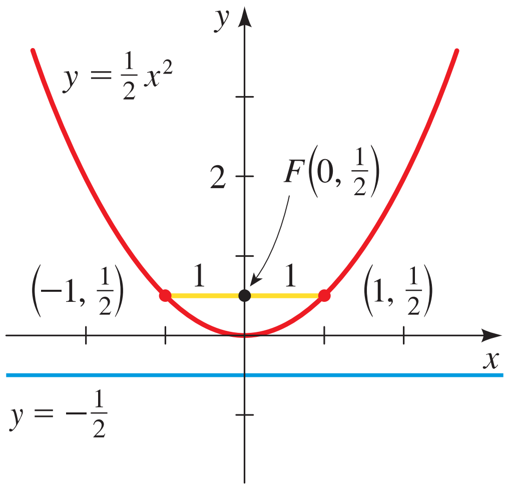


FIGURA 7

EJEMPLO 4 | El diámetro focal de una parábola

Encuentre el foco, directriz y diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero ponemos la ecuación en la forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique por 2, cambie lados}$$

De esta ecuación vemos que $4p = 2$, de modo que el diámetro focal es 2. Al despejar p resulta $p = \frac{1}{2}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Como el diámetro focal es 2, el lado recto se prolonga 1 unidad a la izquierda y 1 unidad a la derecha del foco. La gráfica está trazada en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

En el siguiente ejemplo graficamos una familia de parábolas, para mostrar la forma en que cambiar la distancia entre los focos y el vértice afecta el "ancho" de la parábola.

EJEMPLO 5 | Una familia de parábolas

(a) Encuentre ecuaciones para las parábolas con vértice en el origen y focos $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F_3(0, 1)$, y $F_4(0, 4)$.

(b) Trace las gráficas de las parábolas del inciso (a). ¿Qué concluye usted?

SOLUCIÓN

(a) Como los focos están en el eje y positivo, las parábolas abren hacia arriba y tienen ecuaciones de la forma $x^2 = 4py$. Esto lleva a las siguientes ecuaciones

Foco	p	Ecuación $x^2 = 4py$	Forma de la ecuación para calculadora graficadora
$F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$	$p = \frac{1}{8}$	$x^2 = \frac{1}{2}y$	$y = 2x^2$
$F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$p = \frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$	$y = 0.5x^2$
$F_3(0, 1)$	$p = 1$	$x^2 = 4y$	$y = 0.25x^2$
$F_4(0, 4)$	$p = 4$	$x^2 = 16y$	$y = 0.0625x^2$

(b) Las gráficas están trazadas en la Figura 8. Vemos que cuanto más cercano está el foco del vértice, más angosta es la parábola.

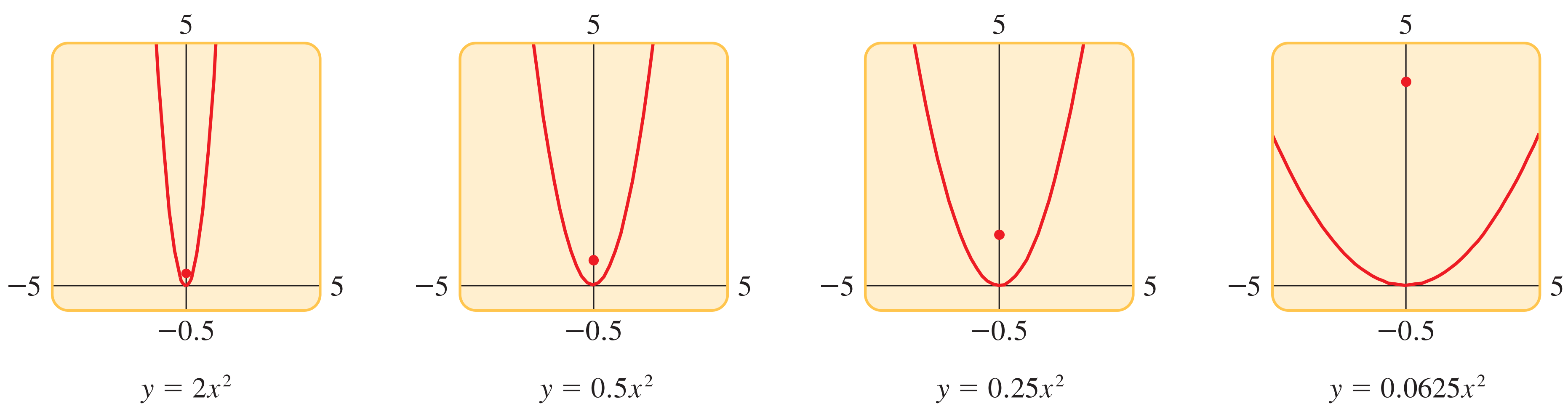


FIGURA 8 Familia de parábolas

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Aplicaciones

Las parábolas tienen una importante propiedad que las hace útiles como reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente colocada en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se reflejará de modo tal que viaja paralela al eje de la parábola (vea Figura 9). Entonces, un espejo parabólico refleja la luz en un haz de rayos paralelos. Recíprocamente, la luz que se aproxima al reflector en rayos paralelos a este eje de simetría se concentra en el foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar con uso de cálculo, se utiliza en la construcción de telescopios reflectores.

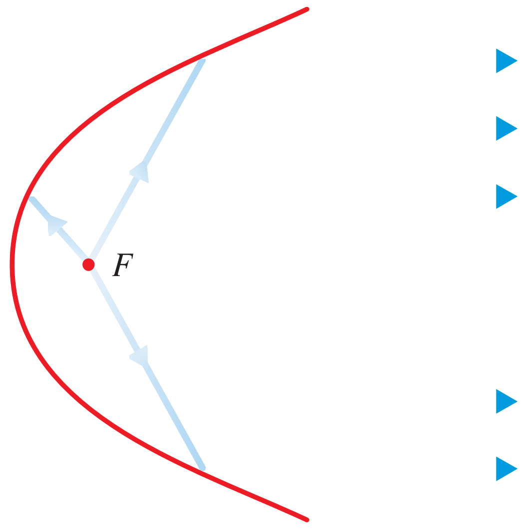


FIGURA 9 Reflector parabólico

EJEMPLO 6 | Hallar el punto focal de un reflector buscador

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un "tazón", que mide 12 pulgadas de ancho de borde a borde y 8 pulgadas de profundidad, como se ve en la Figura 10. Si el filamento de la bombilla eléctrica está situado en el foco, ¿a qué distancia está del vértice del reflector?

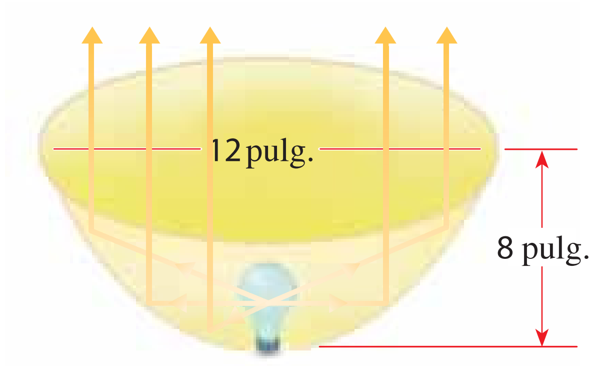


FIGURA 10 Un reflector parabólico

ARQUÍMEDES (287-212 a.C.) fue el más grande matemático de la Antigüedad. Nació en Siracusa, colonia griega de Sicilia, una generación después de Euclides (vea página 497). Uno de sus muchos descubrimientos es la Ley de la Palanca (vea página 71). Es famoso por haber dicho: "Dadme una palanca y un fulcro y moveré al mundo."

Renombrado como genio mecánico por sus numerosos inventos de ingeniería, diseñó poleas para levantar barcos pesados y el tornillo espiral para transportar agua a niveles más altos. Se dice que usó espejos parabólicos para concentrar rayos del Sol para encender fuego a los barcos romanos que atacaban Siracusa.

El rey Herón II de Siracusa una vez sospechó que un orfebre se guardó parte del oro destinado para la corona del Rey y que lo había sustituido con una cantidad igual de plata. El Rey pidió consejo a Arquímedes. Cuando Arquímedes se encontraba profundamente inmerso en sus pensamientos en un baño público, descubrió la solución al problema del Rey cuando observó que el volumen de su cuerpo era el mismo que el volumen de agua desplazado de la tina de baño. Usando esta idea, pudo medir el volumen de cada corona y así determinar cuál era la corona más densa, toda de oro. La historia nos dice que salió desnudo, corriendo hacia su casa, gritando: "Eureka, Eureka" ("¡Lo he encontrado, lo he encontrado!" Este incidente atestigua el enorme poder de concentración de Arquímedes.

A pesar de su proeza en ingeniería, Arquímedes se enorgullecía de sus descubrimientos matemáticos entre los que se incluyen las fórmulas para el volumen de una esfera $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ y el área superficial de una esfera $(S = 4\pi r^2)$ y un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

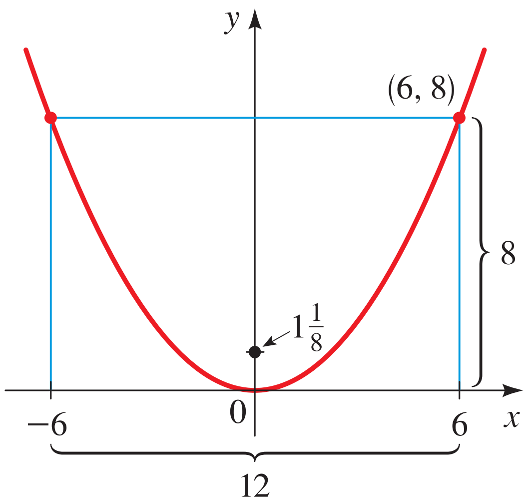


FIGURA 11

SOLUCIÓN Introducimos un sistema de coordenadas y colocamos una sección transversal parabólica del reflector de modo que su vértice se encuentre en el origen y su eje sea vertical (vea Figura 11). Entonces la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la Figura 11 vemos que el punto (6, 8) está en la parábola. Usamos esto para hallar p.

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto (6, 8) satisface la ecuación } x^2 = 4py$$

$$36 = 32p$$

$$p = \tfrac{9}{8}$$

El foco es $F\left(0, \frac{9}{8}\right)$, de modo que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$. Como el filamento está colocado en el foco, está situado a $1\frac{1}{8}$ pulgadas del vértice del reflector.

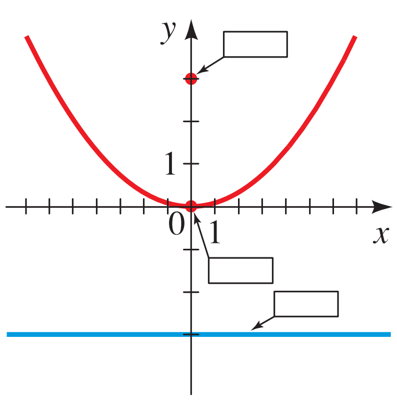
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

11.1 EJERCICIOS

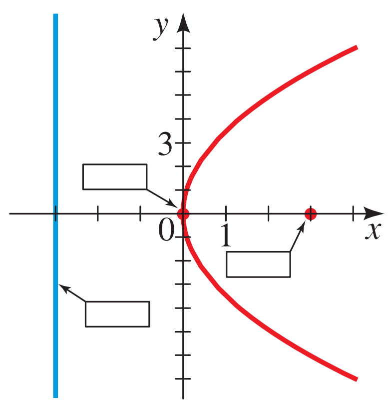
CONCEPTOS

1. Una parábola es el conjunto de todos los puntos del plano que son equidistantes con un punto fijo llamado ________y de una recta fija llamada _________de la parábola.
2. La gráfica de la ecuación $x^2 = 4py$ es una parábola con foco F(_, _) y directriz y = ____. Por lo tanto, la gráfica de $x^2 = 12y$ es una parábola con foco F(__, __) y directriz y = _____.
3. La gráfica de la ecuación $y^2 = 4px$ es una parábola con foco F(_, _) y directriz x = ____. Por lo tanto, la gráfica de $y^2 = 12x$ es una parábola con foco F(__, __) y directriz x = _____.
4. Asigne coordenadas al foco, ecuación de la directriz y coordenadas del vértice en las gráficas dadas para las parábolas de los Ejercicios 2 y 3.

(a) $x^2 = 12y$



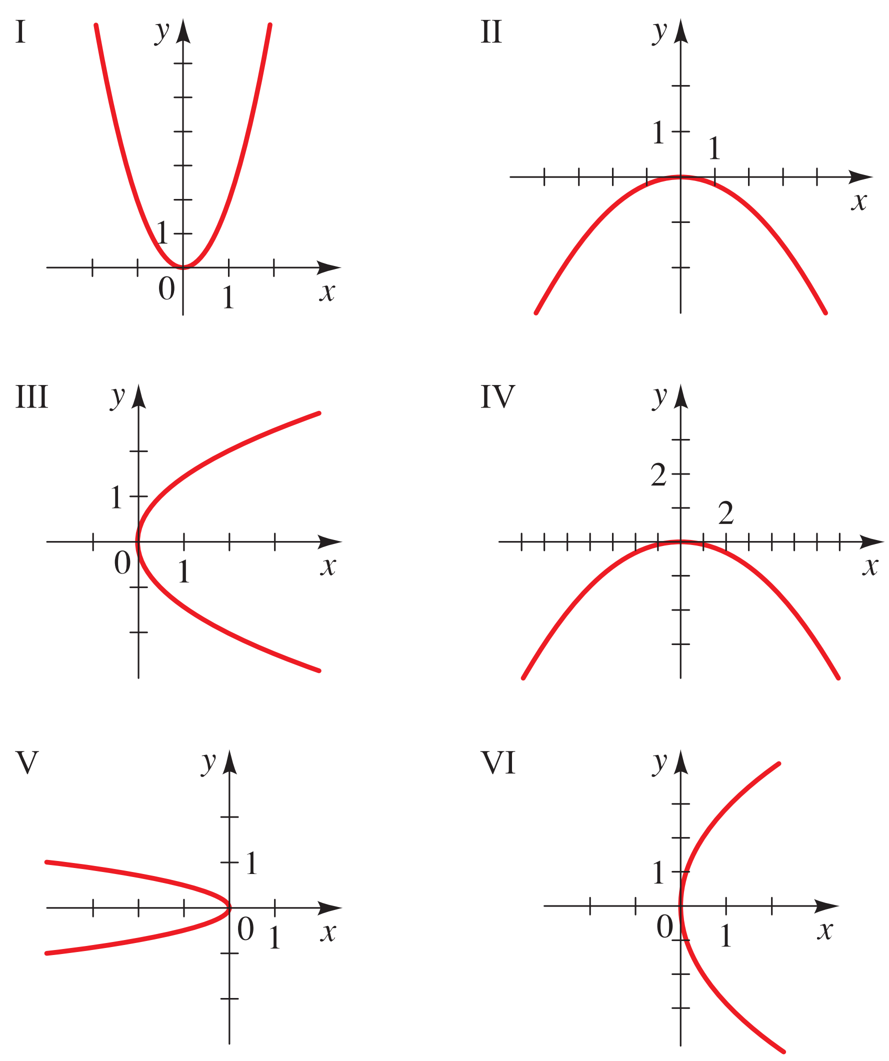
(b) $y^2 = 12x$



HABILIDADES

5-10 ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

5. $y^2 = 2x$
6. $y^2 = -\frac{1}{4}x$
7. $x^2 = -6y$
8. $2x^2 = y$
9. $y^2 - 8x = 0$
10. $12y + x^2 = 0$



11-22 ■ Encuentre el foco, directriz y diámetro focal de la parábola y trace su gráfica.

11. $x^2 = 9y$
12. $x^2 = y$
13. $y^2 = 4x$
14. $y^2 = 3x$
15. $y = 5x^2$
16. $y = -2x^2$
17. $x = -8y^2$
18. $x = \frac{1}{2}y^2$
19. $x^2 + 6y = 0$
20. $x - 7y^2 = 0$
21. $5x + 3y^2 = 0$
22. $8x^2 + 12y = 0$

23-28 ■ Use calculadora graficadora para graficar la parábola.

23. $x^2 = 16y$ **24.** $x^2 = -8y$

25. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **26.** $8y^2 = x$

27. $4x + y^2 = 0$ **28.** $x - 2y^2 = 0$

29-40 ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la(s) condición(es) dada(s).

29. Foco: $F(0, 2)$ **30.** Foco: $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

31. Foco: $F(-8, 0)$ **32.** Foco: $F(5, 0)$

33. Directriz: $x = 2$ **34.** Directriz: $y = 6$

35. Directriz: $y = -10$ **36.** Directriz: $x = -\frac{1}{8}$

37. El foco en el eje x positivo, a 2 unidades de distancia de la directriz

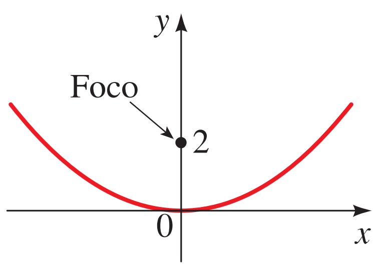
38. La directriz tiene punto de intersección 6 en el eje y

39. Abre hacia arriba con el foco a 5 unidades del vértice

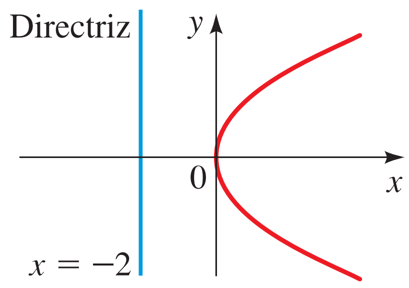
40. Diámetro focal 8 y foco en el eje y negativo

41-50 ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

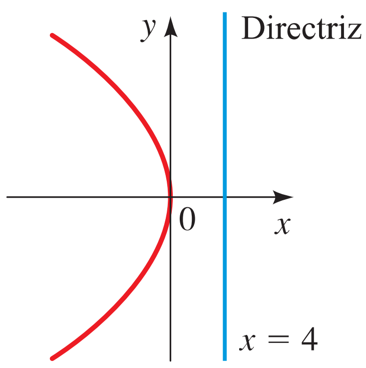
41.



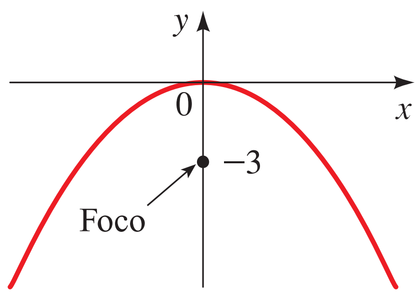
42.



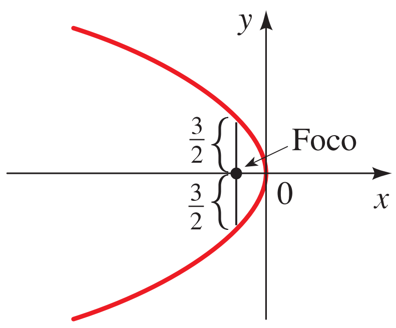
43.



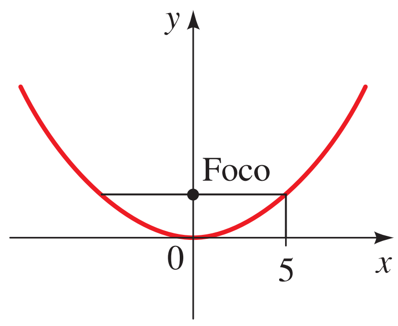
44.



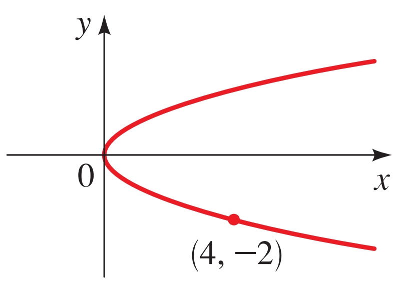
45.



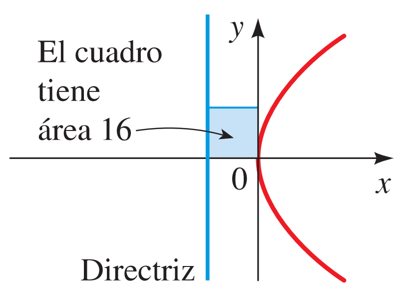
46.



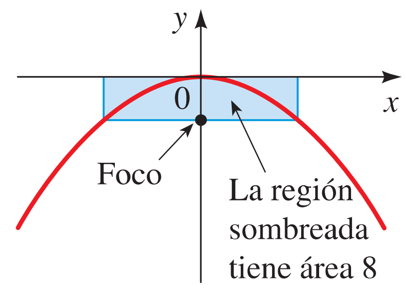
47.



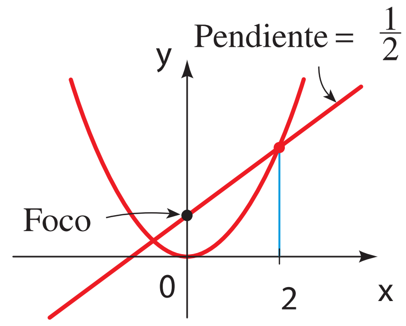
48.



49.



50.

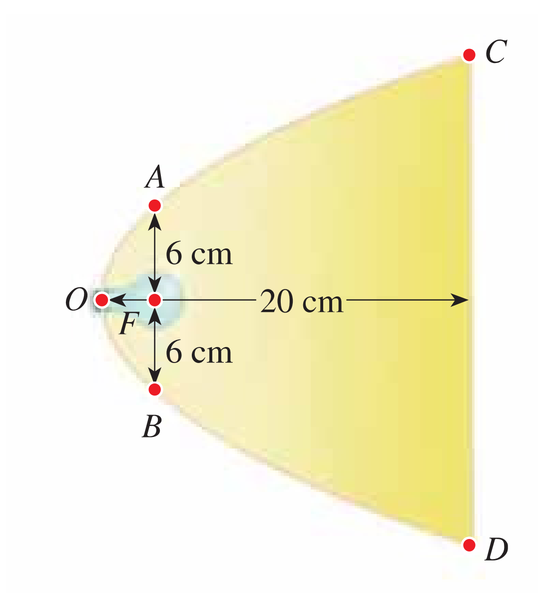


51. **(a)** Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$, y $y = 8$.
(b) Trace las gráficas. ¿Qué concluye usted?

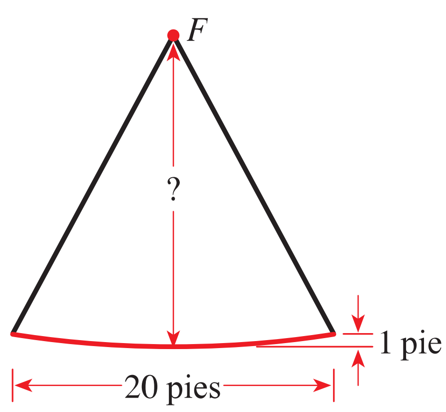
52. **(a)** Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen, foco en el eje y positivo, y con diámetros focales 1, 2, 4 y 8.
(b) Trace las gráficas. ¿Qué concluye usted?

APLICACIONES

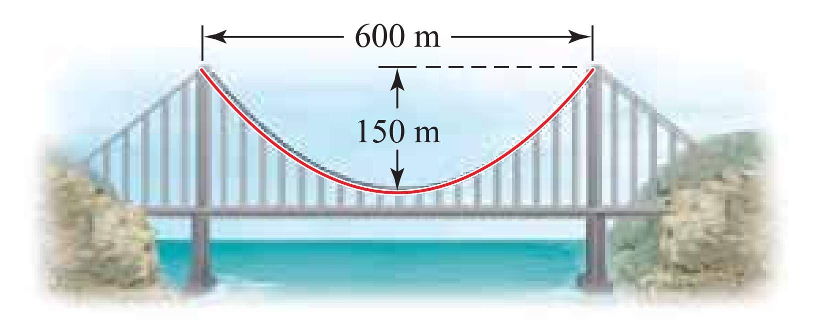
53. Reflector parabólico En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla eléctrica está colocada en el foco y el diámetro focal es 12 centímetros.
(a) Encuentre una ecuación de la parábola.
(b) Encuentre el diámetro $d(C, D)$ de la abertura, 20 cm del vértice.



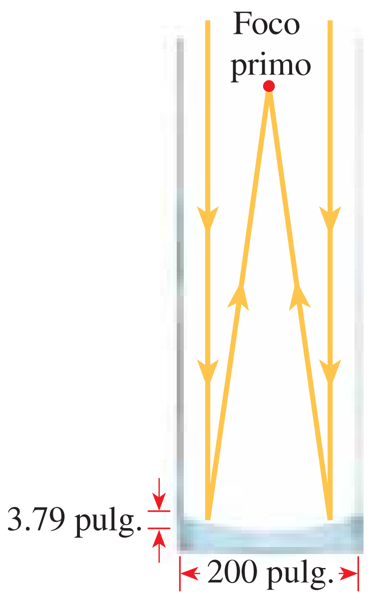
54. Disco satelital Un reflector para disco satelital es parabólico en sección transversal, con receptor en el foco F. El reflector mide 1 pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (vea la figura). ¿A qué distancia está el receptor del vértice del reflector parabólico?



55. **Puente colgante** En un puente colgante, la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente que se muestra en la figura tiene torres que están a 600 m una de la otra, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la cúspide de las torres. Encuentre la ecuación de la parte parabólica de los cables, colocando el origen del sistema de coordenadas en el vértice. [*Nota:* Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesario en la construcción del puente.]



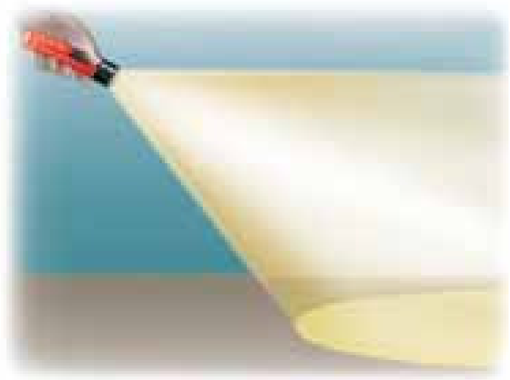
56. **Telescopio reflector** El telescopio Hale del Observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se ve en la figura. El espejo está construido en forma parabólica que recolecta luz de las estrellas y la enfoca en el **foco primo**, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulgadas de profundidad en su centro. Encuentre la **longitud focal** de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

57. **Parábolas en el mundo real** En el texto se dan varios ejemplos de los usos de parábolas. Encuentre otras situaciones de la vida real en las que se presentan parábolas. Consulte una enciclopedia científica en la sección de bibliografía de su biblioteca, o busque en la Internet.

58. **Cono de luz de una linterna** Una linterna se sostiene para formar una superficie iluminada en el suelo, como se ve en la figura. ¿Es posible poner en ángulo la linterna, de modo tal que el límite de la superficie iluminada sea una parábola? Explique su respuesta.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Rodando hacia debajo de una rampa**

En este proyecto investigamos el proceso de modelar el movimiento de cuerpos en caída, usando para ello un detector de movimiento basado en calculadora. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

11.2 ELIPSES

Definición geométrica de una elipse ► Ecuaciones y gráficas de elipses ► Excentricidad de una elipse

▼ Definición geométrica de una elipse

Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a una circunferencia alargada. Más precisamente, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ELIPSE

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos del plano cuya suma de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Vea Figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

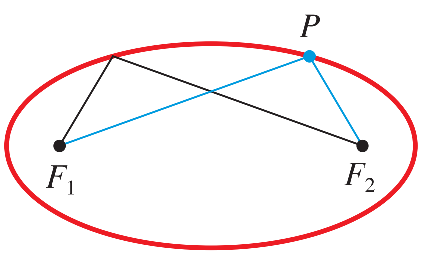


FIGURA 1

La definición geométrica sugiere un método sencillo para trazar una elipse. Coloque una hoja de papel en un tablero de dibujo e inserte tachuelas en los dos puntos que han de ser los focos de la elipse. Sujete los extremos de una cuerda a las tachuelas, como se muestra en la Figura 2(a). Con la punta de un lápiz, mantenga tensa la cuerda. A continuación mueva el lápiz con todo cuidado alrededor de los focos, manteniendo la cuerda tensa en todo momento. El lápiz trazará una elipse, porque la suma de las distancias desde la punta del lápiz a los focos siempre será igual a la longitud de la cuerda, que es una constante.

Si la cuerda es sólo ligeramente más larga que la distancia entre los focos, entonces la elipse que sea trazada será de forma alargada, como en la Figura 2(a), pero si los focos están cerca uno del otro con respecto a la longitud de la cuerda, la elipse será casi una circunferencia como se ve en la Figura 2(b).

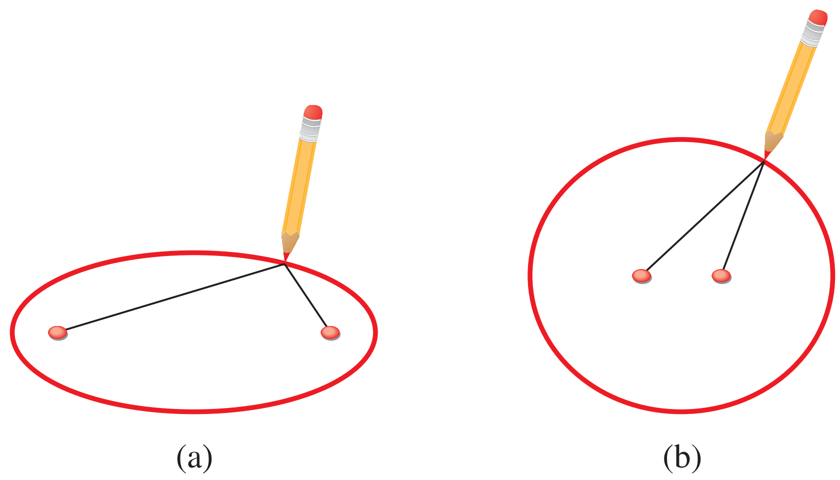


FIGURA 2

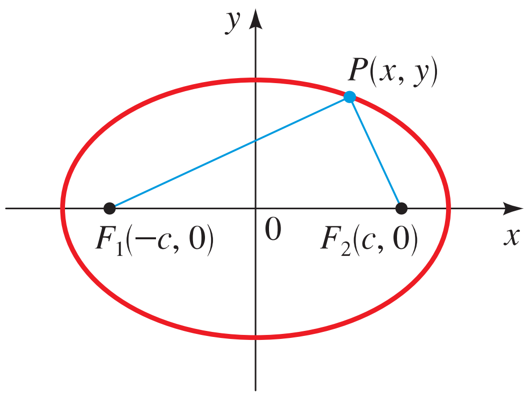


FIGURA 3

Para obtener la ecuación más sencilla para una elipse, colocamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ de modo que el origen está a la mitad entre ellos (vea Figura 3).

Para más facilidad hacemos que la suma de las distancias desde un punto en la elipse a los focos sea $2a$. Entonces si $P(x, y)$ es cualquier punto en la elipse, tenemos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Entonces, de la Fórmula de la Distancia, tenemos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a$$

o

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado cada lado y expandiendo, obtenemos

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Dividiendo cada lado entre 4 y elevando al cuadrado otra vez, resulta

$$a^2[(x + c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Como la suma de las distancias de P a los focos debe ser mayor que la distancia entre los focos, tenemos que $2a > 2c$, o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$ y podemos dividir cada lado de la ecuación precedente entre $a^2(a^2 - c^2)$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por facilidad, sea $b^2 = a^2 - c^2$ (con $b > 0$). Como $b^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. La ecuación precedente se convierte entonces en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$

Ésta es la ecuación de la elipse. Para graficarla, necesitamos saber los puntos de intersección en los ejes x y y. Haciendo $y = 0$, obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

de modo que $x^2 = a^2$ o $x = \pm a$. Así, la elipse cruza el eje z en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, como en la Figura 4. Estos puntos se llaman **vértices** de la elipse, y el segmento que los une se denomina **eje mayor**. Su longitud es $2a$.

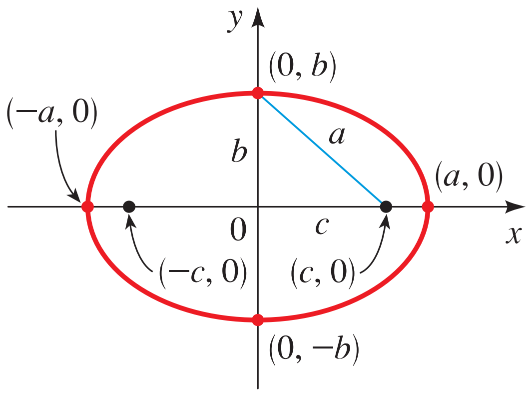


FIGURA 4
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

Análogamente, si hacemos $x = 0$, obtenemos $y = \pm b$, de modo que la elipse cruza el eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. El segmento que une estos puntos recibe el nombre de **eje menor** y tiene longitud $2b$. Observe que $2a > 2b$, por lo cual el eje mayor es más largo que el eje menor. El origen es el **centro** de la elipse.

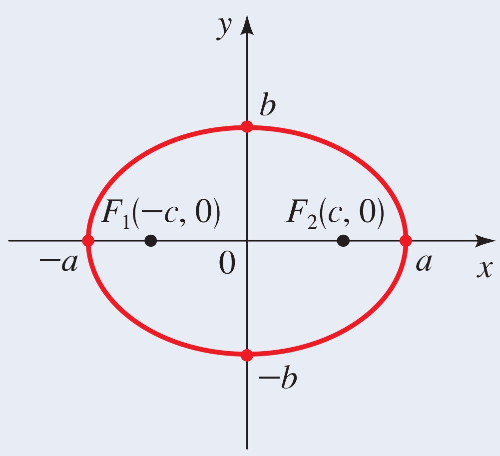
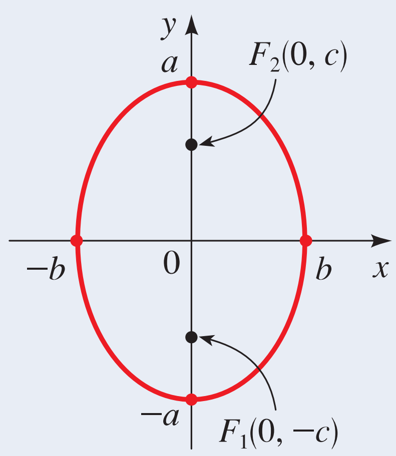
Si los focos de la elipse se colocan sobre el eje y en $(0, \pm c)$ en lugar del eje x, entonces las funciones de x y de y se invierten en la discusión precedente y obtenemos una elipse vertical.

Ecuaciones y gráficas de elipses

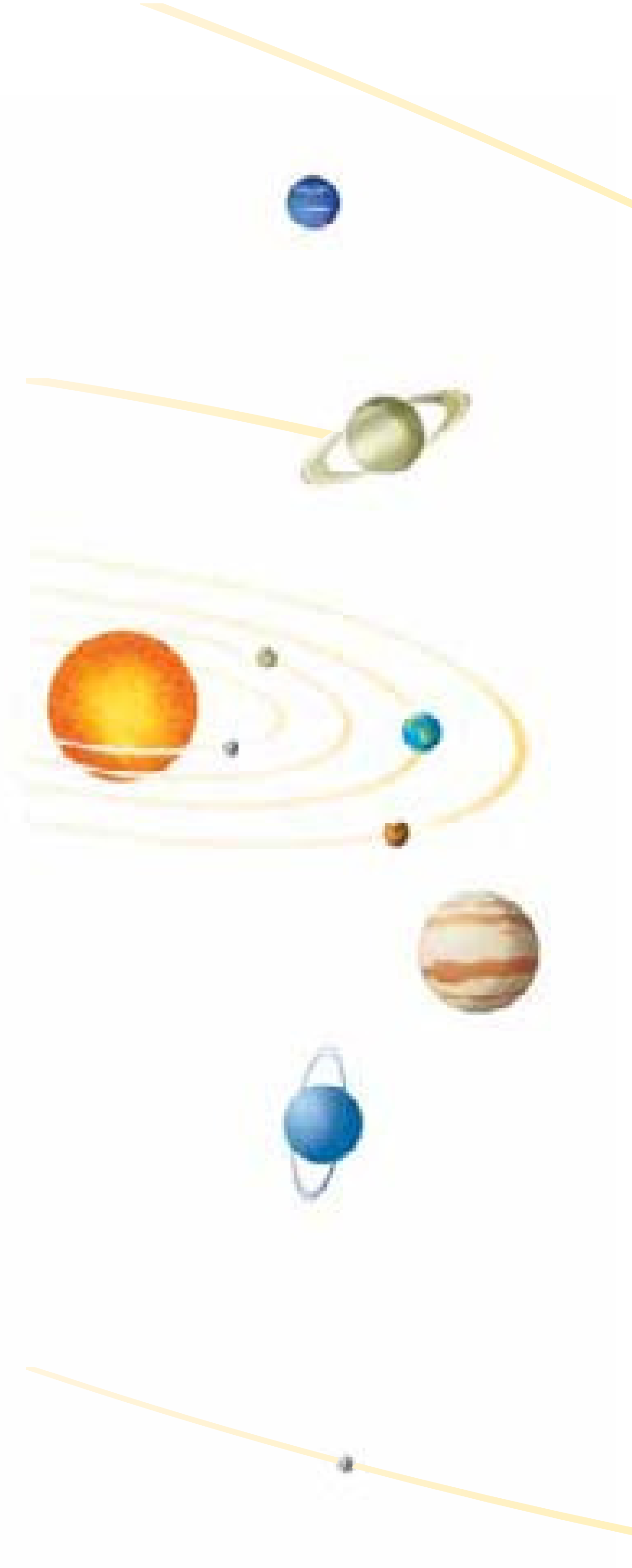
El cuadro siguiente resume lo que acabamos de demostrar acerca de la ecuación y características de una elipse con centro en el origen.

ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una elipse con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

ECUACIÓN	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE MAYOR	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
EJE MENOR	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
FOCOS	$(\pm c, 0),\ c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c),\ c^2 = a^2 - b^2$
GRÁFICA		

En la ecuación normal de una elipse, a^2 es el denominador *mayor* y b^2 es el *menor*. Para hallar c^2, restamos: denominador mayor menos denominador menor.



Las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en un foco.

EJEMPLO 1 | Trazado de una elipse

Una elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(a) Encuentre los focos, los vértices y las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.

(b) Trace la gráfica usando calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

(a) Como el denominador de x^2 es mayor, la elipse tiene un eje horizontal mayor. Esto da $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, de modo que $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Entonces $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

FOCOS	$(\pm\sqrt{5}, 0)$
VÉRTICES	$(\pm 3, 0)$
LONGITUD DE EJE MAYOR	6
LONGITUD DE EJE MENOR	4

La gráfica se muestra en la Figura 5(a).

(b) Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar y.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} \qquad \text{Reste } \frac{x^2}{9}$$

$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad \text{Multiplique por 4}$$

$$y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la elipse, graficamos ambas funciones:

$$y = 2\sqrt{1 - x^2/9} \qquad \text{y} \qquad y = -2\sqrt{1 - x^2/9}$$

como se muestra en la Figura 5(b).

Observe que la ecuación de una elipse no define y como función de x (vea página 158). Es por esto que necesitamos graficar dos funciones para graficar una elipse.

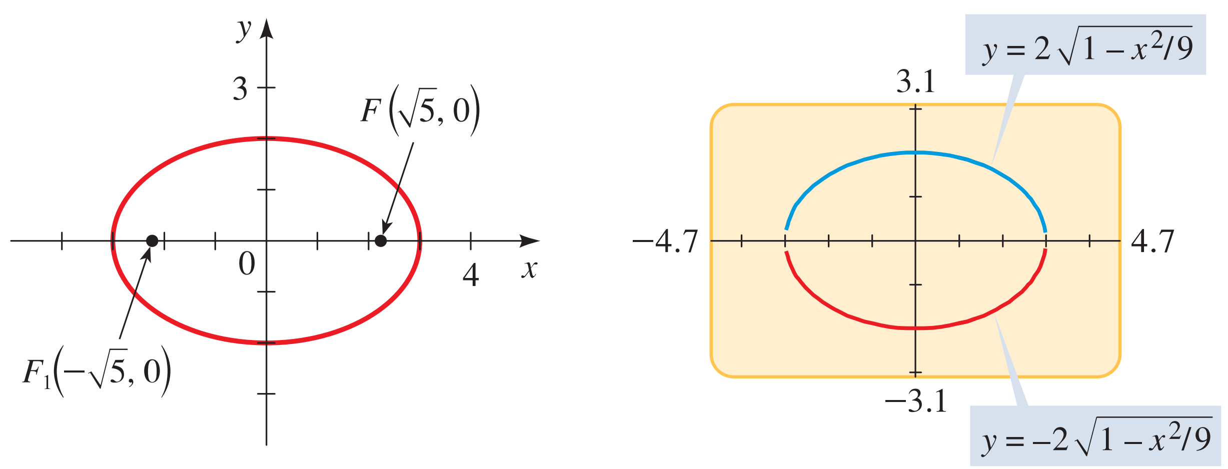


FIGURA 5 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

(a) (b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

EJEMPLO 2 | Hallar los focos de una elipse

Encuentre los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Primero ponemos la ecuación en forma normal. Dividiendo entre 144, obtenemos

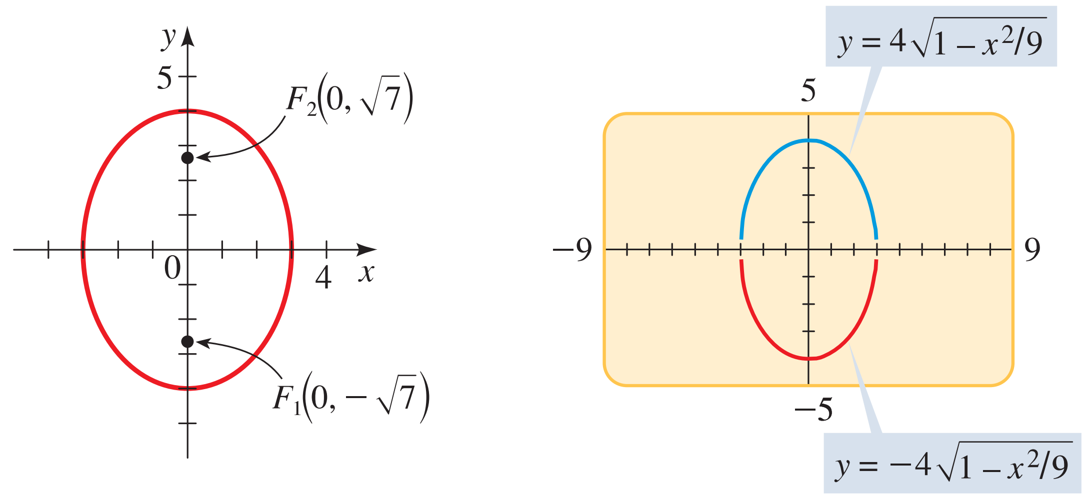
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Como $16 > 9$, ésta es una elipse con sus focos en el eje y y con $a = 4$ y $b = 3$. Tenemos

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$
$$c = \sqrt{7}$$

Entonces, los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. La gráfica se ilustra en la Figura 6(a).

También podemos trazar la gráfica usando calculadora graficadora como se ve en la Figura 6(b).



(a) (b)

FIGURA 6
$16x^2 + 9y^2 = 144$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

EJEMPLO 3 | Encontrar la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices son $(\pm 4, 0)$, tenemos $a = 4$ y el eje mayor es horizontal. Los focos son $(\pm 2, 0)$, de modo que $c = 2$. Para escribir la ecuación, necesitamos hallar b. Como $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos

$$2^2 = 4^2 - b^2$$
$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica se muestra en la Figura 7.

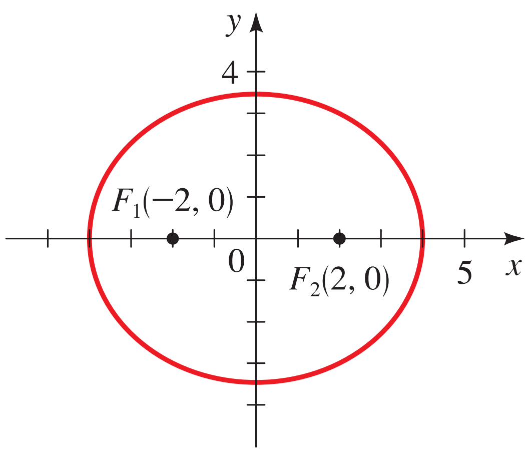


FIGURA 7
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **33**

Excentricidad de una elipse

Vimos ya antes en esta sección (Figura 2) que si $2a$ es sólo ligeramente mayor que $2c$, la elipse es larga y delgada, mientras que si $2a$ es mucho mayor que $2c$, la elipse es casi una circunferencia. Medimos la desviación de una elipse de ser casi una circunferencia por la relación entre a y c.

DEFINICIÓN DE EXCENTRICIDAD

Para la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ o $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ (con $a > b > 0$), la **excentricidad** $\boldsymbol{e}$ es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de toda elipse satisface $0 < e < 1$.

Por lo tanto, si e es cercana a 1, entonces c es casi igual a a y la elipse tiene forma alargada, pero si e es cercana a 0 entonces la elipse tiene forma casi como una circunferencia. La excentricidad es una medida de qué tan "alargada" es la elipse.

En la Figura 8 mostramos varias elipses para demostrar el efecto de variar la excentricidad e.

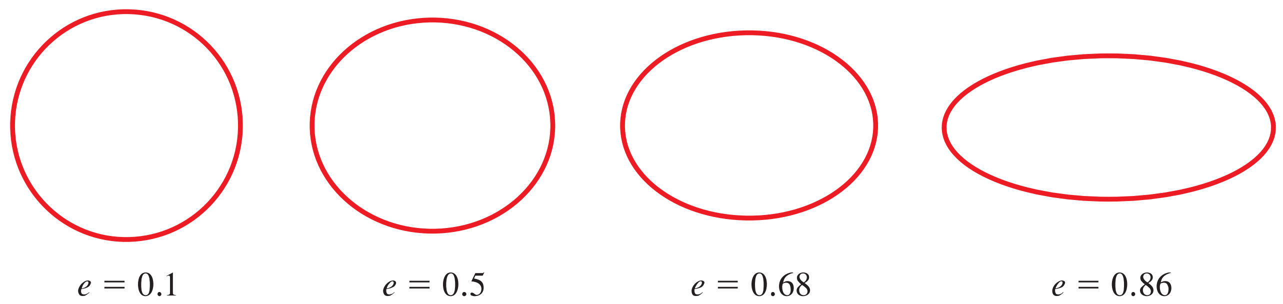


FIGURA 8 Elipses con varias excentricidades

EJEMPLO 4 | Hallar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y focos

Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$, y trace su gráfica.

SOLUCIÓN Nos dan $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplique en cruz}$$

$$a = 10$$

Para hallar b, usamos el hecho de que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

Entonces la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Debido a que los focos están sobre el eje y, la elipse está orientada verticalmente. Para trazar la elipse, hallamos los puntos de intersección: los puntos de intersección en el eje x son ± 6; en el eje y, son ± 10. La gráfica está trazada en la Figura 9.

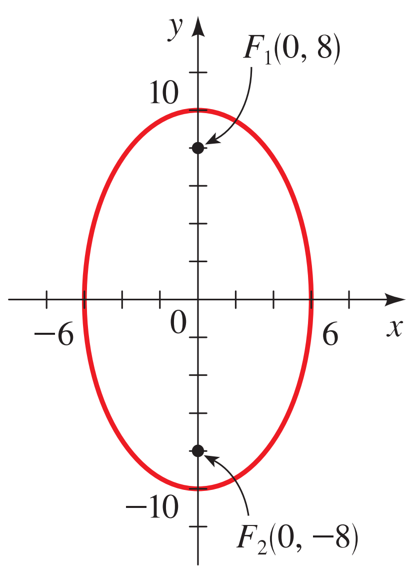


FIGURA 9 $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

Excentricidades de las órbitas de los planetas

Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco. Para casi todos los planetas, estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, de modo que son casi circulares. Mercurio y Plutón, los planetas conocidos más cercano y más alejado del Sol, tienen órbitas visiblemente elípticas.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.048
Saturno	0.056
Urano	0.046
Neptuno	0.010
Plutón	0.248

La atracción gravitacional hace que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del Sol con éste en un foco. Esta sorprendente propiedad fue observada primero por Johannes Kepler, y posteriormente deducida por Isaac Newton a partir de su Ley de Gravitación Universal usando cálculo. Las órbitas de los planetas tienen excentricidades diferentes, pero la mayor parte de ellas son casi circulares (vea al margen).

Las elipses, como las parábolas, tienen una interesante *propiedad de reflexión* que lleva a varias aplicaciones prácticas. Si una fuente de luz se coloca en un foco de una superficie reflectora con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz será reflejada de la superficie al otro foco, como se ve en la Figura 10. Este principio, que funciona para ondas sonoras así como para luz, se usa en *litotricia,* que es un tratamiento para eliminar piedras de los riñones. El paciente es colocado en una tina de agua con secciones transversales elípticas, en forma tal que la piedra del riñón queda localizada de una manera precisa en un foco. Ondas de sonido de alta intensidad generadas en el otro foco son reflejadas a la piedra y ésta queda destruida con daño mínimo al tejido circundante. El paciente se salva del trauma de una cirugía y se recupera en días en lugar de semanas.

La propiedad de reflexión de elipses se usa también en la construcción de *galerías susurrantes.* El sonido proveniente de un foco rebota en las paredes y cielo de una sala elíptica y pasa por el otro foco. En esas salas hasta los susurros más débiles pronunciados en un foco se pueden oír claramente en el otro. Galerías susurrantes famosas incluyen el National Statuary Hall del capitolio de Estados Unidos en Washington, D.C. (vea página 776), y el Tabernáculo Mormón en Salt Lake City, Utah.

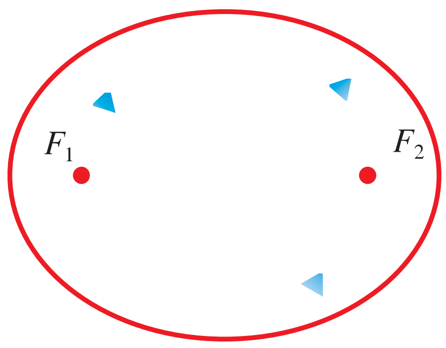


FIGURA 10

11.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

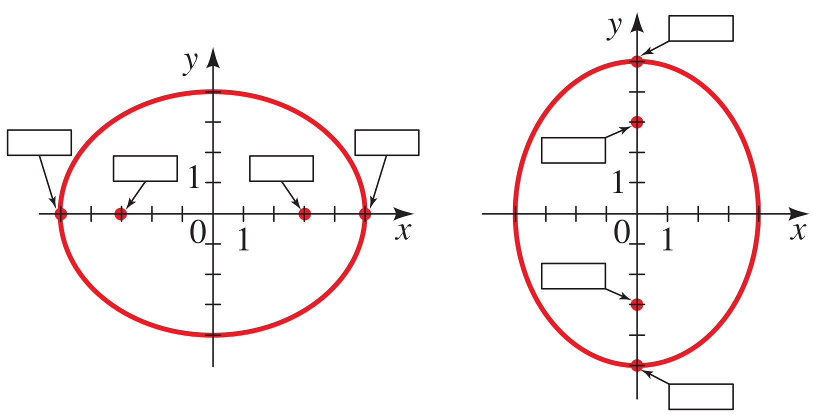
1. Una elipse es el conjunto de todos los puntos del plano para el que las ______de las distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos F_1 y F_2 se llaman _______de la elipse.

2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ____. Entonces la gráfica de $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ con $a > b > 0$; es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ____. Por lo tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ es una elipse con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Asigne coordenadas a los vértices y focos en las gráficas dadas para las elipses de los Ejercicios 2 y 3.

(a) $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ **(b)** $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$



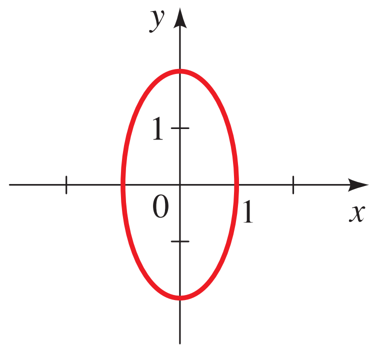
HABILIDADES

5-8 ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

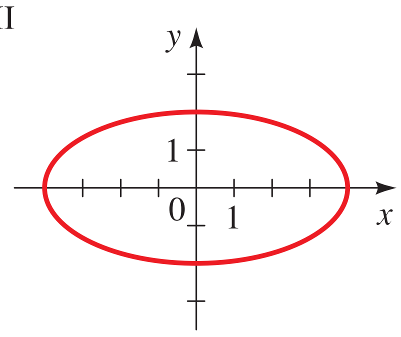
5. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ **6.** $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

7. $4x^2 + y^2 = 4$ **8.** $16x^2 + 25y^2 = 400$

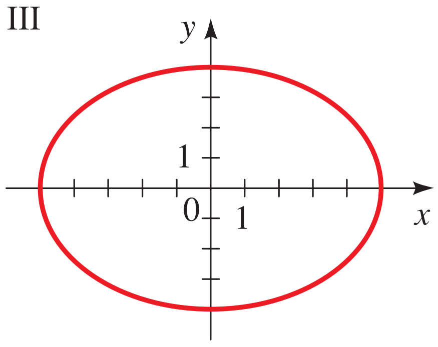
I



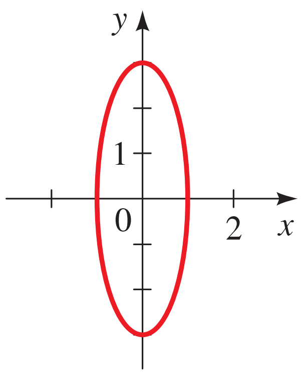
II



III



IV



9-22 ■ Encuentre los vértices, focos y excentricidad de la elipse. Determine las longitudes de los ejes mayor y menor, y trace la gráfica.

9. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **10.** $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

11. $9x^2 + 4y^2 = 36$ **12.** $4x^2 + 25y^2 = 100$

13. $x^2 + 4y^2 = 16$ **14.** $4x^2 + y^2 = 16$

15. $2x^2 + y^2 = 3$ **16.** $5x^2 + 6y^2 = 30$

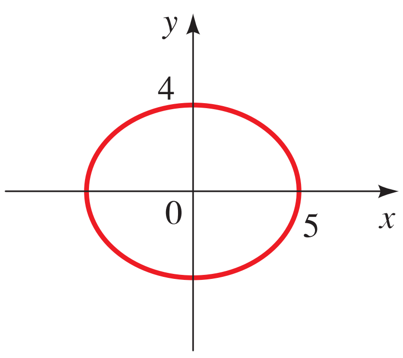
17. $x^2 + 4y^2 = 1$ **18.** $9x^2 + 4y^2 = 1$

19. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$ **20.** $x^2 = 4 - 2y^2$

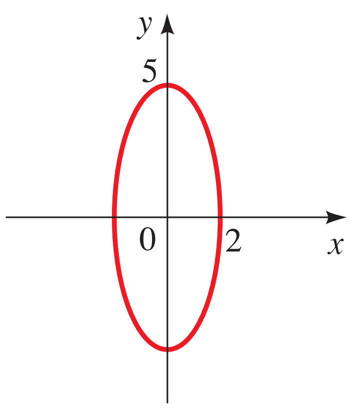
21. $y^2 = 1 - 2x^2$ **22.** $20x^2 + 4y^2 = 5$

21-28 ■ Encuentre una ecuación para la elipse cuya gráfica se muestra.

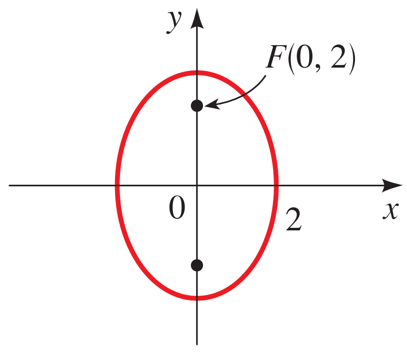
23.



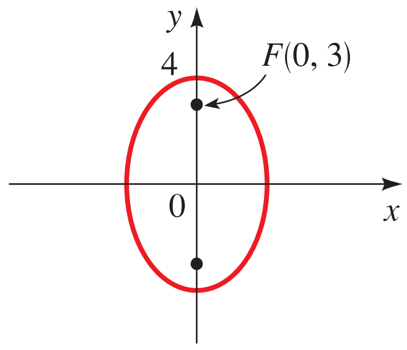
24.



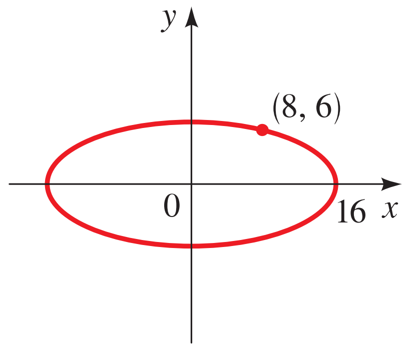
25.



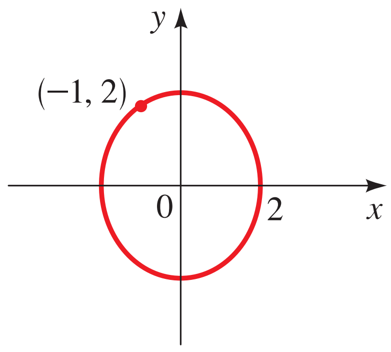
26.



27.



28.



29-32 ■ Use calculadora graficadora para graficar la elipse.

29. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ **30.** $x^2 + \dfrac{y^2}{12} = 1$

31. $6x^2 + y^2 = 36$ **32.** $x^2 + 2y^2 = 8$

33-34 ■ Encuentre una ecuación para la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

33. Focos: $(\pm 4, 0)$, vértices: $(\pm 5, 0)$

34. Focos: $(0, \pm 3)$, vértices: $(0, \pm 5)$

35. Longitud de eje mayor: 4, longitud de eje menor: 2, focos en eje y

36. Longitud de eje mayor: 6, longitud de eje menor: 4, focos en eje x

37. Focos: $(0, \pm 2)$, longitud de eje menor: 6

38. Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje mayor: 12

39. Puntos extremos de eje mayor: $(\pm 10, 0)$, distancia entre focos: 6

40. Puntos extremos de eje menor: $(0, \pm 3)$, distancia entre focos: 8

41. Longitud de eje mayor: 10, focos en eje x, elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, 2)$

42. Excentricidad: $\frac{1}{9}$, focos: $(0, \pm 2)$

43. Excentricidad: 0.8, focos: $(\pm 1.5, 0)$

44. Excentricidad: $\sqrt{3}/2$, focos en eje y, longitud de eje mayor: 4

45-47 ■ Encuentre los puntos de intersección del par de elipses. Trace las gráficas de cada par de ecuaciones en los mismos ejes de coordenadas, y marque los puntos de intersección.

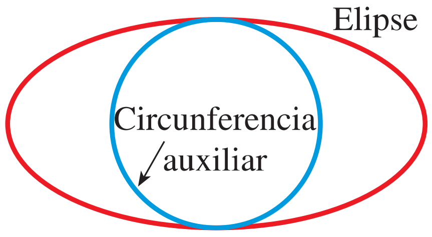
45. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ **46.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

47. $\begin{cases} 100x^2 + 25y^2 = 100 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

48. La **circunferencia auxiliar** de una elipse es la circunferencia con radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y centro igual que en la elipse (vea la figura). La circunferencia auxiliar es entonces la circunferencia máxima que puede caber dentro de una elipse.

(a) Encuentre una ecuación para la circunferencia auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

(b) Para la elipse y la circunferencia auxiliar del inciso (a), demuestre que si (s, t) es un punto en la circunferencia auxiliar, entonces $(2s, t)$ es un punto en la elipse.



49. (a) Use calculadora graficadora para trazar la mitad superior (la parte en los cuadrantes primero y segundo) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$ para $k = 4, 10, 25$ y 50.

(b) ¿Qué tienen en común los miembros de esta familia de elipses? ¿Cómo difieren?

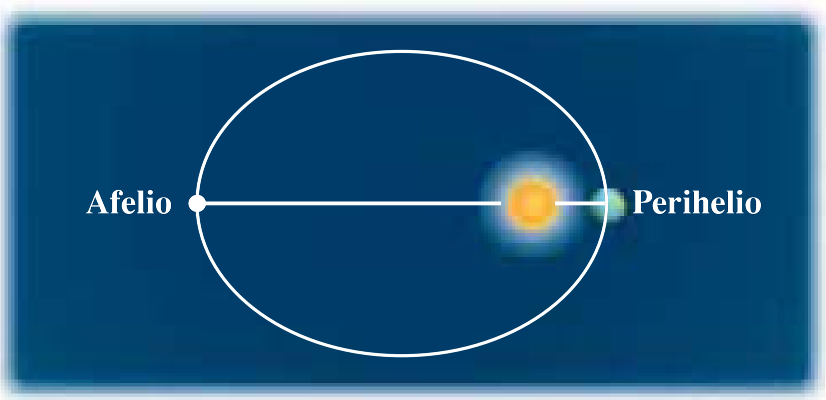
50. Si $k > 0$, la ecuación siguiente representa la elipse:

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4 + k} = 1$$

Demuestre que todas las elipses representadas por esta ecuación tienen los mismos focos, no importa cuál sea el valor de k.

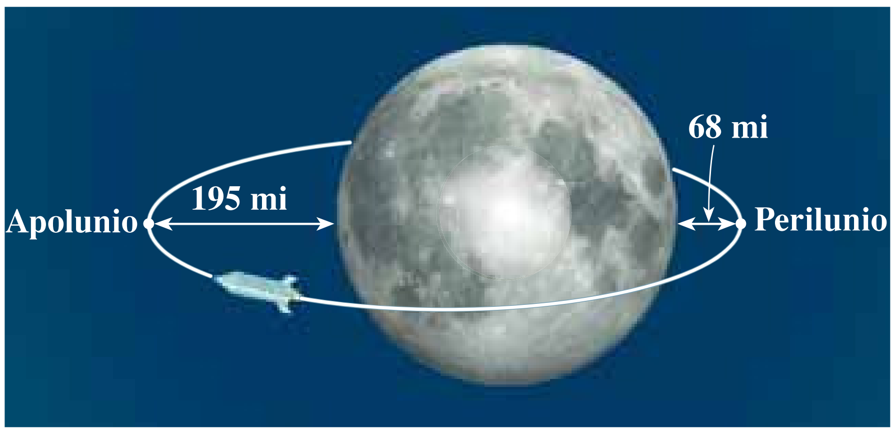
APLICACIONES

51. Perihelio y afelio Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en el que el planeta está más cercano al Sol se denomina **perihelio**, y el punto en el que está más alejado se llama **afelio**. Estos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra al Sol es de 147,000,000 km en el perihelio y 153,000,000 km en el afelio. Encuentre una ecuación para la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje x.)



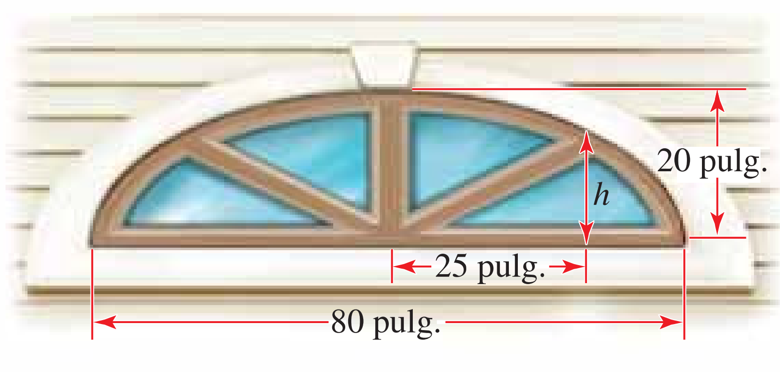
52. La órbita de Plutón Con una excentricidad de 0.25, la órbita de Plutón es la más excéntrica del sistema solar. La longitud del eje menor de su órbita es aproximadamente 10,000,000,000 km. Encuentre la distancia entre Plutón y el Sol en el perihelio y en el afelio. (Vea Ejercicio 51.)

53. Órbita lunar Para un cuerpo en órbita elíptica alrededor de la Luna, los puntos en la órbita que están más cercanos y más lejanos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Éstos son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en un foco de la órbita. La nave espacial *Apollo 11* fue puesta en órbita lunar con perilunio a 68 millas y apolunio a 195 millas sobre la superficie de la Luna. Suponiendo que la Luna sea una esfera de radio 1075 millas, encuentre una ecuación para la órbita del *Apollo 11*. (Ponga los ejes de coordenadas de modo que el origen se encuentre en el centro de la órbita y los focos estén situados en el eje x.)



54. Elipse de madera contrachapada Un carpintero desea construir una mesa elíptica de una hoja de madera contrachapada, de 4 pies por 8 pies. Trazará la elipse usando el método de "chincheta e hilo" que se ilustra en las Figuras 2 y 3. ¿Qué longitud del hilo debe usar y a qué distancia debe colocar las chinchetas, si la elipse ha de ser la más grande posible a cortar de la hoja de madera contrachapada?

55. Ventana ojival Una ventana "ojival" sobre una puerta se construye en la forma de la mitad superior de una elipse, como se ve en la figura. La ventana mide 20 pulgadas de alto en su punto más alto y 80 pulgadas en la parte inferior. Encuentre la altura de la ventana a 25 pulgadas del centro de la base.



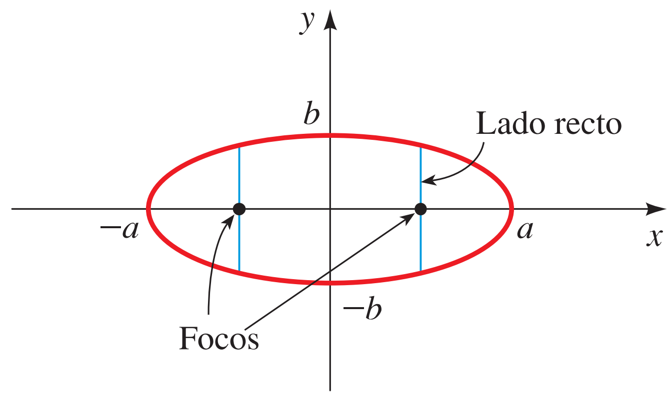
DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

56. Trazar una elipse en un pizarrón Trate de dibujar una elipse en un pizarrón en una forma tan precisa como sea posible. ¿En este proceso cómo ayudarían un hilo y dos amigos?

57. Cono de luz de una linterna Una linterna ilumina una pared como se ilustra en la figura. ¿Cuál es la forma de los límites del área iluminada? Explique su respuesta.

58. ¿Qué tan ancha es una elipse en sus focos? Un *lado recto* para una elipse es un segmento de recta perpendicular al eje mayor en un foco, con puntos extremos en la elipse, como se muestra en la figura en la parte superior de la columna siguiente. Demuestre que la longitud de un lado recto es $\frac{2b^2}{a}$ para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$



59. ¿Es una elipse? Un papel se envuelve alrededor de una botella cilíndrica, y luego se usa un compás para dibujar una circunferencia en el papel, como se ve en la figura. Cuando el papel se pone plano, ¿la forma trazada en el papel es una elipse? (No es necesario que demuestre su respuesta, pero podría hacer el experimento y ver lo que resulta.)

11.3 HIPÉRBOLAS

| Definición geométrica de una hipérbola ▶ Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

▼ Definición geométrica de una hipérbola

Aun cuando elipses e hipérbolas tienen formas completamente diferentes, sus definiciones y ecuaciones son similares. En lugar de usar la *suma* de distancias entre dos focos fijos, como en el caso de una elipse, usamos la *diferencia* para definir una hipérbola.

DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HIPÉRBOLA

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos del plano, cuya diferencia de distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Vea Figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

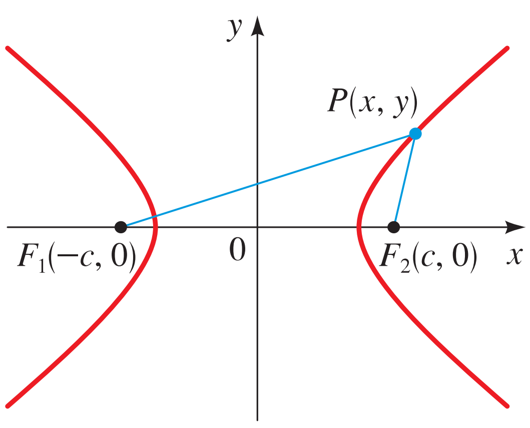


FIGURA 1 *P* es una hipérbola si $|d, (P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Al igual que en el caso de la elipse, obtenemos la ecuación más sencilla para la hipérbola al colocar los focos sobre el eje x en $(\pm c, 0)$, como se ve en la Figura 1. Por definición, si $P(x, y)$ está sobre la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a alguna constante positiva, que llamamos $2a$. Por lo tanto, tenemos

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Procediendo como hicimos en el caso de la elipse (Sección 11.2), simplificamos esto a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Del triángulo PF_1F_2 de la Figura 1 vemos que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. Se deduce que $2a < 2c$, o $a < c$. Entonces $c^2 - a^2 > 0$ por lo que podemos hacer $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces simplificamos la última ecuación exhibida para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ésta es la *ecuación de la hipérbola*. Si sustituimos x por $-x$ o y por $-y$ en esta ecuación, permanecerá sin cambio, de modo que la hipérbola es simétrica alrededor de los ejes x y y y alrededor del origen. Los puntos de intersección x son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. No hay punto de intersección y porque hacer $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola lleva a $-y^2 = b^2$, que no tiene solución real. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

de modo que $x^2/a^2 \geq 1$; entonces $x^2 \geq a^2$ y por lo tanto $x \geq a$ o $x \leq -a$. Esto significa que la hipérbola está formada por dos partes, llamadas **ramas**. El segmento que une los dos vértices en las ramas separadas es el **eje transverso** de la hipérbola, y el origen recibe el nombre de **centro**.

Si ponemos los focos de la hipérbola en el eje y en lugar del eje x, esto tiene el efecto de invertir las funciones de x y de y en la derivación de la ecuación de la hipérbola. Esto conduce a una hipérbola con eje transverso vertical.

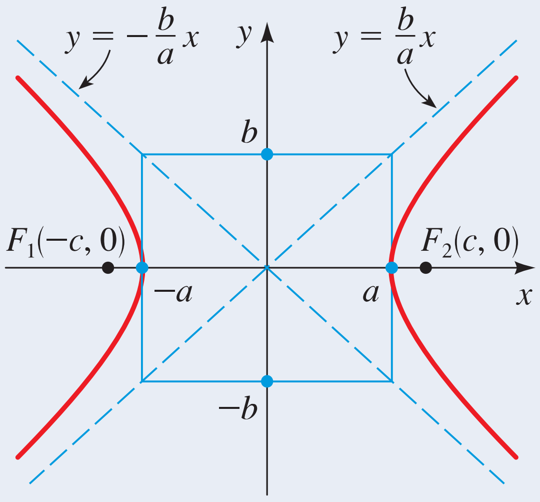
Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

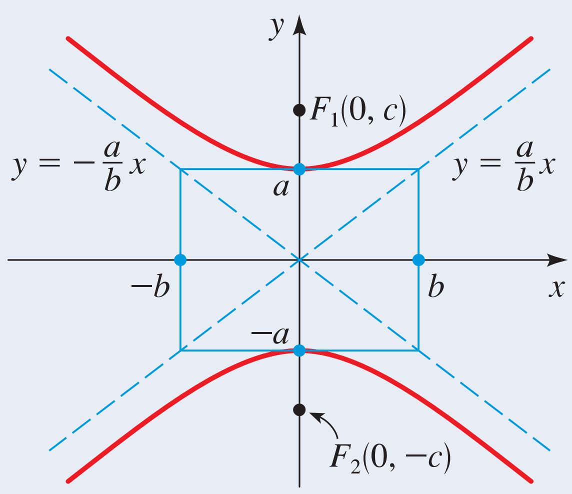
Las propiedades principales de hipérbolas se indican en el recuadro siguiente.

HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una hipérbola con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

ECUACIÓN	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE TRANSVERSO	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{a}{b}x$
FOCOS	$(\pm c, 0), \quad c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c), \quad c^2 = a^2 + b^2$
GRÁFICA		





Las asíntotas de funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

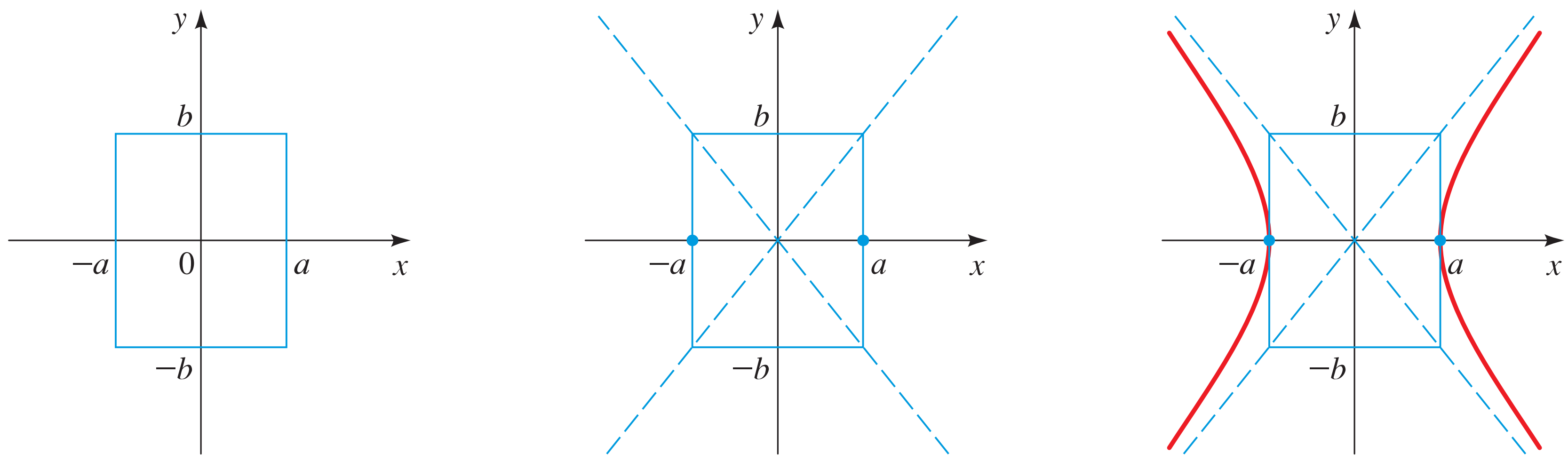
Las *asíntotas* mencionadas en este recuadro son rectas a las que la hipérbola se aproxima para valores grandes de x y de y. Para hallar las asíntotas en el primer caso del cuadro, de la ecuación despejamos y para obtener

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

$$= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Cuando x se hace grande, a^2/x^2 se acerca a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$, tenemos $a^2/x^2 \to 0$. En consecuencia, para x grande, el valor de y puede aproximarse cuando $y = \pm(b/a)x$. Esto demuestra que estas rectas son asíntotas de la hipérbola.

Las asíntotas son una ayuda esencial para graficar una hipérbola; nos ayudan a determinar su forma. Una manera útil de hallar las asíntotas, para una hipérbola con eje transverso horizontal, es primero localizar los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Entonces trace segmentos horizontales y verticales que pasen por estos puntos para construir un rectángulo, como se ve en la Figura 2(a). A este rectángulo se le da el nombre de **caja central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales de la caja central son $\pm b/a$ de modo que, al prolongarlas, obtenemos las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, como están trazadas en la Figura 2(b). Finalmente, determinamos los vértices y usamos las asíntotas como guía para trazar la hipérbola que se ilustra en la Figura 2(c). (Un procedimiento similar aplica para graficar una hipérbola que tenga un eje transverso vertical.)



(a) Caja central (b) Asíntotas (c) Hipérbola

FIGURA 2 Pasos para graficar la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

CÓMO TRAZAR UNA HIPÉRBOLA

1. **Trazar la caja central.** Éste es el rectángulo con centro en el origen, con lados paralelos a los ejes, que cruza un eje en $\pm a$ y el otro en $\pm b$.
2. **Trazar las asíntotas.** Éstas son las rectas obtenidas al prolongar las diagonales de la caja central.
3. **Determinar los vértices.** Éstos son los dos puntos de intersección en x o los dos puntos de intersección en y.
4. **Trazar la hipérbola.** Empiece en un vértice, y trace una rama de la hipérbola, aproximando las asíntotas. Trace la otra rama en la misma forma.

EJEMPLO 1 | Una hipérbola con eje transverso horizontal

Una hipérbola tiene la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

(a) Encuentre los vértices, focos y asíntotas, y trace la gráfica.

(b) Trace la gráfica usando calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

(a) Primero dividimos ambos lados de la ecuación entre 144 para ponerla en forma normal:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Como el término en x^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal; sus vértices y focos están en el eje x. Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, obtenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por lo tanto, tenemos

VÉRTICES	$(\pm 4, 0)$
FOCOS	$(\pm 5, 0)$
ASÍNTOTAS	$y = \pm \frac{3}{4}x$

Después de trazar la caja central y asíntotas, completamos el dibujo de la hipérbola como en la Figura 3(a).

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a y como función de x (vea página 158). Esto es por lo que necesitamos graficar dos funciones para graficar una hipérbola.

(b) Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar y.

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$-16y^2 = -9x^2 + 144 \qquad \text{Reste } 9x^2$$

$$y^2 = 9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right) \qquad \text{Divida entre } -16 \text{ y factorice } 9$$

$$y = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{16} - 1} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, graficamos las funciones

$$y = 3\sqrt{(x^2/16) - 1} \qquad \text{y} \qquad y = -3\sqrt{(x^2/16) - 1}$$

como se ve en la Figura 3(b).

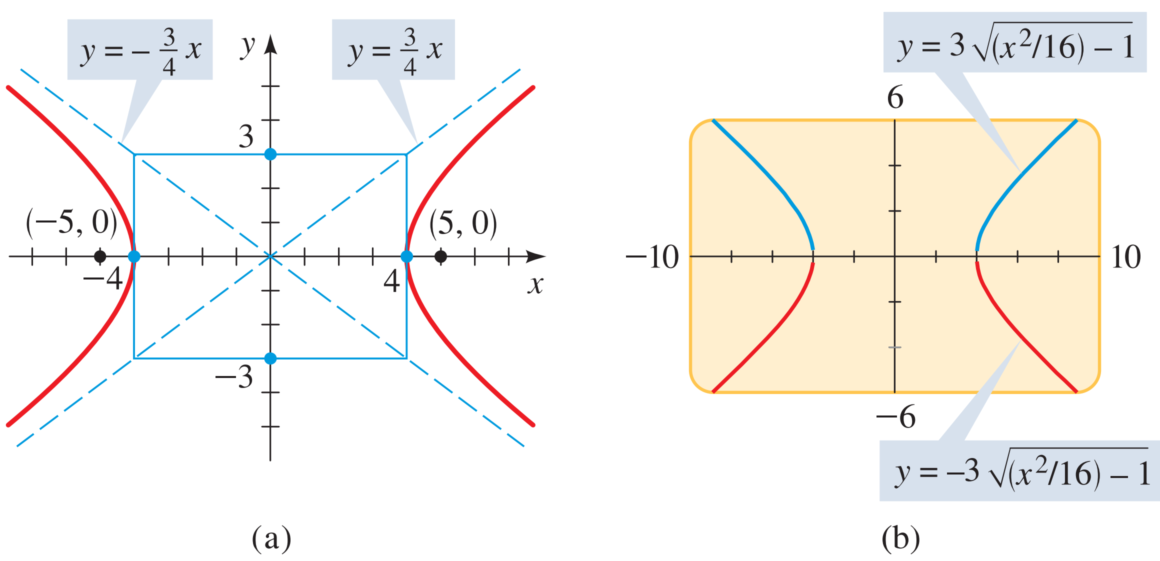


FIGURA 3
$9x^2 - 16y^2 = 144$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

EJEMPLO 2 | Una hipérbola con eje transverso vertical

Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y trace su gráfica.

$$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$$

SOLUCIÓN Empezamos por escribir la ecuación en la forma estándar para una hipérbola

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

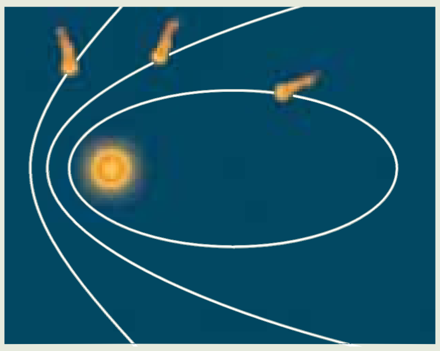
$$y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \text{Divida entre } -9$$

Como el término en y^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transverso vertical; sus focos y vértices están en el eje y. Como $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$, obtenemos $a = 1$, $b = 3$ y $c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Entonces, tenemos

VÉRTICES	$(0, \pm 1)$
FOCOS	$(0, \pm\sqrt{10})$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\frac{1}{3}x$

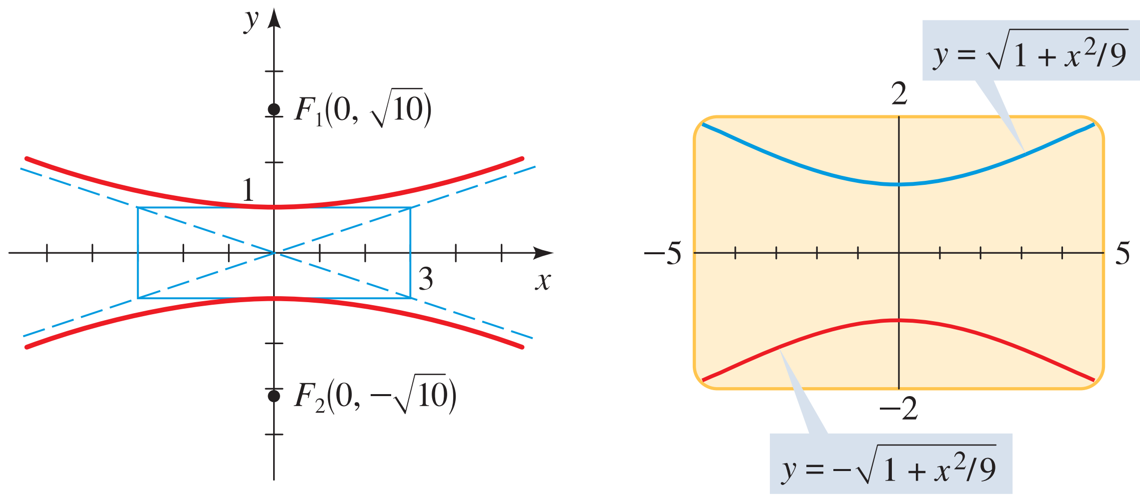
Trazamos la caja central y asíntotas y, a continuación, completamos la gráfica como se muestra en la Figura 4(a).

También podemos trazar la gráfica usando calculadora graficadora, como se ve en la Figura 4(b).



Trayectorias de cometas
La trayectoria de un cometa es una elipse, una parábola, o una hipérbola con el Sol en un foco. Este dato se puede comprobar con uso de cálculo y las leyes de Newton del movimiento.* Si la trayectoria es una parábola o una hipérbola, el cometa nunca regresará. Si su trayectoria es una elipse, puede determinarse de manera precisa cuándo y dónde se verá de nuevo el cometa. El cometa Halley tiene una trayectoria elíptica y regresa cada 75 años; la última vez que se avistó fue en 1987. Su órbita es una elipse muy excéntrica; se espera que regrese al sistema solar interior hacia el año 4377.

*James Stewart, *Cálculo*, 7a ed. (Belmont, CA: Brooks/Cole, 2012), pp. 868 y 872.



(a) (b)

FIGURA 4
$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y focos

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices están sobre el eje x, la hipérbola tiene un eje transverso horizontal. Su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tenemos $a = 3$ y $c = 4$. Para hallar b, usamos la relación $a^2 + b^2 = c^2$:

$$3^2 + b^2 = 4^2$$

$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$b = \sqrt{7}$$

Entonces la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

La gráfica se ilustra en la Figura 5.

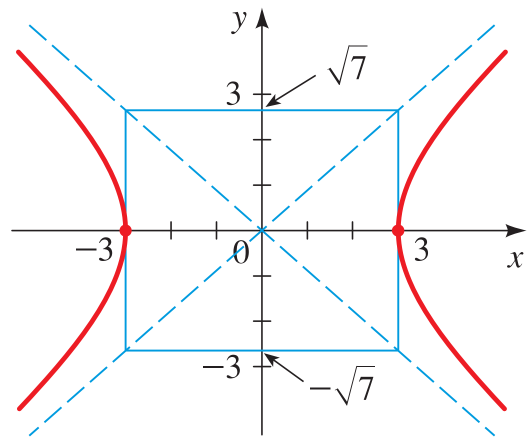


FIGURA 5

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **31**

EJEMPLO 4 | Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Encuentre la ecuación y focos de la hipérbola con vértices $(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm 2x$. Trace la gráfica.

SOLUCIÓN Como los vértices están en el eje y, la hipérbola tiene un eje transverso vertical con $a = 2$. De la ecuación de la asíntota vemos que $a/b = 2$. Como $a = 2$ obtenemos $2/b = 2$, de modo que $b = 1$. Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para hallar los focos, calculamos $c^2 = a^2 + b^2 = 22 + 12 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica se ilustra en la Figura 6.

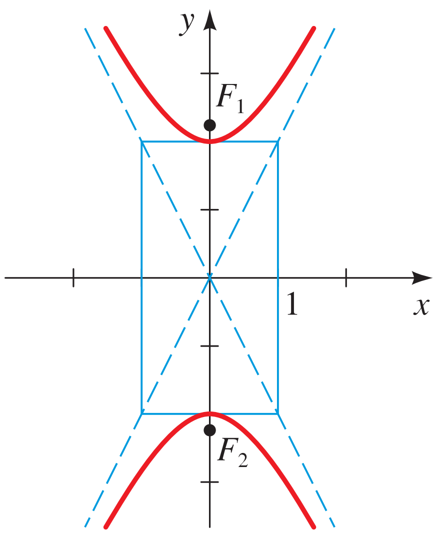


FIGURA 6

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25** Y **35**

Al igual que parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una interesante *propiedad reflectora*. Una luz apuntada a un foco de un espejo hiperbólico es reflejada hacia el otro foco, como se ve en la Figura 7. Esta propiedad se emplea en la construcción de telescopios del tipo Cassegrain. Un espejo hiperbólico se coloca en el tubo del telescopio de modo que la luz reflejada del reflector parabólico primario se apunta a un foco del espejo hiperbólico. La luz se vuelve a enfocar entonces a un punto más accesible abajo del reflector primario (Figura 8).

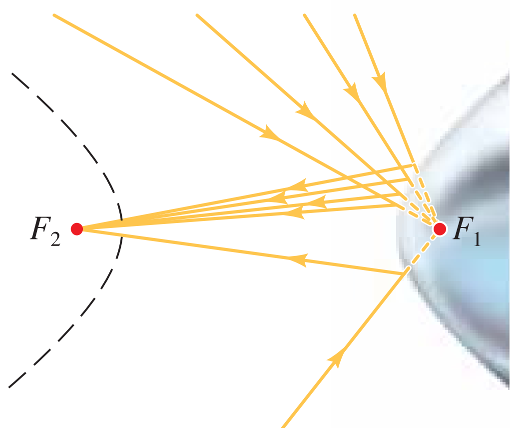


FIGURA 7 Propiedad reflectora de hipérbolas

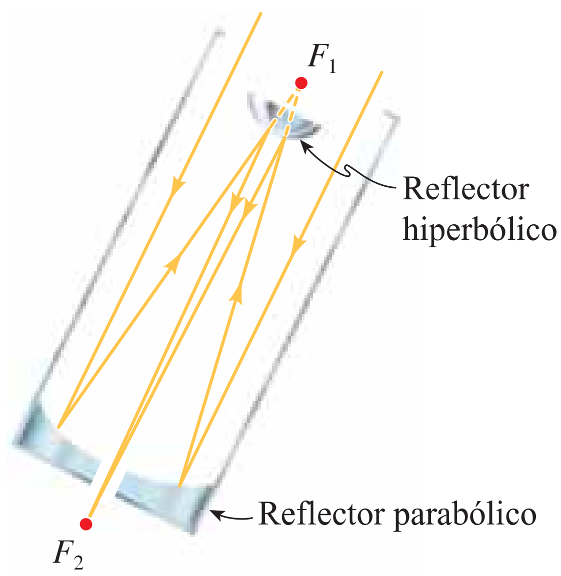


FIGURA 8 Telescopio tipo Cassegrain

El sistema LORAN (Long RAnge Navigation) se utilizó hasta principios de la década de 1990; ahora ha sido sustituido por el sistema GPS (vea página 700). En el sistema LORAN, se usan hipérbolas a bordo de un barco para determinar su posición. En la Figura 9, estaciones de radio en A y B transmiten señales simultáneamente para su recepción por el barco en P. La computadora de a bordo convierte la diferencia de tiempo en la recepción de estas señales en una diferencia de distancia $d(P, A) - d(P, B)$. Por la definición de hipérbola, esto localiza el barco en una rama de una hipérbola con focos en A y B (trazada en negro en la figura). El mismo procedimiento se realiza con otras dos estaciones de radio en C y D, y esto localiza el barco en una segunda hipérbola (mostrada en rojo en la figura). (En la práctica, sólo son necesarias tres estaciones porque una estación se puede usar como foco para ambas hipérbolas.) Las coordenadas del punto de intersección de estas dos hipérbolas, que pueden ser calculadas de manera precisa por la computadora, dan la posición de P.

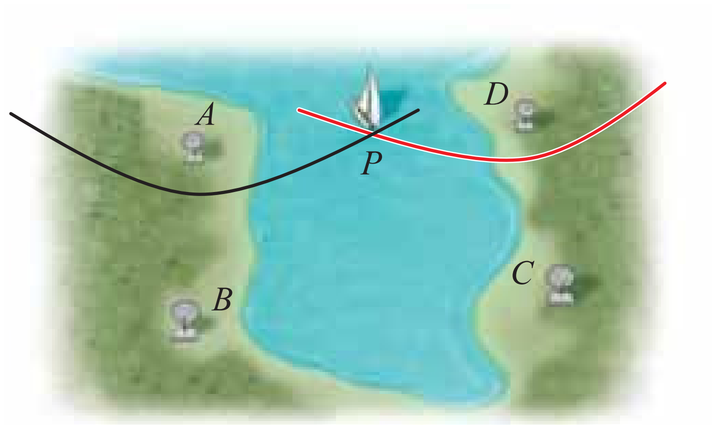


FIGURA 9 Sistema LORAN para hallar la posición de un barco

11.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

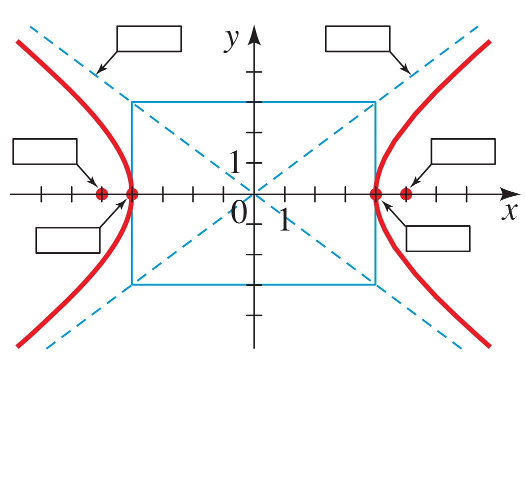
1. Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano para el que la ______de las distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos F_1 y F_2 se llaman _______ de la hipérbola.

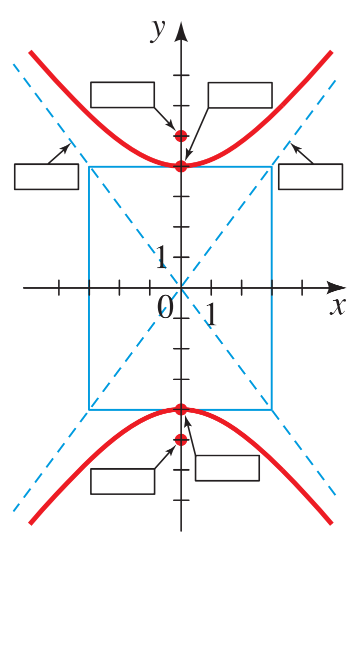
2. La gráfica de la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$, $b > 0$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(\pm c, 0)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

3. La gráfica de la ecuación $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ con $a > 0$, $b > 0$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos $(0, \pm c)$, donde $c =$ ________. Por tanto, la gráfica de $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$ es una hipérbola con vértices (___, ___) y (___, ___) y focos (___, ___) y (___, ___).

4. Asigne coordenada a los vértices, focos y asíntotas en las gráficas dadas por las hipérbolas de los Ejercicios 2 y 3.

(a) $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ **(b)** $\dfrac{y^2}{4^2} - \dfrac{x^2}{3^2} = 1$





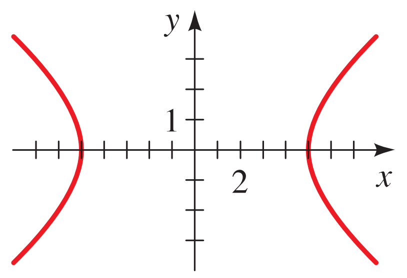
HABILIDADES

5-8 ■ Relacione la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

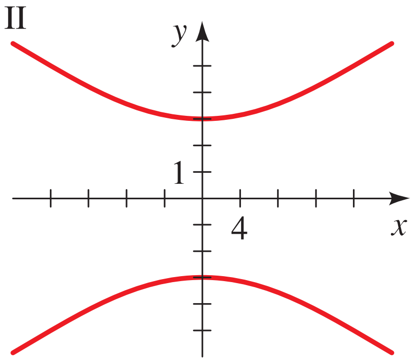
5. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **6.** $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$

7. $16y^2 - x^2 = 144$ **8.** $9x^2 - 25y^2 = 225$

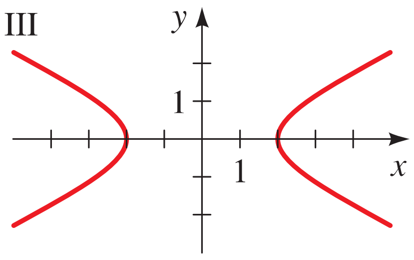
I



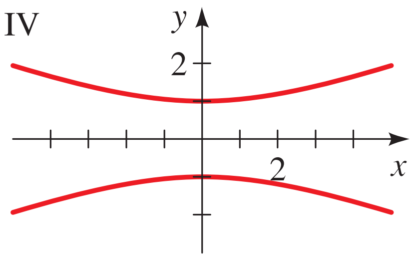
II



III



IV



9-20 ■ Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola, y trace su gráfica.

9. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **10.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

11. $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$ **12.** $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

13. $x^2 - y^2 = 1$ **14.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

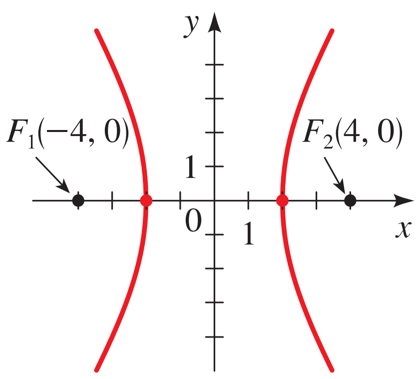
15. $25y^2 - 9x^2 = 225$ **16.** $x^2 - y^2 + 4 = 0$

17. $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ **18.** $x^2 - 2y^2 = 3$

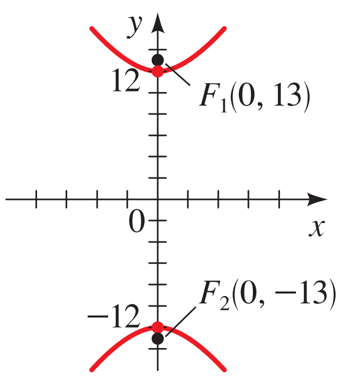
19. $4y^2 - x^2 = 1$ **20.** $9x^2 - 16y^2 = 1$

21-26 ■ Encuentre la ecuación para la hipérbola cuya gráfica se muestra.

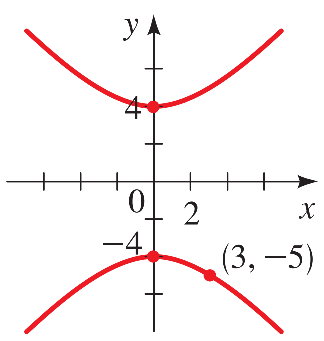
21.



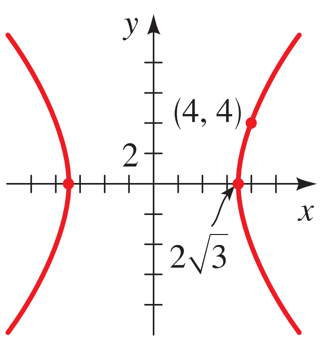
22.



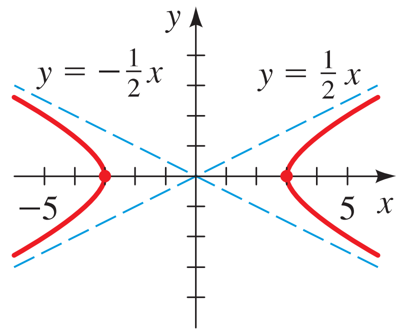
23.



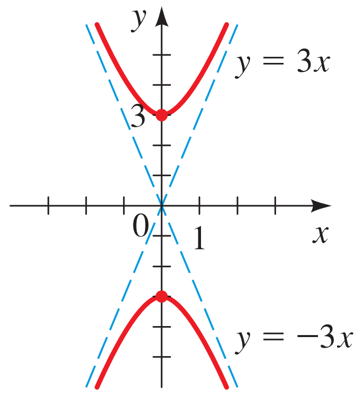
24.



25.



26.



27-30 ■ Use calculadora graficadora para graficar la hipérbola.

27. $x^2 - 2y^2 = 8$ **28.** $3y^2 - 4x^2 = 24$

29. $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{6} = 1$ **30.** $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

31-42 ■ Encuentre una ecuación para la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

31. Focos: $(\pm 5, 0)$, vértices: $(\pm 3, 0)$

32. Focos: $(\pm 0, 10)$, vértices: $(0, \pm 8)$

33. Focos: $(0, \pm 2)$, vértices: $(0, \pm 1)$

34. Focos: $(\pm 6, 0)$, vértices: $(\pm 2, 0)$

35. Vértices: $(\pm 1, 0)$, asíntotas: $y = \pm 5x$

36. Vértices: $(0, \pm 6)$, asíntotas: $y = \pm \frac{1}{3}x$

37. Focos: $(0, \pm 8)$, asíntotas: $y = \pm \frac{1}{2}x$

38. Vértices: $(0, \pm 6)$, hipérbola pasa por $(-5, 9)$

39. Asíntotas: $y = \pm x$, hipérbola pasa por $(5, 3)$

40. Focos: $(\pm 3, 0)$, hipérbola pasa por $(4, 1)$

41. Focos: $(\pm 5, 0)$, longitud de eje transverso: 6

42. Focos: $(\pm 3, 0)$, longitud de eje transverso: 1

43. **(a)** Demuestre que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ son perpendiculares entre sí.

(b) Encuentre la ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y con asíntotas perpendiculares entre sí.

44. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

se dice que son **conjugadas** entre sí.

(a) Demuestre que las hipérbolas

$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4y^2 - x^2 + 16 = 0$$

son conjugadas entre sí y trace sus gráficas en los mismos ejes de coordenadas.

(b) ¿Qué tienen en común las hipérbolas del inciso (a)?

(c) Demuestre que cualquier par de hipérbolas conjugadas tiene la relación que usted encontró en el inciso (b).

45. En la deducción de la ecuación de la hipérbola al principio de esta sección, dijimos que la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Indique los pasos necesarios para demostrar esto.

46. **(a)** Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

determine los valores de a, b y c, y encuentre las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

(b) Demuestre que el punto $P(5, \frac{16}{3})$ está sobre esta hipérbola.

(c) Encuentre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$

(d) Verifique que la diferencia entre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ es $2a$.

47. Las hipérbolas se llaman **confocales** si tienen los mismos focos.

(a) Demuestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16 - k} = 1 \quad \text{con } 0 < k < 16$$

son confocales.

(b) Use calculadora graficadora para trazar las ramas superiores de la familia de hipérbolas del inciso (a) para $k = 1, 4, 8$ y 12. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando k aumenta?

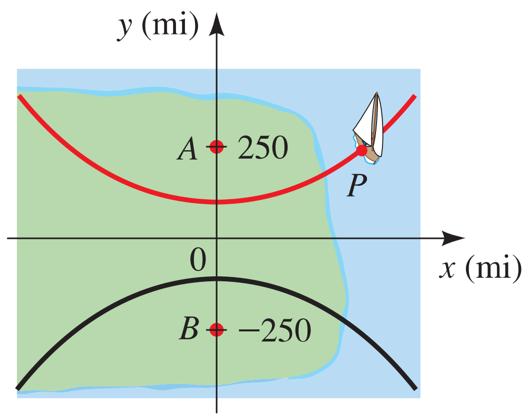
APLICACIONES

48. Navegación En la figura, las estaciones LORAN en A y B están a 500 millas entre sí, y el barco en P recibe la señal de la estación A 2640 microsegundos (μs) antes de recibir la señal de la estación B.

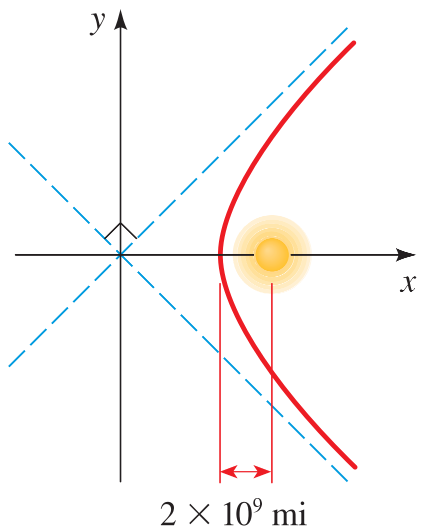
(a) Suponiendo que las señales de radio viajan a 940 pies/μs, encuentre $d(P, A) - d(P, B)$.

(b) Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura. (Use millas como la unidad de distancia.)

(c) Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿a qué distancia está P de A?



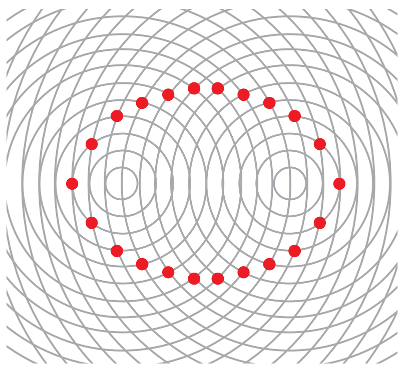
49. Trayectorias de cometas Algunos cometas, como el Halley, son una parte permanente del sistema solar, moviéndose en órbitas elípticas alrededor del Sol. Otros cometas pasan por el sistema solar sólo una vez, siguiendo una trayectoria hiperbólica con el Sol en un foco. La figura en la parte superior de la columna siguiente muestra la trayectoria de uno de estos cometas. Encuentre una ecuación para la trayectoria, suponiendo que lo más que se acerca el cometa al Sol es 2×10^9 millas y que la trayectoria que el cometa estaba tomando, antes de acercarse al sistema solar, está en ángulo recto con respecto a la trayectoria con la que continúa después de salir del sistema solar.

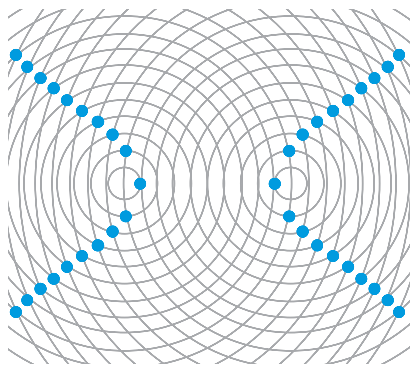


50. Olas en una piscina Dos piedras se dejan caer simultáneamente en una piscina con agua en calma. Las crestas de las ondas resultantes forman circunferencias concéntricas igualmente espaciadas, como se ve en las figuras. Las olas interactúan unas con otras para crear ciertos patrones de interferencia.

(a) Explique por qué los puntos rojos están sobre una elipse.

(b) Explique por qué los puntos azules están sobre una hipérbola.





DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

51. Hipérbolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de usos de hipérbolas. Encuentre otras situaciones en la vida real en las que aparecen hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica en la sección de bibliografía de su biblioteca, o busque en la Internet.

52. Luces de una lámpara La luz de una lámpara forma una superficie iluminada en una pared, como se ve en la figura. ¿Por qué es una hipérbola el límite de esta superficie iluminada? ¿Puede una persona sostener una linterna para que su haz forme una hipérbola en el suelo?

11.4 CÓNICAS DESPLAZADAS

Desplazamiento de gráficas de ecuaciones ▶ Elipses desplazadas ▶ Parábolas desplazadas ▶ Hipérbolas desplazadas ▶ La ecuación general de una cónica desplazada

En las secciones precedentes estudiamos parábolas con vértices en el origen y elipses e hipérbolas con centros en el origen. Nos restringimos a estos casos porque estas ecuaciones tienen la forma más sencilla. En esta sección consideramos cónicas cuyos vértices y centros no están necesariamente en el origen, y determinamos la forma en que esto afecta sus ecuaciones.

▼ Desplazamiento de gráficas de ecuaciones

En la Sección 2.5 estudiamos transformaciones de funciones que tienen el efecto de desplazar sus gráficas. En general, para cualquier ecuación en x y y, si sustituimos x con $x - h$ o con $x + h$, la gráfica de la nueva ecuación es simplemente la vieja gráfica desplazada horizontalmente; si y se sustituye con $y - k$ o con $y + k$, la gráfica se desplaza verticalmente. El siguiente recuadro da los detalles.

DESPLAZAMIENTO DE GRÁFICAS DE ECUACIONES

Si h y k son números reales positivos, entonces sustituir x por $x - h$ o por $x + h$ o sustituir y con $y - k$ o con $y + k$ tiene el (los) siguiente(s) efecto(s) en la gráfica de cualquier ecuación en x y y.

Cambio	Cómo es desplazada la gráfica
1. x sustituida con $x - h$	A la derecha h unidades
2. x sustituida con $x + h$	A la izquierda h unidades
3. y sustituida con $y - k$	Hacia arriba k unidades
4. y sustituida con $y + k$	Hacia abajo k unidades

▼ Elipses desplazadas

Apliquemos desplazamiento horizontal y vertical a la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 1. Si la desplazamos de modo que su centro se encuentre en el punto (h, k) en lugar de en el origen, entonces su ecuación se convierte en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

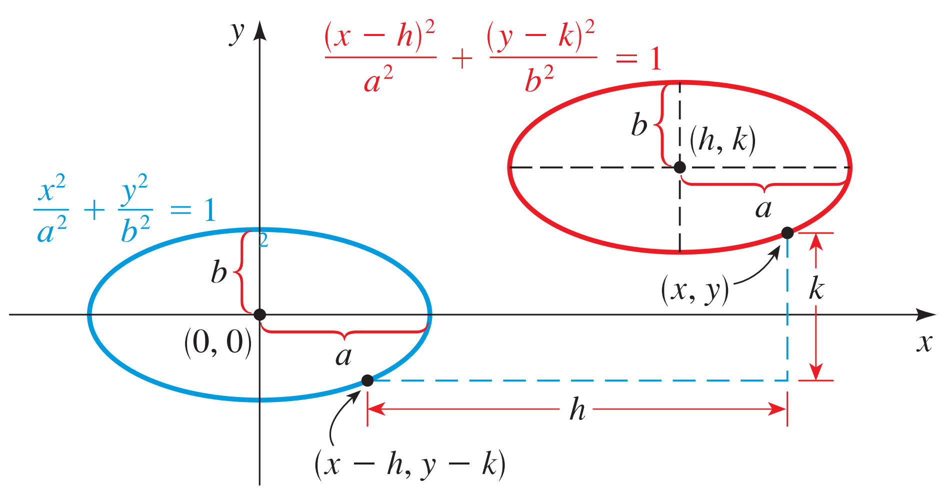


FIGURA 1 Elipse desplazada

EJEMPLO 1 | Trazar la gráfica de una elipse desplazada

Trace una gráfica de la elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

SOLUCIÓN La elipse

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse desplazada}$$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades. Los puntos extremos de los ejes menor y mayor de la elipse con centro en el origen son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$. Aplicamos los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$\begin{aligned}
(2, 0) &\rightarrow (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)\\
(-2, 0) &\rightarrow (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)\\
(0, 3) &\rightarrow (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)\\
(0, -3) &\rightarrow (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)
\end{aligned}$$

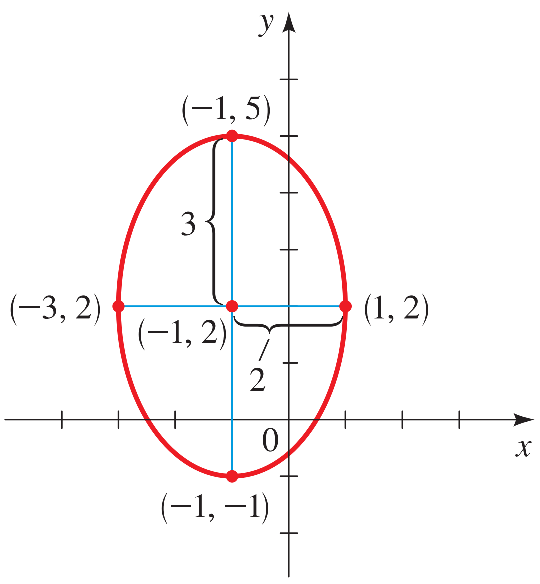


FIGURA 2 $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

Esto nos ayuda a trazar la gráfica de la Figura 2.

Para hallar los focos de la elipse desplazada, primero hallamos los focos de la elipse con centro en el origen. Como $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, tenemos $c^2 = 9 - 4 = 5$, de modo que $c = \sqrt{5}$. Por lo tanto, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. Desplazando a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, obtenemos

$$\begin{aligned}
(0, \sqrt{5}) &\rightarrow (0 - 1, \sqrt{5} + 2) = (-1, 2 + \sqrt{5})\\
(0, -\sqrt{5}) &\rightarrow (0 - 1, -\sqrt{5} + 2) = (-1, 2 - \sqrt{5})
\end{aligned}$$

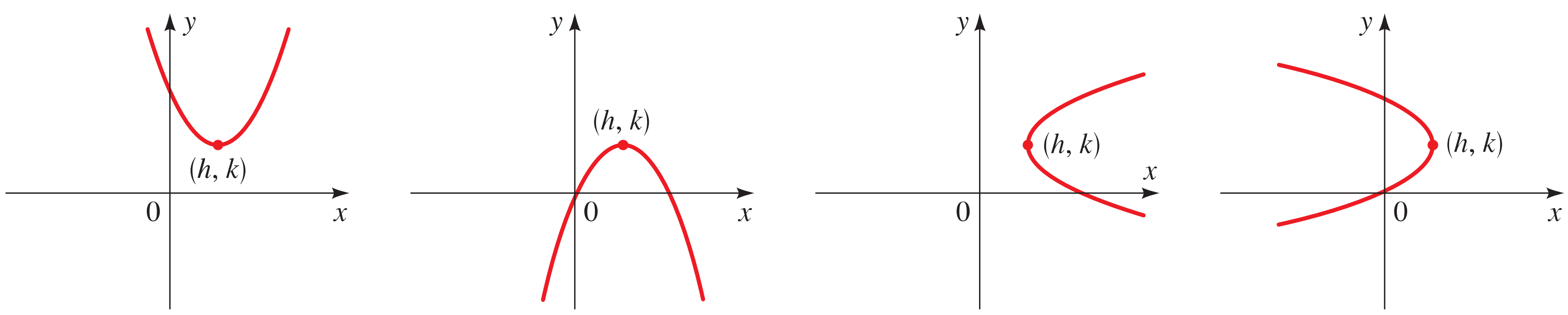
En consecuencia, los focos de la elipse desplazada son

$$(-1, 2 + \sqrt{5}) \qquad \text{y} \qquad (-1, 2 - \sqrt{5})$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7** ■

▼ Parábolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a parábolas lleva a las ecuaciones y gráficas que se ilustran en la Figura 3.



(a) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, $p > 0$ (b) $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, $p < 0$ (c) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, $p > 0$ (d) $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, $p < 0$

FIGURA 3 Parábolas desplazadas

EJEMPLO 2 | Graficar una parábola desplazada

Determine el vértice, foco y directriz y trace una gráfica de la parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

SOLUCIÓN Completamos el cuadrado en x para poner esta ecuación en una de las formas de la Figura 3.

$$x^2 - 4x + 4 = 8y - 28 + 4 \qquad \text{Sume 4 para completar el cuadrado}$$

$$(x - 2)^2 = 8y - 24$$

$$(x - 2)^2 = 8(y - 3) \qquad \text{Parábola desplazada}$$

Esta parábola abre hacia arriba con vértice en (2, 3). Se obtiene de la parábola

$$x^2 = 8y \qquad \text{Parábola con vértice en el origen}$$

al desplazar a la derecha 2 unidades y hacia arriba 3 unidades. Como $4p = 8$, tenemos $p = 2$ y el foco está 2 unidades arriba del vértice y la directriz está 2 unidades abajo del vértice. Entonces el foco es (2, 5) y la directriz es $y = 1$. La gráfica se muestra en la Figura 4.

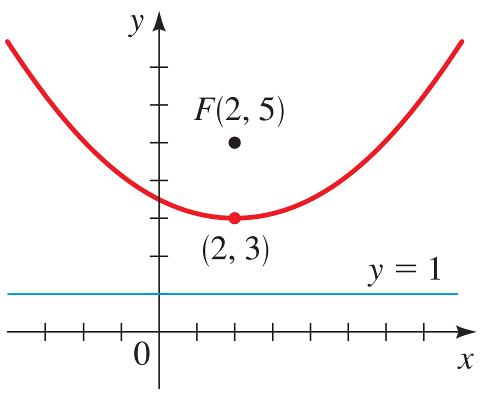
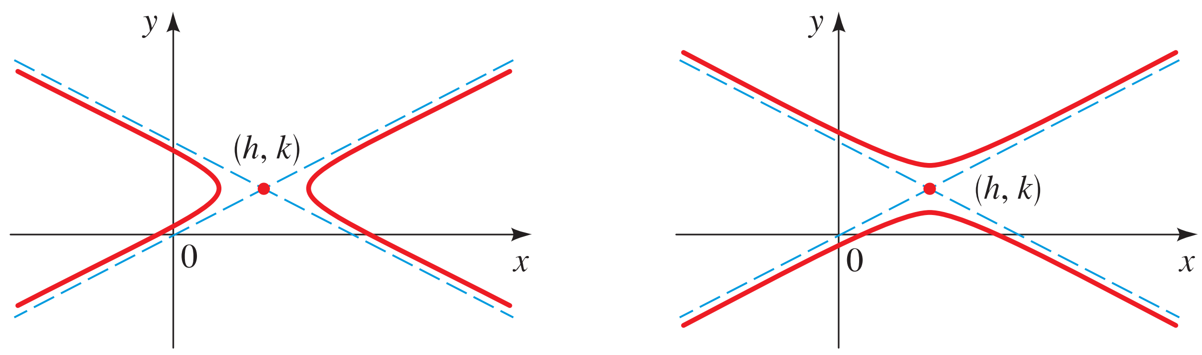


FIGURA 4 $x^2 - 4x = 8y - 28$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9** Y **23**

Hipérbolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a las hipérbolas lleva a las ecuaciones y gráficas que se muestran en la Figura 5.



(a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ (b) $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

FIGURA 5 Hipérbolas desplazadas

EJEMPLO 3 | Graficar una hipérbola desplazada

Una cónica desplazada tiene la ecuación

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

(a) Complete el cuadrado en x y y para demostrar que la ecuación representa una hipérbola.

(b) Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola, y trace su gráfica.

(c) Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

(a) Completamos los cuadrados tanto de x como de y:

$$9(x^2 - 8x \qquad) - 16(y^2 + 2y \qquad) = 16 \qquad \text{Agrupe términos y factorice}$$

$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \cdot 16 - 16 \cdot 1 \qquad \text{Complete los cuadrados}$$

$$9(x - 4)^2 - 16(y + 1)^2 = 144 \qquad \text{Divida esto entre 144}$$

$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola desplazada}$$

Comparando esto con la Figura 5(a), vemos que ésta es la ecuación de una hipérbola desplazada.

(b) La hipérbola desplazada tiene centro $(4, -1)$ y un eje transverso horizontal.

CENTRO $(4, -1)$

Su gráfica tendrá la misma forma que la hipérbola no desplazada

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola con centro en el origen}$$

Como $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, tenemos $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Entonces los focos se encuentran 5 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y los vértices están 4 unidades a cada lado del centro.

FOCOS $(-1, -1)$ y $(9, -1)$

VÉRTICES $(0, -1)$ y $(8, -1)$

Las asíntotas de la hipérbola no desplazada son $y = \pm\frac{3}{4}x$, de modo que las asíntotas de la hipérbola desplazada se encuentran como sigue.

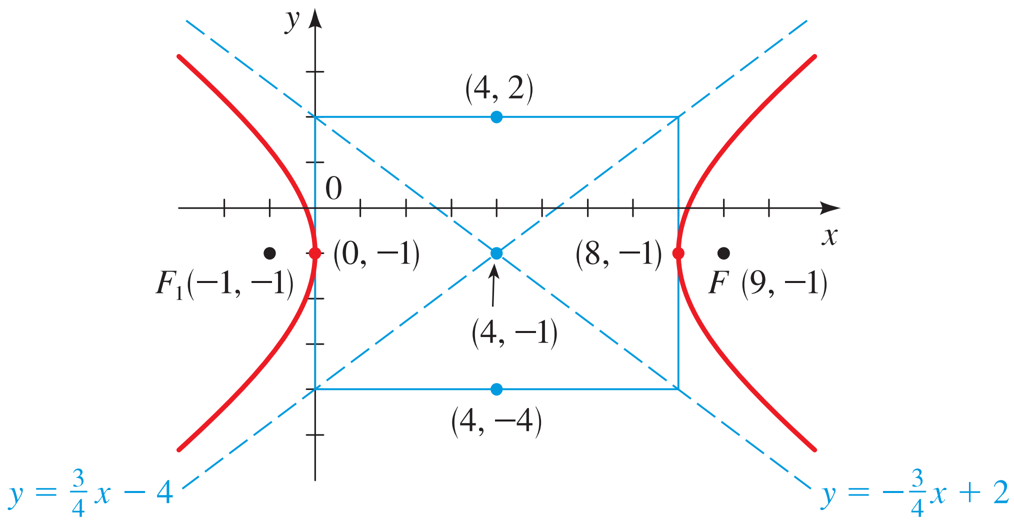
ASÍNTOTAS

$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

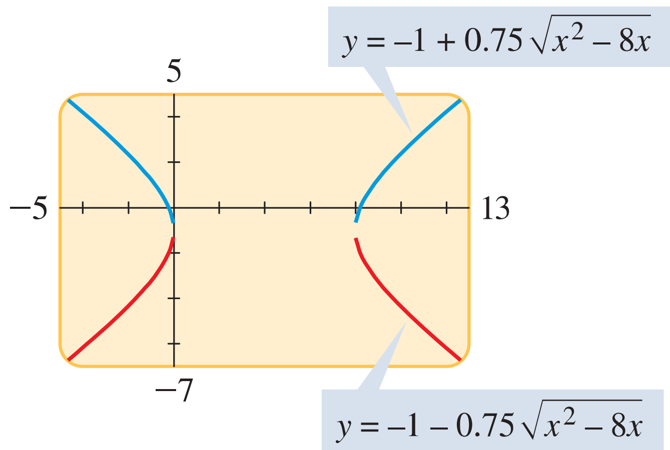
$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}x \mp 3$$

$$y = \tfrac{3}{4}x - 4 \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{3}{4}x + 2$$

Para ayudarnos a trazar la hipérbola, trazamos la caja central; se prolonga 4 unidades a la izquierda y derecha del centro, y 3 unidades hacia arriba y hacia abajo del centro. A continuación trazamos las asíntotas y completamos la gráfica de la hipérbola desplazada, como se muestra en la Figura 6(a).



(a)



(b)

FIGURA 6 $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

(c) Para trazar la gráfica usando una calculadora graficadora, necesitamos despejar y. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en y, de modo que usamos la Fórmula Cuadrática para despejar y. Escribiendo la ecuación en la forma

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 72x + 16 = 0$$

Observe que la ecuación de una hipérbola no define a y como función de x (vea página 158). Es por ello que necesitamos graficar dos funciones para graficar una hipérbola.

obtenemos

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(16)(-9x^2 + 72x + 16)}}{2(16)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{576x^2 - 4608x}}{32} \qquad \text{Expanda}$$

$$= \frac{-32 \pm 24\sqrt{x^2 - 8x}}{32} \qquad \text{Factorice 576 debajo el radical}$$

$$= -1 \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, graficamos las funciones

$$y = -1 + 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

y

$$y = -1 - 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

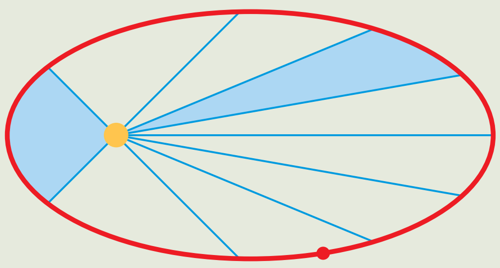
como se ve en la Figura 6(b).

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **13** Y **25**

JOHANNES KEPLER (1571-1630) fue el primero en dar una descripción correcta del movimiento de los planetas. La cosmología de su tiempo postulaba complicados sistemas de circunferencias moviéndose en circunferencias para describir estos movimientos. Kepler buscaba una descripción más sencilla y armónica. Como astrónomo oficial de la corte imperial de Praga, estudió las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, cuyos datos eran los más precisos de que se disponía en aquel tiempo. Después de numerosos intentos por hallar una teoría, Kepler hizo el trascendental descubrimiento de que las órbitas de los planetas eran elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco.
2. El segmento de recta que une al Sol y un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales (vea la figura).
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje mayor de su órbita.

Su formulación de estas leyes es quizá la deducción más impresionante hecha a partir de datos empíricos en la historia de la ciencia.



La ecuación general de una cónica desplazada

Si expandimos y simplificamos las ecuaciones de cualesquiera de las cónicas desplazadas que se ilustran en las Figuras 1, 3 y 5, entonces siempre vamos a obtener una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son diferentes de cero ambas. A la inversa, si empezamos con una ecuación de esta forma, entonces completamos el cuadrado en x y y para ver cuál tipo de sección cónica representa. En algunos casos la gráfica de la ecuación resulta ser sólo un par de rectas o un solo punto, o puede no haber gráfica en absoluto. Estos casos reciben el nombre de **cónicas degeneradas**. Si la ecuación no es degenerada, entonces podemos saber si representa una parábola, una elipse o una hipérbola simplemente con examinar los signos de A y C, como se describe en el recuadro siguiente.

ECUACIÓN GENERAL DE UNA CÓNICA DESPLAZADA

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C son diferentes de cero ambas, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados la gráfica es

1. una parábola si A o C es 0,
2. una elipse si A y C tienen el mismo signo (o una circunferencia si $A = C$).
3. una hipérbola si A y C tienen signos contrarios.

EJEMPLO 4 | Una ecuación que lleva a una cónica degenerada

Trace la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

SOLUCIÓN Como los coeficientes de x^2 y y^2 son de signo contrario, esta ecuación se ve como si debiera representar una hipérbola (como la ecuación del Ejemplo 3). Para ver si éste es el caso, completamos los cuadrados:

$$9(x^2 + 2x \quad\quad) - (y^2 - 6y \quad\quad) = 0 \qquad \text{Agrupe términos y factorice 9}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 0 + 9 \cdot 1 - 9 \qquad \text{Complete los cuadrados}$$

$$9(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{9} = 0 \qquad \text{Divida entre 9}$$

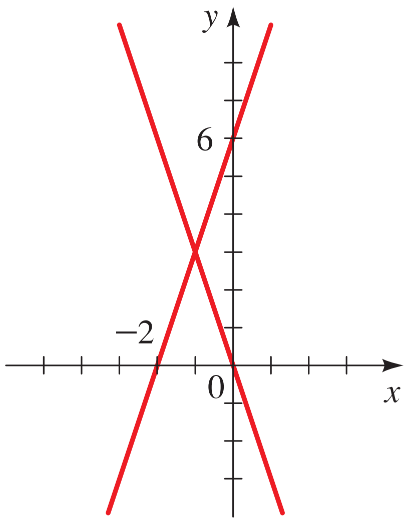


FIGURA 7
$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

Para que esto se ajuste a la forma de la ecuación de una hipérbola, necesitaríamos una constante diferente de cero a la derecha del signo igual. En realidad, un ulterior análisis indica que ésta es la ecuación de un par de rectas que se cruzan:

$$(y-3)^2 = 9(x+1)^2$$

$$y - 3 = \pm 3(x+1) \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

$$y = 3(x+1) + 3 \qquad \text{o} \qquad y = -3(x+1) + 3$$

$$y = 3x + 6 \qquad\qquad y = -3x$$

Estas rectas están graficadas en la Figura 7.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Debido a que la ecuación del Ejemplo 4 a primera vista se veía como la ecuación de una hipérbola, pero, resultó que representaba simplemente un par de rectas, nos referimos a su gráfica como una **hipérbola degenerada**. Las elipses y parábolas degeneradas también pueden aparecer cuando completamos el (los) cuadrado(s) en una ecuación que parece representar una cónica. Por ejemplo, la ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0$$

se ve como si debiera representar una elipse, porque los coeficientes de x^2 y y^2 tienen el mismo signo. Pero completar el cuadrado nos lleva a

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

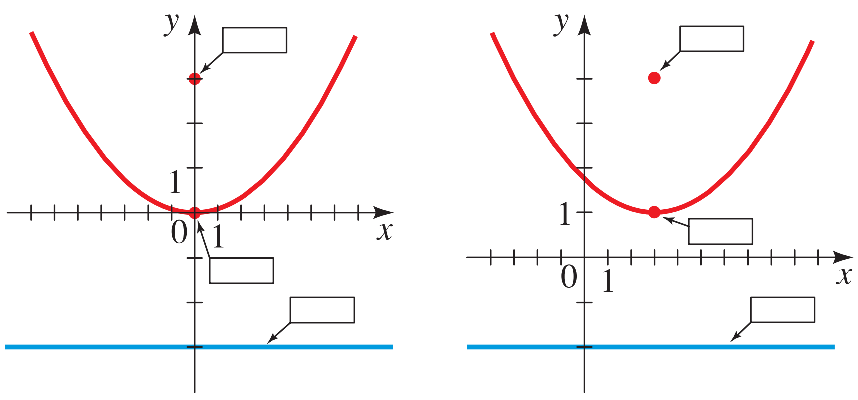
que no tiene solución en absoluto (porque la suma de los dos cuadrados no puede ser negativa). Esta ecuación es, por lo tanto, degenerada.

11.4 EJERCICIOS

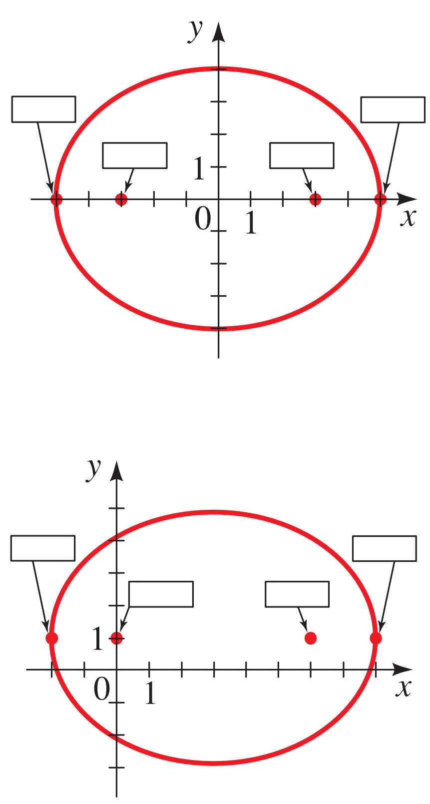
CONCEPTOS

1. Suponga que deseamos graficar una ecuación en x y y.
   (a) Si sustituimos x con $x - 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la ________3 unidades. Si sustituimos x con $x + 3$, la gráfica de la ecuación se desplaza a la _______3 unidades.
   (b) Si sustituimos y con $y - 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza ________ 1 unidad. Si sustituimos y con $y + 1$, la gráfica de la ecuación se desplaza __________ 1 unidad.

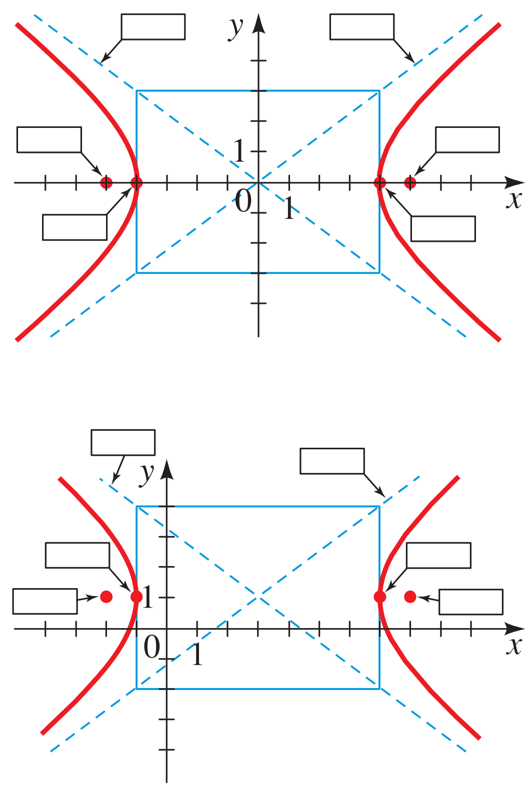
2. Nos dan las gráficas de $x^2 = 12y$ y $(x-3)^2 = 12(y-1)$. Asigne coordenadas al foco, directriz y vértice de cada parábola.



3. Nos dan las gráficas de $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ y $\frac{(x-3)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{4^2} = 1$.
   Asigne coordenadas a los vértices y focos en cada elipse.



4. Nos dan las gráficas de $\dfrac{x^2}{4^2} - \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ y $\dfrac{(x-3)^2}{4^2} - \dfrac{(y-1)^2}{3^2} = 1$. Asigne coordenadas a vértices, focos y asíntotas en cada hipérbola.



HABILIDADES

5-8 ■ Encuentre el centro, focos y vértices de la elipse, y determine las longitudes de los ejes mayor y menor. A continuación, trace la gráfica.

5. $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ **6.** $\dfrac{(x-3)^2}{16} + (y+3)^2 = 1$

7. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y+5)^2}{25} = 1$ **8.** $\dfrac{(x+2)^2}{4} + y^2 = 1$

9-12 ■ Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola. A continuación, trace la gráfica.

9. $(x-3)^2 = 8(y+1)$ **10.** $(y+5)^2 = -6x + 12$

11. $-4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y$ **12.** $y^2 = 16x - 8$

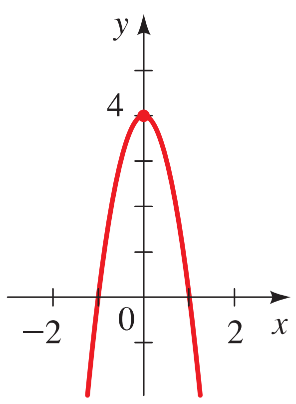
13-16 ■ Encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas de la hipérbola. A continuación, trace la gráfica.

13. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$ **14.** $(x-8)^2 - (y+6)^2 = 1$

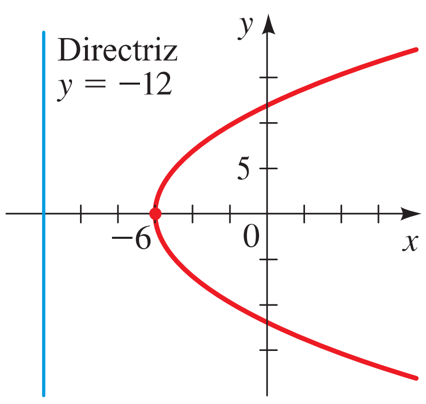
15. $y^2 - \dfrac{(x+1)^2}{4} = 1$ **16.** $\dfrac{(y-1)^2}{25} - (x+3)^2 = 1$

17-22 ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

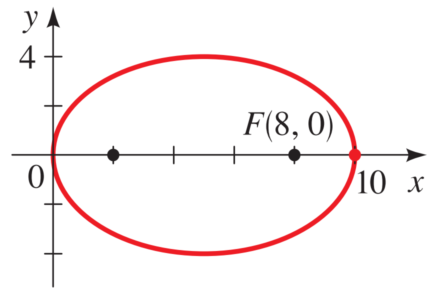
17.



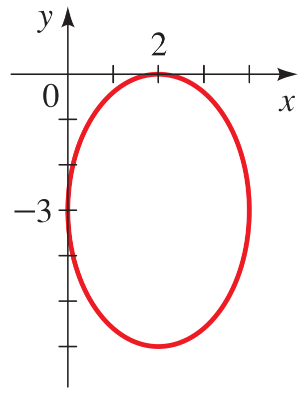
18.



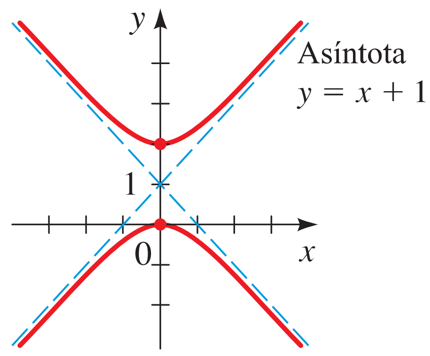
19.



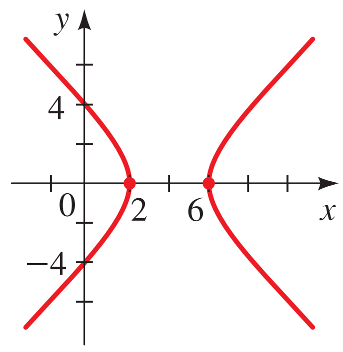
20.



21.



22.



23-34 ■ Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, encuentre el vértice, foco y directriz. Si es una hipérbola, encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas. A continuación, trace la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica, explique por qué.

23. $y^2 = 4(x + 2y)$

24. $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

25. $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

26. $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

27. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

28. $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

29. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

30. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

31. $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

32. $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

33. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

34. $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

35-38 ■ Use calculadora graficadora para graficar la cónica.

35. $2x^2 - 4x + y + 5 = 0$

36. $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

37. $9x^2 + 36 = y^2 + 36x + 6y$

38. $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

39. Determine cuál debe ser el valor de F si la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

es **(a)** una elipse, **(b)** un solo punto, o **(c)** el conjunto vacío.

40. Encuentre una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y tiene su otro foco en el origen.

41. Este ejercicio se refiere a **parábolas confocales**, es decir, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

(a) Trace gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

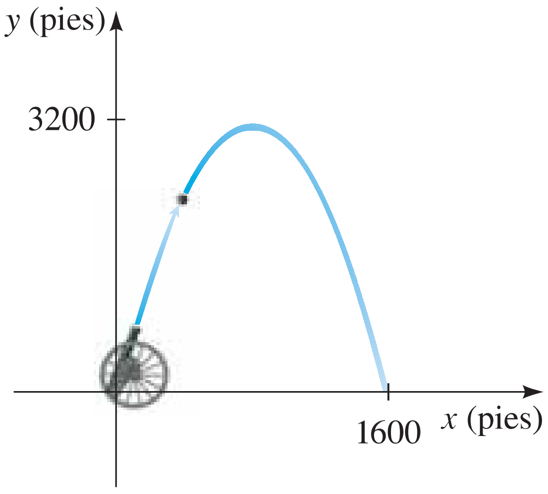
para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

(b) Demuestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

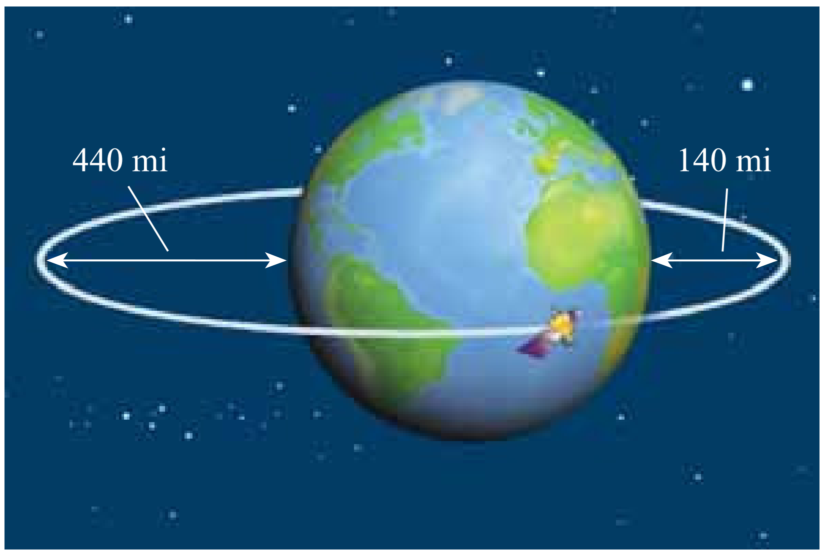
(c) Describa el efecto en la gráfica de mover el vértice más cerca del origen.

APLICACIONES

42. Trayectoria de una bala de cañón Un cañón dispara una bala como se ve en la figura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala cae al suelo a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza es 3200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para la trayectoria de la bala. Coloque el origen en el lugar donde está el cañón.



43. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de ésta en un foco, como se muestra en la figura de la parte superior de la columna de la derecha. La altura del satélite arriba de la Tierra varía entre 140 millas y 440 millas. Suponga que la Tierra es una esfera con radio de 3960 mi. Encuentre una ecuación para la trayectoria del satélite con el origen en el centro de la Tierra.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

44. Una familia de cónicas confocales Las cónicas que comparten un foco se llaman **confocales**. Considere la familia de cónicas que tienen un foco en (0, 1) y un vértice en el origen, como se ve en la figura.

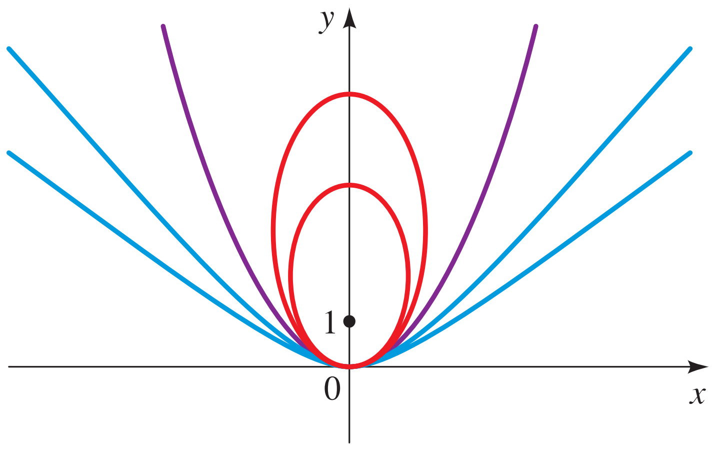
(a) Encuentre ecuaciones de dos elipses diferentes que tengan estas propiedades.

(b) Encuentre ecuaciones de dos hipérbolas diferentes que tengan estas propiedades.

(c) Explique por qué sólo una parábola satisface estas propiedades. Encuentre su ecuación.

(d) Trace las cónicas que encontró en los incisos (a), (b) y (c) en los mismos ejes de coordenadas (para las hipérbolas, trace sólo las ramas superiores).

(e) ¿Cómo están relacionadas las elipses e hipérbolas con la parábola?



11.5 ROTACIÓN DE EJES

Rotación de ejes ▶ Ecuación general de una cónica ▶ El discriminante

En la Sección 11.4 estudiamos cónicas con ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Vimos que la gráfica es siempre una elipse, parábola o hipérbola con ejes horizontales o verticales (excepto en los casos degenerados). En esta sección estudiamos la ecuación de segundo grado más general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

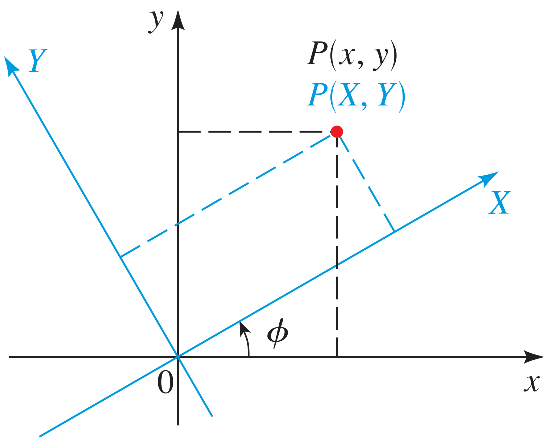


FIGURA 1

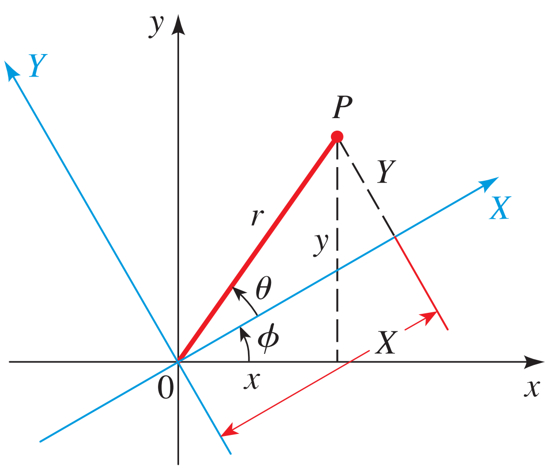


FIGURA 2

Veremos que la gráfica de una ecuación de esta forma también es una cónica. De hecho, al girar los ejes de las coordenadas un ángulo apropiado, podemos eliminar el término Bxy y luego usar nuestro conocimiento de secciones cónicas para analizar la gráfica.

▼ Rotación de ejes

En la Figura 1, los ejes x y y han sido girados un ángulo agudo ϕ alrededor del origen para producir un nuevo par de ejes, que llamamos ejes X y Y. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) en sistema antiguo tiene coordenadas (X, Y) en el nuevo sistema. Si hacemos que r denote la distancia de P del origen y que θ sea el ángulo que el segmento OP forma con el nuevo eje X, entonces podemos ver de la Figura 2 (al considerar los dos triángulos rectángulos de la figura) que

$$X = r\cos\theta \qquad\qquad Y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$x = r\cos(\theta + \phi) \qquad\qquad y = r\,\text{sen}(\theta + \phi)$$

Usando la Fórmula de la Adición para Coseno, vemos que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\,\text{sen}\,\theta)\,\text{sen}\,\phi \\ &= X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \end{aligned}$$

Análogamente, podemos aplicar la Fórmula de la Adición para Seno a la expresión para y para obtener $y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$. Tratando estas ecuaciones para x y y como un sistema de ecuaciones lineales con las variables X y Y (vea Ejercicio 35), obtenemos expresiones para X y Y en términos de x y y, como se detalla en el recuadro siguiente.

FÓRMULAS PARA ROTACIÓN DE EJES

Suponga que los ejes x y y de un plano de coordenadas se giran el ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y, como se muestra en la Figura 1. Entonces las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en los planos xy y XY están relacionados como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi \qquad\qquad X = x\cos\phi + y\,\text{sen}\,\phi$$
$$y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi \qquad\qquad Y = -x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi$$

EJEMPLO 1 | Rotación de ejes

Si los ejes de coordenadas se giran 30°, encuentre las coordenadas XY del punto con coordenadas xy $(2, -4)$.

SOLUCIÓN Usando las Fórmulas para Rotación de Ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$, obtenemos

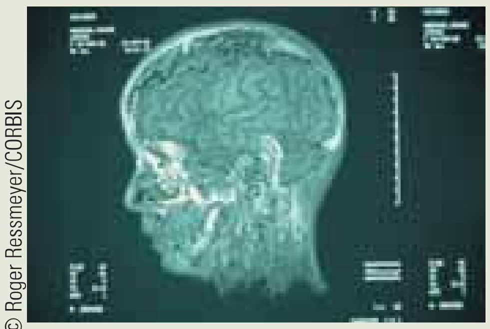
$$X = 2\cos 30° + (-4)\,\text{sen}\,30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\,\text{sen}\,30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas XY son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3 ■

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO



Imágenes del interior de nuestra cabeza

¿Cómo le gustaría a usted ver el interior de su cabeza? La idea no es particularmente atrayente para la mayoría de nosotros, pero es frecuente que los médicos necesiten precisamente eso. Si pueden ver sin recurrir a cirugía invasiva, es mejor. Una placa de rayos X en realidad no da una imagen del interior, sino simplemente una "gráfica" de la densidad del tejido por el que deben pasar los rayos X. En consecuencia, una placa de rayos X es una vista "aplanada" en una dirección. Suponga que usted obtiene una placa de rayos X de muchas direcciones diferentes. ¿Se pueden usar estas "gráficas" para reconstruir la imagen interior en tres dimensiones? Éste es un problema puramente matemático y fue resuelto por matemáticos hace mucho tiempo. Sin embargo, reconstruir la vista interior requiere miles de tediosos cálculos. Hoy en día, las matemáticas y computadoras de alta velocidad hacen posible "ver dentro" mediante un proceso llamado tomografía asistida por computadora (o escáner CAT). Los matemáticos siguen investigando mejores formas de usar matemáticas para reconstruir imágenes. Una de las técnicas más recientes, llamada imágenes de resonancia magnética (MRI), combina biología molecular y matemáticas para una clara "vista interior".

EJEMPLO 2 | Giro de una hipérbola

Gire los ejes de coordenadas un ángulo de 45° para demostrar que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

SOLUCIÓN Usamos las Fórmulas para Rotación de Ejes con $\phi = 45°$ para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\operatorname{sen} 45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación original da

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Reconocemos esto como una hipérbola con vértices $(\pm 2, 0)$ en el sistema de coordenadas XY. Sus asíntotas son $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes de coordenadas del sistema xy (vea Figura 3).

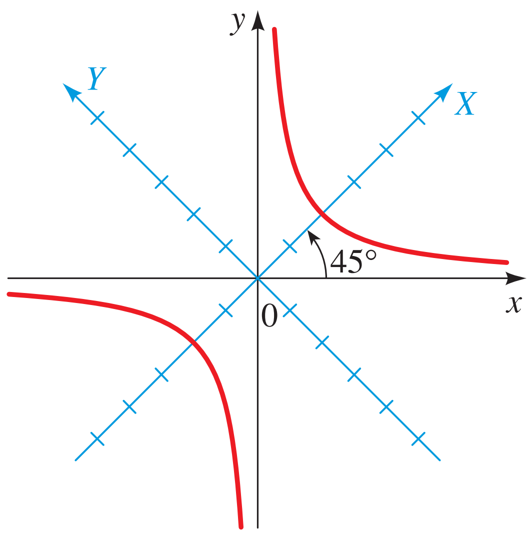


FIGURA 3
$xy = 2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Ecuación general de una cónica

El método del Ejemplo 2 se puede usar para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación con X y Y que no contiene un término XY al escoger un ángulo de rotación apropiado. Para hallar el ángulo que funcione, giramos los ejes un ángulo ϕ y sustituimos x y y usando las Fórmulas para Rotación de Ejes:

$$\begin{aligned} A(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)^2 &+ B(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) \\ &+ C(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi)^2 + D(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi) \\ &+ E(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) + F = 0 \end{aligned}$$

Si expandimos esto y reunimos términos semejantes, obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\phi + B \operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\
B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \\
C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \\
D' &= D\cos\phi + E\operatorname{sen}\phi \\
E' &= -D\operatorname{sen}\phi + E\cos\phi \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Para eliminar los términos XY, nos gustaría escoger ϕ de modo que $B' = 0$, es decir,

Fórmulas de Ángulo Doble

$\operatorname{sen} 2\phi = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\phi$

$\cos 2\phi = \cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi$

$$2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) = 0$$

$$(C - A)\operatorname{sen} 2\phi + B\cos 2\phi = 0 \qquad \text{Fórmulas de Ángulo Doble para Seno y Coseno}$$

$$B\cos 2\phi = (A - C)\operatorname{sen} 2\phi$$

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} \qquad \text{Divida entre } B \operatorname{sen} 2\phi$$

El cálculo precedente demuestra el teorema siguiente.

SIMPLIFICACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE CÓNICAS

Para eliminar el término xy en la ecuación general de cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gire los ejes el ángulo agudo ϕ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

EJEMPLO 3 | Eliminar el término en *xy*

Use una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación

$$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$$

Identifique y trace la curva.

SOLUCIÓN Para eliminar el término en xy, giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Entonces $2\phi = 60°$ y por lo tanto $\phi = 30°$. Con este valor de ϕ obtenemos

$$x = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - Y\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Fórmula para Rotación de Ejes}$$

$$y = X\left(\frac{1}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{sen}\phi = \frac{1}{2}$$

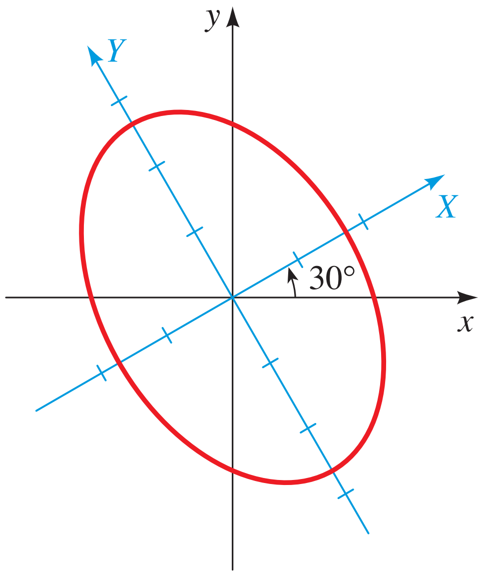


FIGURA 4
$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$

Sustituyendo estos valores por x y y en la ecuación dada lleva a

$$6\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 21\sqrt{3}$$

Expandiendo y reuniendo términos semejantes, obtenemos

$$7\sqrt{3}X^2 + 3\sqrt{3}Y^2 = 21\sqrt{3}$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad \text{Divida entre } 21\sqrt{3}$$

Ésta es la ecuación de una elipse en el sistema de coordenadas XY. Los focos se encuentran sobre el eje Y. Como $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$, la longitud del eje mayor es $2\sqrt{7}$, y la longitud del eje menor es $2\sqrt{3}$. La elipse está trazada en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

En el ejemplo precedente pudimos determinar ϕ sin dificultad, porque recordamos que $\cot 60° = \sqrt{3}/3$. En general, hallar ϕ no es tan fácil. El siguiente ejemplo ilustra la forma en que las siguientes Fórmulas de Medio Ángulo, que son válidas para $0 < \phi < \pi/2$, son útiles para determinar ϕ (vea Sección 7.3).

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} \qquad \operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

EJEMPLO 4 | Graficar una cónica girada

Una cónica tiene la ecuación

$$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$$

(a) Use una rotación de ejes para eliminar el término en xy.

(b) Identifique y trace la gráfica.

(c) Trace la gráfica usando una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

(a) Para eliminar el término xy, giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga la ecuación

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{64 - 36}{96} = \frac{7}{24}$$

En la Figura 5 trazamos un triángulo con $\cot 2\phi = \frac{7}{24}$. Vemos que

$$\cos 2\phi = \tfrac{7}{25}$$

entonces, usando las Fórmulas de Medio Ángulo, obtenemos

$$\cos\phi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

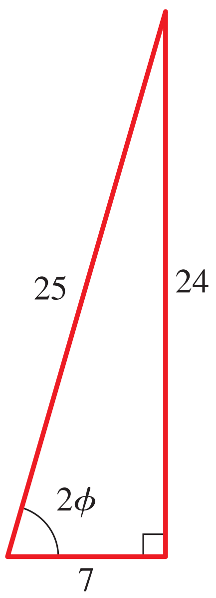


FIGURA 5

Las Fórmulas para Rotación de Ejes entonces dan

$$x = \tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tendremos

$$64\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)^2 + 96\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right) + 36\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)^2 - 15\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right) + 20\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right) - 25 = 0$$

Expandiendo y reuniendo términos semejantes, obtenemos

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

$$-4X^2 = Y - 1 \qquad \text{Simplifique}$$

$$X^2 = -\tfrac{1}{4}(Y - 1) \qquad \text{Divida entre 4}$$

(b) Reconocemos esto como la ecuación de una parábola que abre a lo largo del eje Y negativo y tiene vértice $(0, 1)$ en coordenadas XY. Como $4p = -\frac{1}{4}$ tenemos $p = -\frac{1}{16}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{15}{16}\right)$ y la directriz es $Y = \frac{17}{16}$. Usando

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

trazamos la gráfica en la Figura 6(a).

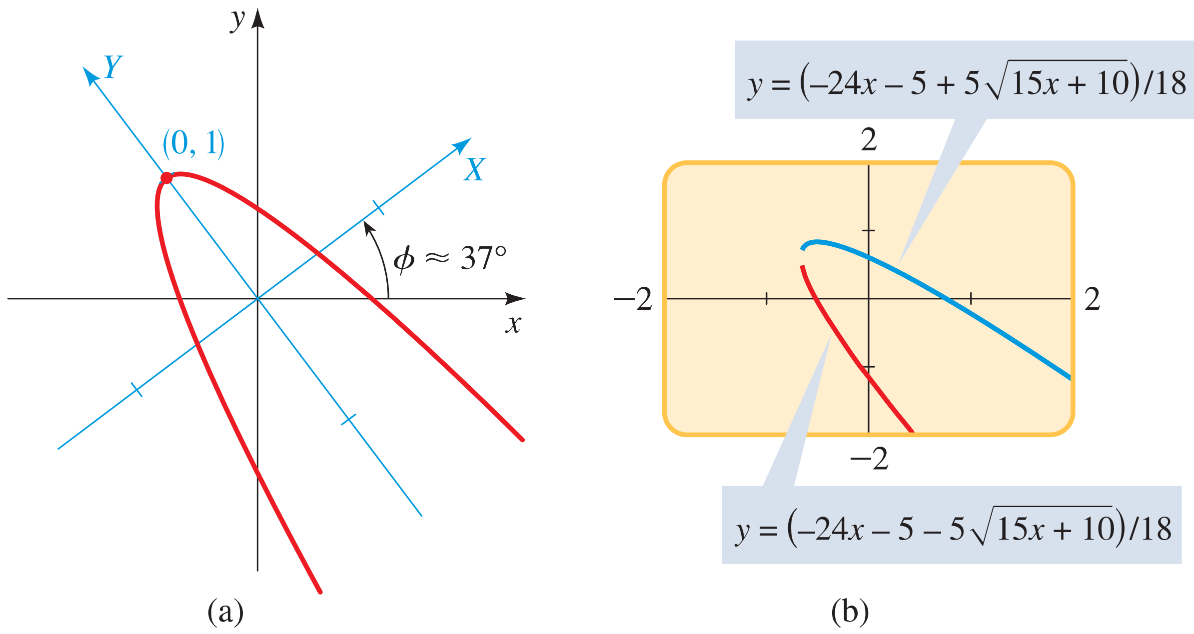


FIGURA 6
$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$

(c) Para trazar la gráfica usando calculadora graficadora, necesitamos despejar y. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en y, de modo que podemos usar la Fórmula Cuadrática para despejar y. Escribiendo la ecuación en la forma

$$36y^2 + (96x + 20)y + (64x^2 - 15x - 25) = 0$$

obtenemos

$$y = \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{(96x + 20)^2 - 4(36)(64x^2 - 15x - 25)}}{2(36)} \qquad \text{Fórmula Cuadrática}$$

$$= \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{6000x + 4000}}{72} \qquad \text{Expanda}$$

$$= \frac{-96x - 20 \pm 20\sqrt{15x + 10}}{72} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-24x - 5 \pm 5\sqrt{15x + 10}}{18} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la parábola, graficamos las funciones

$$y = \left(-24x - 5 + 5\sqrt{15x + 10}\right)/18 \qquad \text{y} \qquad y = \left(-24x - 5 - 5\sqrt{15x + 10}\right)/18$$

como se ve en la Figura 6(b).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El discriminante

En los Ejemplos 3 y 4 pudimos identificar el tipo de cónica al girar los ejes. El siguiente teorema da reglas para identificar el tipo de cónica directamente de la ecuación, sin girar ejes.

IDENTIFICACIÓN DE CÓNICAS POR EL DISCRIMINANTE

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si $B^2 - 4AC = 0$
2. una elipse si $B^2 - 4AC < 0$
3. una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

DEMOSTRACIÓN Si giramos los ejes un ángulo ϕ, obtenemos una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde A', B', C', . . . , están dadas por las fórmulas de la página 760. Un cálculo sencillo demuestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Por lo tanto, la expresión $B^2 - 4AC$ sigue sin cambio para cualquier rotación. En particular, si escogemos una rotación que elimina el término en xy ($B' = 0$), obtenemos

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Por lo tanto, $B^2 - 4AC = 0$ si A' o C' son cero cualquiera de las dos; $B^2 - 4AC < 0$ si A' y C' tienen el mismo signo; $B^2 - 4AC > 0$ si A' y C' tienen signos contrarios. De acuerdo con el recuadro de la página 754, estos casos corresponden a la gráfica de la última ecuación mostrada siendo una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. ■

En la demostración indicamos que el discriminante no cambia con ninguna rotación; por esta razón, se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

EJEMPLO 5 | Identificación de una cónica por el discriminante

Una cónica tiene la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

(a) Use el discriminante para identificar la cónica.

(b) Confirme su respuesta al inciso (a) graficando la cónica con una calculadora graficadora.

SOLUCIÓN

(a) Como $A = 3$, $B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

por lo que la cónica es una hipérbola.

(b) Usando la Fórmula Cuadrática, despejamos y para obtener

$$y = \frac{5x - 1 \pm \sqrt{49x^2 - 2x + 33}}{4}$$

Graficamos estas funciones en la Figura 7. La gráfica confirma que ésta es una hipérbola.

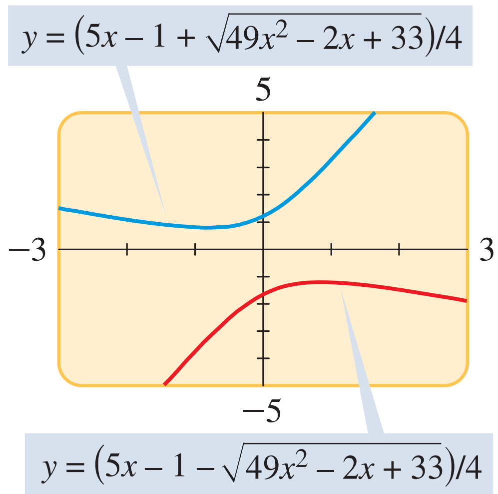


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

11.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Suponga que los ejes x y y son girados un ángulo agudo ϕ para producir los nuevos ejes X y Y. Un punto P en el plano puede ser descrito por sus coordenadas xy (x, y) o sus coordenadas XY (X, Y). Estas coordenadas están relacionadas por las siguientes fórmulas.

   $x =$ ____________ $X =$ ____________

   $y =$ ____________ $Y =$ ____________

2. Considere la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   (a) En general, la gráfica de esta ecuación es una ________.
   (b) Para eliminar el término xy de esta ecuación, giramos los ejes un ángulo ϕ que satisfaga $\cot 2\phi =$ ________.
   (c) El discriminante de esta ecuación es ________.

   Si el discriminante es 0, la gráfica es una ________;

   si es negativo, la gráfica es ________; y

   si es positivo, la gráfica es ________.

HABILIDADES

3-8 ■ Determine las coordenadas XY del punto dado si los ejes de coordenadas se giran el ángulo indicado.

3. $(1, 1)$, $\phi = 45°$
4. $(-2, 1)$, $\phi = 30°$
5. $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$
6. $(2, 0)$, $\phi = 15°$
7. $(0, 2)$, $\phi = 55°$
8. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

9-14 ■ Determine la ecuación de la cónica dada en coordenadas XY cuando los ejes de coordenadas se giran el ángulo indicado.

9. $x^2 - 3y^2 = 4$, $\phi = 60°$
10. $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$
11. $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$
12. $x^2 + 2y^2 = 16$, $\phi = \sin^{-1}\frac{3}{5}$
13. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$
14. $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

15-28 ■ **(a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola. **(b)** Use una rotación de ejes para eliminar el término xy. **(c)** Trace la gráfica.

15. $xy = 8$
16. $xy + 4 = 0$
17. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$
18. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$
19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$
20. $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$
21. $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$
22. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$
23. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$
24. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$
25. $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

26. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x - y - 1)$

27. $52x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

28. $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

29-32 ■ **(a)** Use el discriminante para identificar la cónica.
(b) Confirme su respuesta al graficar la cónica usando calculadora graficadora.

29. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

30. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

31. $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

32. $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 0$

33. **(a)** Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola.

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

(b) Encuentre las coordenadas XY y xy del centro, vértices y focos.
(c) Encuentre las ecuaciones de las asíntotas en coordenadas XY y xy.

34. **(a)** Use rotación de ejes para demostrar que la siguiente ecuación representa una parábola.

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

(b) Encuentre las coordenadas XY y xy del vértice y foco.
(c) Encuentre la ecuación de la directriz en coordenadas XY y xy.

35. De las ecuaciones

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi$$
$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$$

despeje X y Y en términos de x y y. [*Sugerencia:* Para empezar, multiplique la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\operatorname{sen}\phi$, y a continuación sume las dos ecuaciones para despejar X.]

36. Demuestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola al girar los ejes un ángulo de 45°. [*Sugerencia:* Primero convierta la ecuación a una que no contenga radicales.]

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

37. Forma matricial de Fórmulas para Rotación de Ejes
Sean Z, Z' y R las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Demuestre que las Fórmulas para Rotación de Ejes se pueden escribir como

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{-1}Z$$

38. Invariantes algebraicas Una cantidad es invariante bajo rotación si no cambia cuando los ejes son girados. Se indicó en el texto que, para la ecuación general de una cónica, la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.
(a) Use las fórmulas para A', B' y C' de la página 760 para demostrar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación; esto es, demuestre que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

(b) Demuestre que $A + C$ es invariante bajo rotación.
(c) ¿La cantidad F es invariante bajo rotación?

39. Invariantes geométricas ¿Espera usted que la distancia entre dos puntos es invariante bajo rotación? Demuestre su respuesta al comparar la distancia $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$ donde P' y Q' son las imágenes de P y Q bajo una rotación de ejes.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Gráficas por computadora II**

En este proyecto investigamos la forma en que se usan matrices para girar imágenes en una pantalla de computadora. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

11.6 ECUACIONES POLARES DE CÓNICAS

Una descripción geométrica unificada de cónicas ▶ Ecuaciones polares de cónicas

▼ Una descripción geométrica unificada de cónicas

Ya antes en este capítulo definimos una parábola en términos de un foco y directriz, pero definimos la elipse e hipérbola en términos de dos focos. En esta sección damos un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas en términos de un foco y directriz. Si colocamos el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar sencilla. Además, en forma polar, la rotación de cónicas se convierte en un asunto muy sencillo. Las ecuaciones polares de elipses son cruciales en la deducción de las Leyes de Kepler (vea página 754).