FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Secciones Cónicas

Patricia Có

-2018-

Agradezco a los Profesores Mariel Ugarte y Raúl Katz por la revisión del presente material, a la Srta. María Virginia Frontini y al Sr. Santigo Brun por su colaboración en la elaboración de las respuestas de los ejercicios propuestos.

Ante la detección de cualquier tipo de error u omisión, tanto en el desarrollo de la propuesta como en las respuestas de los ejercicios, agradeceré comunicarla a la dirección: co@fceia.unr.edu.ar.

Secciones Cónicas

En esta unidad trabajaremos con curvas que fueron descubiertas por geómetras de la antigua Grecia, denominadas secciones cónicas o cónicas.

Las primeras definiciones de secciones cónicas fueron tratadas por el filósofo griego Menecmo, aproximadamente en el año 350 a. c. al estudiar uno de los tres problemas clásicos griegos: "duplicar el cubo"[1] (los otros dos se refieren a la cuadratura de un círculo y la trisección de un ángulo). Este problema consiste en construir (utilizando sólo regla y compás) un cubo de doble volumen que otro dado, lo que unos 2200 años más tarde se comprobó que era imposible. En la búsqueda de la solución al problema, Menecmo planteó la necesidad de encontrar la intersección de dos curvas (actualmente llamadas parábola e hipérbola), que refieren a las secciones que se obtienen al cortar un cono con un plano. Toda sección cónica propiamente dicha puede describirse como intersección de un cono circular recto de doble hoja con un plano que no pase por el vértice del cono. Dependiendo el nombre de la curva intersección: circunferencia, elipse, parábola o hipérbola, del ángulo que forme dicho plano con la recta que contiene al eje del cono (Figura 1).

La mayor parte de su trabajo sobre las secciones cónicas se ha perdido, aunque por los fragmentos que se tienen se puede deducir que investigó sus propiedades con bastante detalle, sin embargo no se conoce cómo trazaba estas figuras planas.

Apolonio de Perga resumió el conocimiento anterior a él y lo amplió en un famoso tratado de ocho volúmenes (262-190 a. de C). Hubo que esperar unos 1900 años, en los inicios del siglo XVII, para que las importantes aplicaciones de las cónicas quedaran puestas de manifiesto y éstas jugaran, de hecho, un papel preponderante en el cálculo, como por ejemplo, cuando Kepler demostró que las órbitas de los planetas son elípticas.

Puede resultarte muy enriquecedor mirar el video https://www.youtube.com/watch?v=d0ZCyOFW3YE, que es una realización visual publicada por el Dpto. de Matemática Educativa del CINVESTAV, México.

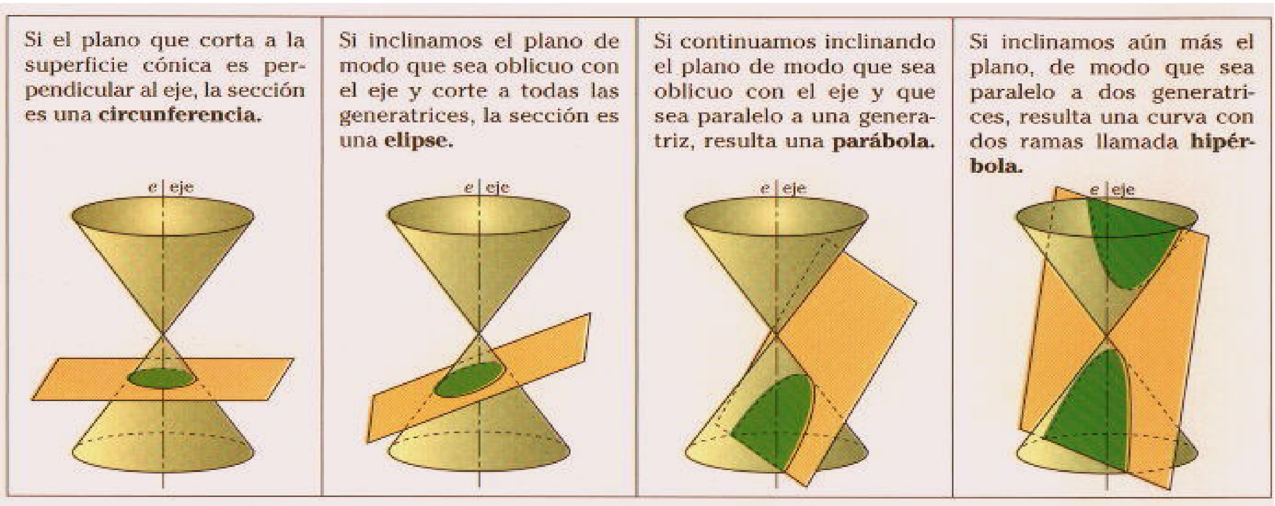


Figura 1

Actividad 1

1. Investiga cuál es la posición relativa del plano respecto del cono para obtener un punto, una recta o dos rectas. Realiza una gráfica de cada situación.
2. Indaga brevemente la bibliografía de Menecmo, Apolonio de Persa y Kepler utilizando los hipervínculos señalados en cada caso.
3. El siguiente video https://www.youtube.com/watch?v=XVl_9pbXkBs es una parte de la película Agora que refiere históricamente al contenido tratado.

[1] ver al respecto: http://www.arrakis.es/~mcj/clasicos.htm - http://www.astroseti.org/articulo/4152/

Los griegos comenzaron definiendo las secciones cónicas en términos de intersecciones de planos con conos, pero también pueden definirse teniendo en cuenta diversos aspectos desde otras ramas de la matemática: como la geometría analítica (que desarrollaremos en este curso), la geometría proyectiva, etc.

En la geometría lineal del plano y del espacio hemos considerado con detalle ecuaciones lineales en dos variables de la forma $ax+by+c=0$ y $ax+by+cz+d=0$, que correspondes a rectas en R^2 y planos respectivamente. Nos proponemos ahora estudiar el conjunto de puntos definidos por ecuaciones en las mismas variables, pero de segundo grado. Una ecuación de ese tipo debe contener al menos uno de los términos de segundo grado x^2, xy o y^2, puede tener (no necesariamente) un término de primer grado en las variables x e y y otro término independiente.

Una ecuación de segundo grado en las variables x e y es de la forma:

$$\boxed{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0} \quad (1)$$

donde por lo menos uno de los coeficientes A, B o C es distinto de cero. A (1) se la llama ecuación general de segundo grado.

La pregunta:

¿Qué representación geométrica tiene una ecuación de segundo grado?

es la que guiará el desarrollo del presente material.

Para realizar las gráficas de ecuaciones recomendamos utilizar algún software, graficador online o aplicación, dependiendo del dispositivo que utilices. Hay una larga lista de opciones que se actualizan a diario, por lo que sólo nombramos algunas de ellas.

Si utilizas una computadora puedes elegir alguno de los siguientes software para Windows (libres y gratuitos que puedes descargar de la página indicada): GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/es/) o Maxima (http://maxima.sourceforge.net/es/), o utilizar un graficador online como Wolfram Alpha (http://www.wolframalpha.com/), Symbolab (https://es.symbolab.com), Mathway (https://www.mathway.com) y muchos más.

Si prefieres trabajar con un dispositivo móvil: tablet o celular, existen las versiones para Android de GeoGebra o Maxima, o elegir entre una gran cantidad de aplicaciones disponibles desde Google Play, como por ejemplo: GeoGebra, Calculus Tools, Wolfram Alpha, Mathway, etc.

Si no estás familiarizado con ninguno recomendamos elegir GeoGebra en cualquiera de sus versiones ya que es el se utilizará en este apunte.

Actividad Opcional: **Explorando formas con software**

a) Utiliza alguno de los recursos antes mencionados para realizar las gráficas de las siguientes ecuaciones

1) $x^2+4y^2+4xy+12=0$	2) $16y^2-9x^2+36x-180=0$
3) $9x^2+16y^2+24xy+80x-60y=0$	4) $x^2+4x+4y^2+32y+67=0$
5) $xy+x-2y=-3$	6) $-2x^2+2y^2+3xy-x-3y+1=0$
7) $x^2+6x+2y+5=0$	8) $9x^2+4y^2-36x+8y+31=0$
9) $2x^2+2y^2+4xy-8x-8y+8=0$	10) $x^2-9y^2+2x-2y-35=0$
11) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$	12) $4x^2-16x-y^2+16=0$
13) $2x^2-2xy+18y^2+x-3y-6=0$	14) $xy=1$

b) Agrupa las ecuaciones que tienen "formas parecidas".

c) Investiga si es posible establecer una relación entre las gráficas pertenecientes a un mismo grupo con los coeficientes de sus respectivas ecuaciones. Explica brevemente el criterio utilizado.

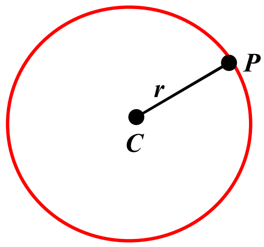
Circunferencia 1

1.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA CIRCUNFERENCIA

Una ***circunferencia*** es el lugar geométrico de los puntos ***P*** de un plano que equidistan de otro punto fijo ***C***, llamado ***centro***, en una cantidad constante ***r***, llamada ***radio*** **(*r*** es un número real positivo ***).***

Si llamas Γ a la circunferencia de centro ***C*** y radio ***r***, puedes describirla

con notación de conjunto: $\Gamma(C,r)=\{P \;/\; d(C,P)=r\}$



1.2 Ecuación de la circunferencia

Al fijar un sistema de referencia de coordenadas cartesiano ortogonal, cada punto del plano tiene asociado un par de coordenadas cartesianas. Supón que el centro ***C*** tiene coordenadas *(a,b)* y considera un punto del plano ***P*** de coordenadas *(x, y)*. Se tiene que:

$$P(x,y)\in\Gamma(C,r)\Leftrightarrow d(C,P)=r\Leftrightarrow\left|\overline{CP}\right|=r$$

Si reemplazas $\left|\overline{CP}\right|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$ y elevas ambos miembros al cuadrado llegas a la ecuación:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (2)$$

Ecuación cartesiana de una circunferencia de centro ***C****(a,b)* y radio ***r***

La siguiente gráfica corresponde a una circunferencia de centro en ***C*** *(a,b)* y radio ***r***:

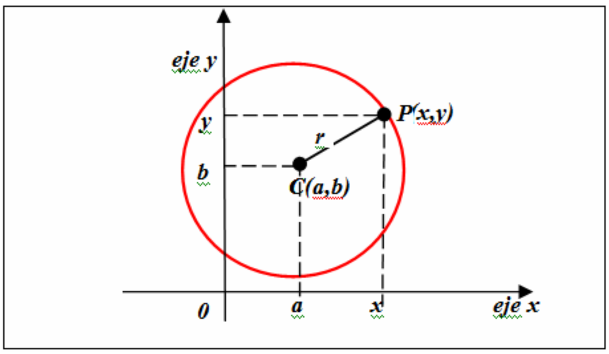


Figura 2

Si en particular, el centro de la circunferencia se encuentra en el origen de coordenadas, esto es $a=0,\ b=0$, la ecuación correspondiente es:

$$\boxed{x^2+y^2=r^2}$$

Ejemplo 1: Encuentra la ecuación de la circunferencia de radio 3, con centro en el punto de coordenadas (-1, 4) y luego represéntala gráficamente.

Sustituyendo en (2) *a = -1, b = 4* y *r = 3*, resulta: $(x+1)^2+(y-4)^2=3^2$

o equivalentemente $$x^2+y^2+2x-8y+8=0$$

La ecuación obtenida es de tipo (1), donde los coeficientes A y C son iguales entre sí, e iguales a 1 y además el coeficiente *B* es nulo.

Actividad 2: Representa gráficamente la circunferencia recién obtenida utilizando cualquier software matemático. En este apunte utilizamos GeoGebra.

Problema teórico:

¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la ecuación general de segundo grado (1)

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

para representar algebraicamente una circunferencia?

Si desarrollas la ecuación (2), obtienes la siguiente expresión:

$$\boxed{x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0} \quad (3)$$

que es una ecuación del tipo (3), donde: *B = 0, D =- 2a, E = -2 b* y *F* = $a^2+b^2-r^2$.

La ecuación (3), cumple las siguientes condiciones:

- es de segundo grado.
- los coeficientes de los términos de segundo grado son iguales.
- no tiene término rectangular (*B = 0*).

Estas tres **condiciones** son **necesarias** para que una ecuación de segundo grado (3) sea una circunferencia.

Ejemplo 2:

Dada la ecuación $x^2+y^2-2x+6y-90=0$, ¿corresponde a la ecuación de una circunferencia?, y en ese caso ¿cuál es su centro y radio?

¿Qué artificio algebraico puedes usar para que aparezca la suma de dos binomios al cuadrado en el primer miembro?

Vamos por pasos:

- agrupa los términos que contengan la misma variable, escribiendo la ecuación dada en la forma:

$$(x^2-2x)+(y^2+6y)-90=0$$

- completa cuadrados en la variable x, sumando y restando el número 1 a la expresión (x^2-2x), (nota que 1 es el cuadrado de la mitad del coeficiente de x).
- Procede de la misma forma con la expresión (y^2+6y), sumando y restando el número 9 (9 es el cuadrado de la mitad del coeficiente de y).
- La ecuación original es equivalente a:

$$(x^2-2x+1)-1+(y^2+6y+9)-9-90=0$$

agrupando términos se llega a la ecuación:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=100$$

que corresponde es una circunferencia de radio 10 y centro (1, -3).

Ejemplo 3:

Veamos si la ecuación $2\,x^2 + 2\,y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ representa a una circunferencia. Para ello, dividimos ambos miembros por 2 y obtenemos:

$$x^2 + y^2 + x - y - \frac{1}{2} = 0$$

completando cuadrados como en el ejemplo 2, obtenemos:

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$$

que representa a una circunferencia de centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y radio 1.

En este caso los coeficientes de los términos cuadráticos no valen la unidad, pero son iguales entre sí, podemos decir que:

Si la ecuación (3) es una circunferencia entonces:

$$A = C \neq 0, B = 0 \tag{4}$$

Ahora bien:

¿Es suficiente que una ecuación de segundo grado cumpla la condición (4), para que sea una circunferencia?

Para llegar a una respuesta realiza la siguiente actividad:

***Actividad 3*:** Completa cuadrados y determina si las siguientes ecuaciones de segundo grado tienen por gráfica a una circunferencia.

a) $x^2 + y^2 - 2x + y + 6 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$

¿Qué ha ocurrido en cada caso con el segundo miembro?, ¿qué representan cada una de estas ecuaciones?

Para obtener una respuesta de carácter general a la pregunta inicialmente planteada, aplicamos el mismo método de completar cuadrados a la ecuación dada en (5):

$$A\,x^2 + A\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2} + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 - \frac{E^2}{4A^2} + \frac{F}{A} = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

Para que esta ecuación sea una circunferencia de centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$, el segundo miembro debe ser el cuadrado del radio.

Para ello se deberá cumplir que: $\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0$.

Por lo expuesto y para dar respuesta al problema teórico inicialmente planteado se debe pedir que:

Una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + D\,x + E\,y + F = 0$ representa a una circunferencia si se cumple que:

$$D^2 + E^2 - 4AF > 0 \quad \text{y} \quad A = C \neq 0$$

En ese caso el centro de la circunferencia se encuentra en el punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$

y su radio está dado por la expresión $\sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}}$

***Actividad 4*:**

1) Halla la ecuación de la circunferencia de radio 2 y cuyo centro está en (0,3).

2) Encuentra la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en (1,6) y que contiene a (-2.2).

3) Halla la ecuación de la circunferencia de radio 4 que pasa por los puntos (-3,0) y (5,0).

4) Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (0,2), (4,0) y (2, -4).

5) Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (-1,1) y (2,3) y cuyo centro está situado en la recta $x+3y-11=0$.

6) Describe el conjunto de soluciones de $x^2+y^2+2x+4y=0$.

7) Describe el conjunto de soluciones de $3x^2+3y^2+2x+4y+4=0$.

8) Obtén la ecuación de la circunferencia tangente a ambos ejes, que contenga al punto (-8, -1). ¿Existe única solución?

9) Demuestra que para cualquier elección del número b, la ecuación $x^2+y^2-2by=1$ es la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos (1,0) y (-1, 0). ¿Dónde está el centro de esta circunferencia?

***Actividades con Software GeoGebra*:**
Ingresa en cada una de las páginas indicadas y realiza la actividad propuesta en cada una de ellas. Recomendamos ingresar con Mozilla Firefox y tener la versión de Java actualizada.
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c1_circunf_constr.html
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c2_circunferencias.html
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c3_circunferencia2.html

1.3 Recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos

¿Qué relación existe entre una recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos, llamémoslo ***Q***, con la recta determinada por el centro de la circunferencia y este punto ***Q?***
Realiza una gráfica que describa la situación planteada.

Ejemplo 4:
Queremos hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia con centro en el punto C (-1,-2) y de radio 5, en el punto Q (2,2). Obtén la representación gráfica de la circunferencia y la recta en un mismo sistema de referencia cartesiano ortogonal, utilizando primero lápiz y papel y luego un software matemático.

- Probemos que el punto Q (2,2) pertenece a la circunferencia calculando la distancia entre ese punto y el centro:

$$d\,(\,(2{,}2),(-1{,}-2)\,) = \sqrt{(2+1)^2+(2+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Como el resultado coincide con el valor del radio, afirmamos que el punto Q (2,2) pertenece a la circunferencia.

- Como el vector $\overline{CQ}$ =(3,4) es normal a la recta tangente, una ecuación de la misma es: $3x+4y+c=0$

- Usamos el punto de tangencia para determinar el valor del término independiente, obteniendo la ecuación:

$$3x+4y-14=0$$

Veamos cómo resolver el ejemplo anterior con el software ***GeoGebra*** siguiendo las siguientes instrucciones:

* escribe en el campo de entradas las coordenadas del centro (-1,-2) y luego pulsa *Enter*. Repite ingresando las coordenadas del punto de tangencia (2,2).

* obtiene la grafica la circunferencia que pasa por estos dos puntos. Para ello utiliza el botón de la barra de comandos y elige la opción **Circunferencia dados su Centro y uno de sus Puntos** Centro y un Punto de la Circunferencia, cliquea con el mouse sobre los dos puntos recién ingresados y aparecerá en la pantalla la circunferencia buscada.

* ingresa el vector (3,4) determinado por los dos puntos y luego mantén accionado el botón  desplazándolo de manera que su origen coincida con el centro de la circunferencia.

* por último grafica la recta tangente por el punto (2,2) utilizando la opción recta perpendicular, que se encuentra disponible cuando despliegas el cuarto botón  de la barra de comandos. Una vez accionado este botón selecciona con el mouse el vector y el punto de tangencia, y en la pantalla visualizarás la recta tangente buscada.

Observa que en la ventana algebraica, ubicada a la izquierda de la pantalla, aparece la ecuación de la recta, tal como se ve en la siguiente figura.

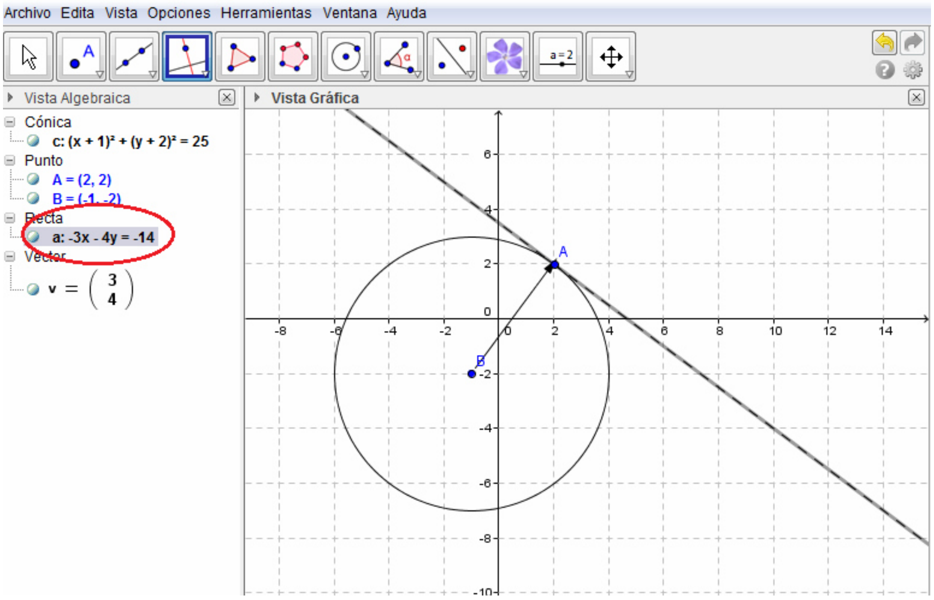


Figura 3

***Actividad 5*: Resuelve con lápiz y papel y luego verifica el resultado utilizando un software matemático.**

1) La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 5$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a esta circunferencia en (1, 0)?

2) Si la recta $y = x$ es tangente a una circunferencia en (3,3) y la recta $y = 2x$ pasa por el centro de misma; ¿cuál es la ecuación de dicha circunferencia?

3) Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas (-1,-4) y es tangente a la recta $-2x + 3y - 10 = 0$.

1.4 Intersección de recta y circunferencia

Para encontrar los puntos de intersección de una recta ***r*** y una circunferencia ***C*** necesitaremos resolver un sistema de ecuaciones en dos variables.

Recordemos que un sistema de ecuaciones lineales puede una solución, infinitas o ninguna.

¿Cuáles pueden ser las posibles soluciones al intersecar una recta y una circunferencia?

Actividad 6:

1) Halla la intersección de la recta $3y-4x+2=0$ y la circunferencia $(x+2)^2+(y-1)^2=4$. Representa gráficamente la recta y la circunferencia.

2) Dada la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=5$, determina los valores de k para los cuales la recta $x-2y+k=0$ resulta secante, tangente, o exterior a la circunferencia. Verifica la solución con software.

3) Dadas la recta y la circunferencia de ecuaciones $x+y-5=0$ y $(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$ ¿Cuánto debe valer el radio para que ambas figuras sean secantes?

1.5 Ecuaciones paramétricas de la circunferencia

Hasta aquí hemos trabajado con la ecuación cartesiana de la circunferencia. Ya utilizamos ecuaciones paramétricas, como por ejemplo para representar rectas. Ahora veremos cómo también se puede representar circunferencias utilizando un parámetro.

Si fijamos un sistema de referencia cartesiano ortogonal en el plano y consideramos el vector posición $\overline{OP}$ correspondiente a un punto ***P***, es posible representarlo mediante sus componentes de la forma:

$$\overline{OP}=\left(\left|\overline{OP}\right|\cos t,\left|\overline{OP}\right| sen\, t\right)$$

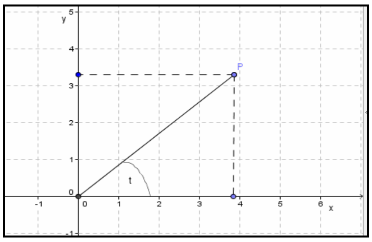


Figura 4

donde t indica el ángulo medido en radianes determinado por el semieje positivo de las ***x***, y la semirecta *OP*.

Dada una circunferencia de centro *C(0,0)* y radio ***r***, es sencillo ver que todo punto *P(x,y)* perteneciente a la misma,

tiene por coordenadas:

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\, sen t\end{cases} \text{ para un valor de } t\in[0,2\pi) \quad (5)$$

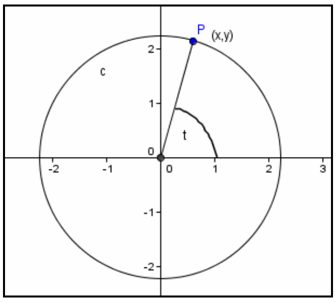


Figura 5

En una circunferencia de centro *C(a,b)* y radio ***r***, todo punto *P(x,y)* de la misma verifica que:

$$\overline{OP}=\overline{OC}+\overline{CP}$$

$(x,y)=(a,b)+(r\cos t,\ r\, sen\, t)$ para algún $t\in[0,2\pi)$

de donde: $$\begin{cases} x=a+r\cos t \\ y=b+r sen t\end{cases} \quad 0\le t<2\pi \qquad (6)$$

Análogamente, todo punto cuyas coordenadas verifiquen las ecuaciones (6) pertenece a una circunferencia de centro *C(a,b)* y radio ***r***.

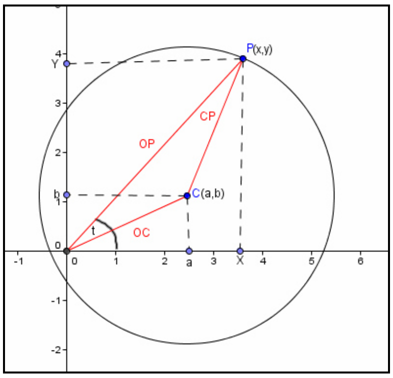


Figura 6

Las expresiones (5) y (6) reciben el nombre de ecuaciones paramétricas de una circunferencia, la primera con centro en (0,0) y radio r, y la segunda con centro *(a,b)*y radio ***r***.

Comprueba que todo punto de una circunferencia dada por su ecuación cartesiana satisface sus ecuaciones paramétricas y viceversa.

Actividad 7:

1) Determina las ecuaciones paramétricas de la circunferencia cuya ecuación cartesiana es $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 11$.

2) Encuentra una ecuación cartesiana y representa gráficamente la circunferencia dada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

a) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\,sen\,t \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$ *b)* $\begin{cases} x = -3 + 2\cos t \\ y = 2 + 2sent \end{cases}$ $0 \le t < 2\pi$

3) Grafica con lápiz y papel las curvas dadas por las siguientes ecuaciones y verifica tu respuesta con un software:

a) $\begin{cases} x + 1 = 2\cos t \\ y = 2 + 2sent \end{cases}$ $-\dfrac{\pi}{2} \le t < \dfrac{\pi}{2}$ b) $\begin{cases} x = 3 + 3\cos t \\ y = -2 + 3sent \end{cases}$ $\pi \le t < 2\pi$

Actividad complementaria:

1) Encuentra la ecuación de la circunferencia de radio 4, cuyo centro está en la recta $2x + 3y + 6 = 0$ y es tangente a la recta $3x + 4y + 12 = 0$. Para ver si hay más de una solución te sugerimos que representes gráficamente las ecuaciones implicadas en el problema.

2) Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, halla el valor de *a* de manera que la recta $y = 3x + a$, resulte

a) tangente   b) secante   c) no tenga puntos de contacto.

3) Halla la ecuación de una circunferencia inscripta en el triángulo cuyos vértices se encuentran en (5,4), (-15,-1) y (23/3, -20/3).

4) En una plaza de forma circular de radio 250 m se van a poner 7 faroles cuyas bases son círculos de un 1 m de radio, el resto de la plaza lo van a utilizar para sembrar césped. Calcula el área de la región cubierta por césped.

5) A un hexágono regular 4 cm de lado se le inscribe una circunferencia y se le circunscribe otra. Halla el área de la corona circular así formada.

6) En una circunferencia una cuerda de 48 cm dista 7 cm del centro. Calcula el área del círculo.

Parábola 2

El primero en usar el término parábola fue Apolonio de Perge en su tratado Cónicas, considerada obra cumbre sobre el tema. Es Apolonio quien menciona que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada hoy en día en las antenas satelitales. La parábola también fue estudiada por Arquímedes, nuevamente en la búsqueda de una solución para un problema famoso: la cuadratura del círculo, dando como resultado el libro Sobre la cuadratura de la parábola.

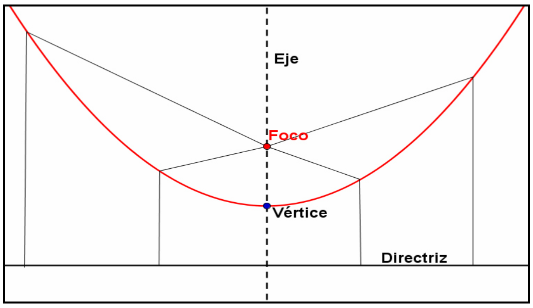
Comenzamos presentando la definición de parábola desde un punto de vista geométrico, para arribar luego a la ecuación algebraica.

2.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA PARÁBOLA

Una ***parábola*** es el conjunto de todos los puntos ***P*** del plano que equidistan de una recta fija ***d***, llamada ***directriz***, y de un punto fijo ***F***, llamado ***foco***, que no pertenece a ***d.***

La gráfica de una parábola Ƥ con directriz *d* y foco *F* puede describirse como el siguiente conjunto de puntos:

$$P(d, F) = \{P / d(P,d) = d(P,F)\}$$



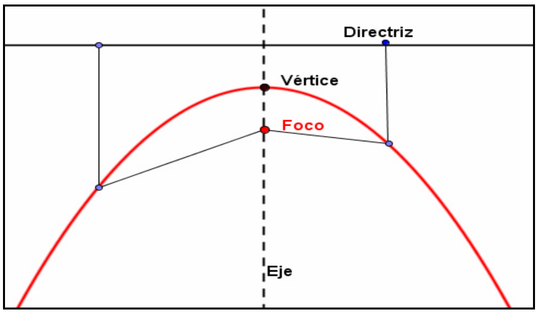


Figura 7

Se llama ***eje*** de la parábola a la recta que contiene al *foco* y es perpendicular a la *directriz,* y ***vértice*** al punto intersección de la parábola y el ***eje***.

***Actividades con GeoGebra*:**
Es posible visualizar la construcción de una parábola. Ingresa en cada una de las páginas indicadas y realiza las actividades propuestas.
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c12_parabola_constr.html
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c13_parabola_ecuacion.html

2.2 Ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y eje horizontal o vertical

Fijado el sistema coordenado cartesiano ortogonal usual, el lugar geométrico que estamos considerando queda caracterizado por el siguiente conjunto de puntos:

$$P(F, d) = \{P(x,y) / d(P,F) = d(P,d)\}$$

Comencemos considerando parábolas con *vértice* en el origen de coordenadas, *foco* en el punto ***F(0,p)***, *eje* vertical y *directriz* a la recta ***d)*** *y=-p*. La figura 8 muestra el caso en que *p>0*.

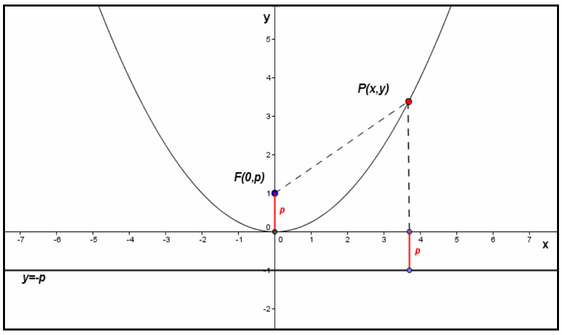


Figura 8

Sabemos que:

- La distancia del punto *P(x, y)* al punto *F(0,p)* es igual a $\left|\overline{PF}\right| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$
- La distancia del punto *P(x, y)* a la recta ***d)*** *y=-p* es igual a $|y + p|$

El punto *P(x, y)* pertenece a la parábola si:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y+p|$$

elevando ambos miembros al cuadrado, desarrollando binomios y agrupando términos, llegamos a la ecuación de la parábola:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2\,p\,y + p^2 = y^2 + 2\,p\,y + p^2$$

$$\boxed{x^2 = 4\,p\,y}$$

En este caso el ***eje*** de la parábola es el ***eje y***, que resulta ser un ***eje de simetría*** de la curva, ya que si reemplazamos *(x, y)* por *(–x, y)* la ecuación no cambia.

Podemos resumir que:

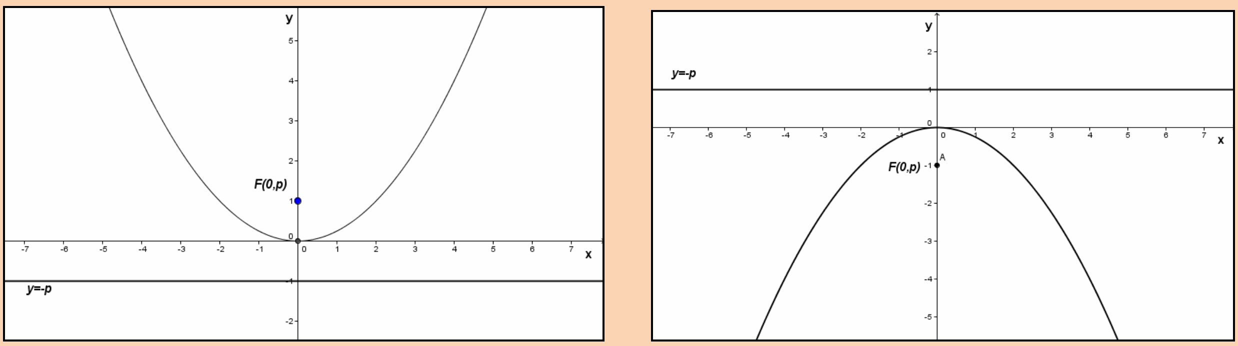
Parábola con vértice en (0,0) y eje focal vertical

Si $p \neq 0$, $\boxed{x^2 = 4\,p\,y}$ (7) es la ecuación canónica o reducida de una parábola con las siguientes propiedades:

* *foco* en el punto *F* de coordenadas (*0, p*)

* *directriz* recta ***d)*** de ecuación *y = - p*

* ramas hacia *arriba* si ***p>0*** y hacia *abajo* si ***p<0***



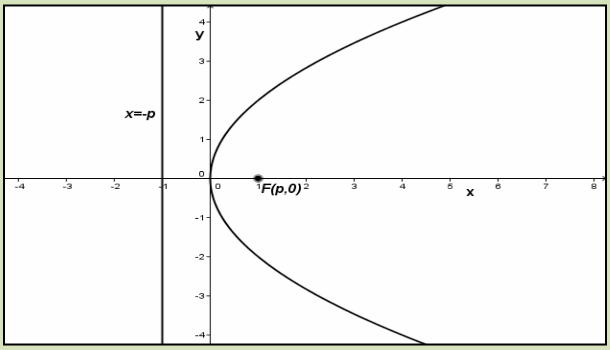
$x^2=4\,p\,y$ (p>0) *$x^2=4\,p\,y$ (p<0)*

Figura 9

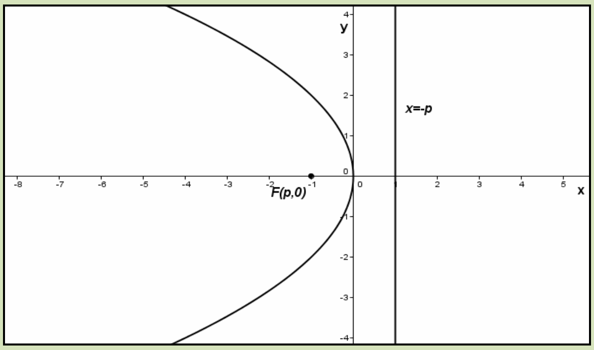
Hay cuatro posiciones posibles para una parábola con *vértice en (0,0)* y *foco* sobre uno de los ejes coordenados, de las cuales acabamos de describir dos.

***Actividad 8*: Parábola con vértice en (0,0) y eje focal horizontal**

Comprueba que la ecuación $\boxed{y^2 = 4\,p\,x}$ (8) $p \neq 0$, representa a una parábola con vértice en el origen de coordenadas y eje horizontal. Representa gráficamente el conjunto de puntos que verifican dicha ecuación y compáralas con las siguientes figuras.



y^2=4 *p x (p>0)*



y^2=4 *p x (p<0)*

Verifica que estas parábolas tienen las siguientes propiedades:

* *foco* en el punto *F* de coordenadas (*p, 0*)
* *directriz* recta ***d)*** de ecuación *x = -p*
* ramas hacia la *derecha* si ***p>0*** e *izquierda* si ***p<0***

Figura 10

Ejemplo 5:
Encontrar el foco y la directriz de la parábola $x^2 = 40\,y$.

De la ecuación deducimos que es una parábola con foco sobre el eje *y*, con *p = 10* y ramas hacia arriba. Por lo tanto el foco se encuentra en el punto (0, 10) y la directriz tiene ecuación *y = -10*.

Ejemplo 6:

Dados el foco *F* $(-\frac{1}{3}, 0)$ y la directriz $x = \frac{1}{3}$, encontrar la ecuación de la parábola.

Reemplazando p $= \frac{1}{3}$ en la ecuación (8), rápidamente encontramos que la ecuación buscada es: $\boxed{y^2 = -\frac{4}{3}x}$.

Llegaremos a la misma solución si buscamos todos puntos *P(x,y)* que definen a la parábola como lugar geométrico. Para cada uno de estos puntos se cumple que su distancia al foco es igual a su distancia a la recta directriz, esto es:

$$\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + y^2} = \left|x - \frac{1}{3}\right|$$

elevamos ambos miembros al cuadrado $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + y^2 = x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

simplificamos y obtenemos la misma ecuación $\boxed{y^2 = -\frac{4}{3}x}$.

Ejemplo 7:
Hallar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y foco en (2,0).

El eje de la parábola es horizontal, entonces la ecuación es de la forma: $y^2 = 4\,px$. Como la distancia del vértice al foco es 2, nos queda que: $y^2 = 8\,x$. Gráficamente:

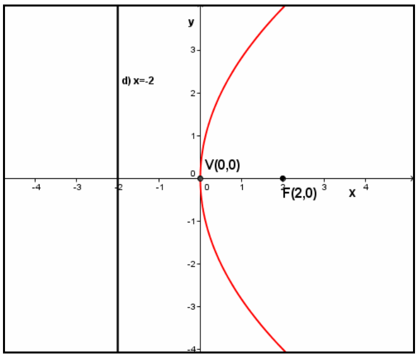


Figura 11

Actividad 9: Representa gráficamente las parábolas de los ejemplos 5 y 6 utilizando cualquier software matemático.

Actividad 10:

1) Determina las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz de cada parábola. Representa gráficamente cada una.

   a) $x^2 = 2y$ b) $y^2 = -4x$ c) $6x - y^2 = 0$ d) $x^2 = -24y$

2) Halla la ecuación de la parábola con la información dada en cada caso, teniendo en cuenta que el vértice está siempre en el origen de coordenadas. Representa gráficamente.

   a) foco en *(2, 0)* b) la directriz es la recta $x = 4$ c) la directriz es la recta $y = 3/2$

3) Halla la ecuación de la parábola cuyo foco es el punto $F(0, -4/3)$ y su directriz es la recta $y - 4/3 = 0$.

4) Dada la parábola $y^2 = 4x$ determina los puntos P de la misma, tal que la distancia de P al foco es igual a 4.

5) Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de la curva de ecuación $y^2 = x$ y la recta de ecuación $y = x - 2$.

6) Deduce las ecuaciones de las parábolas que tienen vértice en el origen, y focos $F_1(0, 1/8)$, $F_2(0,1/2)$, $F_3(0,1)$ y $F_4(0,4)$. Traza las gráficas de estas parábolas. ¿A qué conclusión puedes llegar?

7) Determina la ecuación de la parábolas cuyo vértice está en *(0, 0)* y contiene al punto *(2, 4)*. ¿Puede existir más de una solución?

2.3 Ecuación de la parábola con eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados

Queremos encontrar la ecuación de una parábola con eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados y vértice en un punto de coordenadas *(h,k)* (*h* y *k* no nulos a la vez).

¿Qué condiciones deben satisfacer las coordenadas de un punto *P(x, y)* para pertenecer a la gráfica de una parábola con eje vertical (horizontal) y vértice en (*h*,*k*)?
y en tal caso, ¿Cuáles son las coordenadas del foco y cuál es la ecuación de la directriz?

El siguiente gráfico nos ayudará a encontrar la ecuación buscada para el caso de eje vertical:

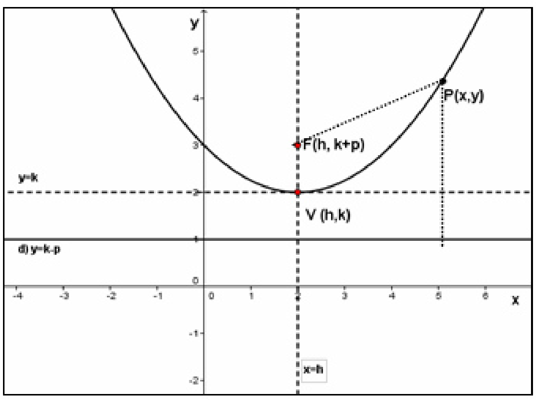


Figura 12

Sabemos que:

- Distancia de P a F = $\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}$ (distancia de un punto a otro)
- Distancia de P a $d = |y-(k-p)|$ (distancia de un punto a una recta)

Igualando: $$\sqrt{(x-h)^2+(y-k-p)^2}=|y-(k-p)|$$

elevando ambos miembros al cuadrado, agrupando y simplificando, llegamos a la ecuación $\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$

Se puede repetir un procedimiento análogo para el caso de eje horizontal. Podemos sintetizar que:

Parábola con vértice en *(h,k)* y eje focal vertical.

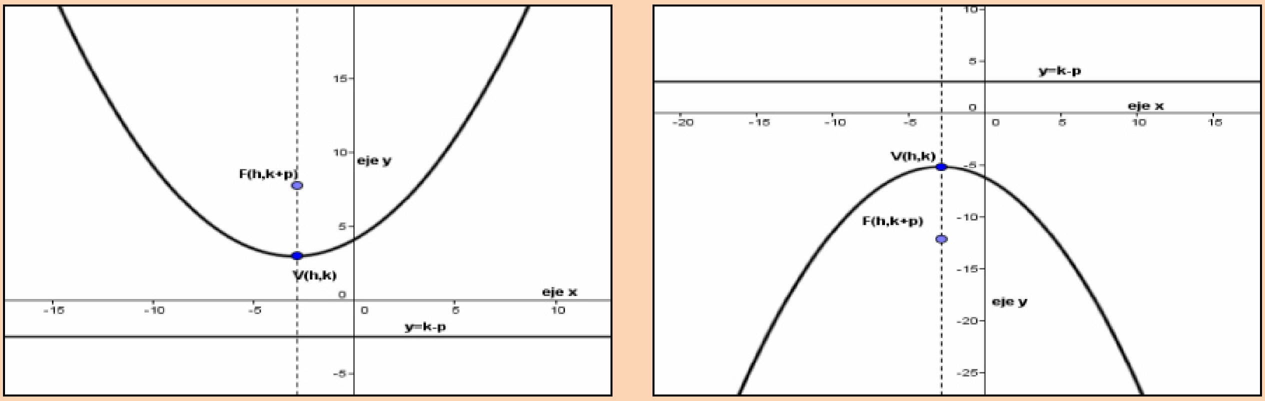
Si $p\neq 0$, $\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$ (9) es la ecuación canónica de una parábola con las siguientes propiedades:

* *vértice* en el punto *V* de coordenadas *(h,k)*

* *foco* en el punto *F* de coordenadas (*h, k+p*)

* *directriz* recta ***d)*** de ecuación *y = k-p*

* ramas hacia arriba si ***p>0*** y hacia abajo si ***p<0***

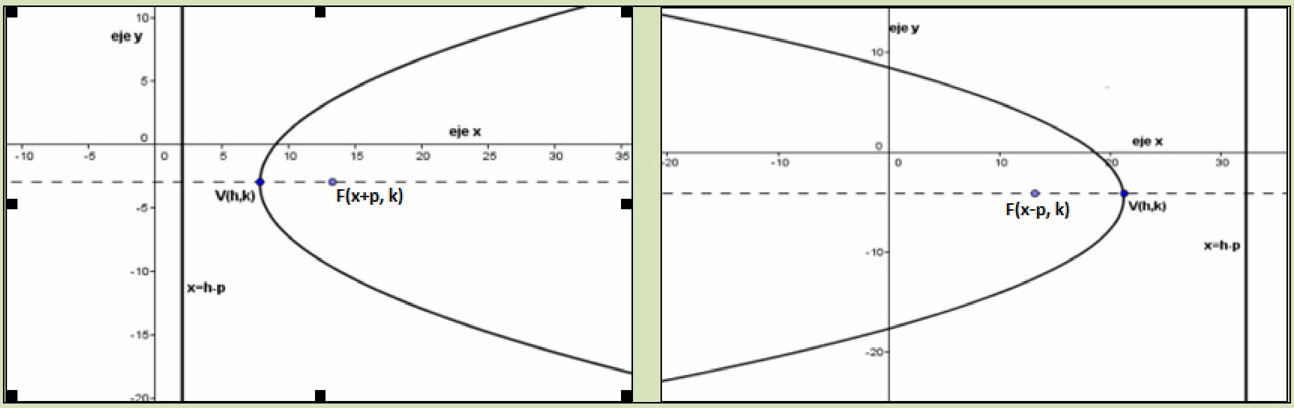


$(x-h)^2=4\,p(y-k)$ p>o *$(x-h)^2=4\,p(\,y-k)$ p<0*

Figura 13

***Actividad 11*: Parábola con vértice en *(h,k)* y eje focal horizontal**

Si $p\neq 0$, comprueba que la ecuación: $\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$ (10), representa a una parábola con vértice en el punto de coordenadas *(h, k)* y eje focal horizontal. Representa gráficamente el conjunto de puntos que verifican dicha ecuación y compáralas con las siguientes figuras.



$(y-k)^2=4\,p(x-h)$ p>o *$(y-k)^2=4\,p(x-h)$ p<0*

Verifica que estas parábolas cumplen con las siguientes propiedades:

* *vértice* en el punto *V* de coordenadas *(h, k)*

* *foco* en el punto *F* de coordenadas (*h+p, k*)

* *directriz* recta ***d)*** de ecuación *x = h-p*

* ramas hacia la derecha si ***p>0*** y hacia la izquierda si ***p<0***

Figura 14

***Ejemplo8*:**

Encontrar el foco de la parábola dada por la ecuación: $y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$

Si multiplicamos por *2* ambos miembros y completamos cuadrados llegamos a la ecuación: $(x+1)^2=-2(y-1)$.

Comparándola con la ecuación (9), concluimos que: $h=-1,\ k=1$ y $p=-\frac{1}{2}$.

Como *p<0*, las ramas de la parábola se abre hacia abajo, su foco tiene coordenadas (*h, k + p*) = (*-1,* $\frac{1}{2}$) y la directriz viene dada por la ecuación *y=3/2.* Su gráfica tiene el aspecto que muestra la *figura 15*.

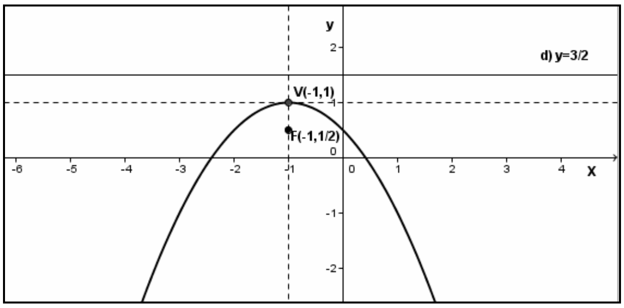


Figura 15

Actividad 12:

1) Halla vértice, foco y directriz de cada una de las siguientes ecuaciones y grafica cada parábola.

a) $y^2+4y+8x-12=0$ b) $-\frac{1}{4}(x+\frac{1}{2})^2=y$ c) $y^2=16x-9-2y$

d) $x^2-4x-8y+9=0$ e) $2x^2-4x-y+5=0$ f) $4y^2=3x-4+8y$

2) Deduce la ecuación de la parábola que verifica las condiciones dadas en cada ítem y representa gráficamente.

a) foco *F(0,4)* y directriz *y = 0*. b) foco en *F(7,2)* y directriz *x-5=0*.

c) foco *F(4,3)* y directriz *y = 5*. d) vértice en *(-1,2), eje* paralelo al eje *x*, *p=-1*

e) vértice en (2,2), *eje* paralelo al eje *x*, *p=2*. f) vértice en *(0,1)*, *eje* paralelo al eje *y*, *p=-3/8*.

3) Encuentra y representa gráficamente la parábola que verifica que su eje de simetría es paralelo al eje *x* y contiene a los puntos (*4, -2*), (*0,0*) y (*3, -3*).

Volvemos a pensar el problema teórico planteado para circunferencia:

¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la ecuación general de segundo grado (1)

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

para representar algebraicamente una parábola con eje paralelo a uno de los ejes coordenados?

Veamos qué similitudes encontramos en los desarrollos de cada una de las ecuaciones:

$$(x-h)^2=4p(y-k) \quad (10) \qquad \text{y} \qquad (y-k)^2=4p(x-h) \quad (11)$$

desarrollando (10) y (11):

$$x^2-2xh+h^2=4py-4pk \Leftrightarrow x^2-2hx-4py+(h^2+4pk)=0$$

$$y^2-2ky+k^2=4px-4ph \Leftrightarrow y^2-4px-2ky+(k^2+4ph)=0$$

En ambos casos observamos que:

- tienen un solo término de segundo grado. En la primera *C=0* y en la segunda *A=0*.
- no tiene término rectangular (*B = 0*).

Podemos decir que:

Para que la ecuación (1) represente a una parábola con eje paralelo a alguno de los ejes coordenados, es necesario que:

$$A = 0 \text{ y } B = 0 \quad \text{o} \quad C = 0 \text{ y } B = 0$$ (12)

Ahora bien:

¿Es suficiente que una ecuación de segundo grado cumpla la condición (12), para que sea una parábola?

Para llegar a una respuesta realiza la siguiente actividad:

Actividad 13:

1) Investiga cuáles de las siguientes ecuaciones tienen por gráfica a una parábola.

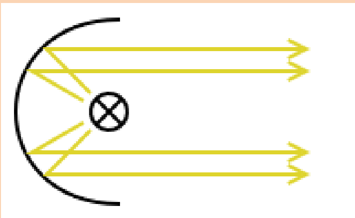
a) $2x^2 + x - 15 = 0$ b) $y^2 - 4y + 4 = 0$ c) $x^2 + 12 = 0$ d) $5y^2 - 20y - 3x + 20 = 0$

2) Verifica que una ecuación de tipo (3) con $B=C=0$, esto es: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a una parábola con vértice en el punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A}, \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\right)$ y tiene como eje de simetría la recta de ecuación: $x = -\frac{D}{2A}$

Algunas propiedades y aplicaciones de las parábolas

Una de las propiedades más utilizadas de la parábola es la de reflexión. En Física, una superficie se dice reflectora si en cualquier punto los ángulos que forman un rayo incidente y uno reflejado con la normal son iguales. Es decir si el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Si pensamos en una parábola como la sección transversal de un ***espejo parabólico***, un rayo de luz que proceda del foco de la parábola se refleja siguiendo una línea paralela al eje. Así, un reflector parabólico refleja la luz en forma de haz de rayos paralelos. Recíprocamente, la luz que llega al reflector parabólico en forma paralela al eje de simetría, se concentra ene le foco.



En el sitio ***http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c15_foco_parabola.html*** puedes acceder en forma dinámica e interactiva a lo recién descripto.

Estas propiedades son la base para la construcción de los faros de automóviles, telescopios reflectores y espejos parabólicos en los telescopios.

La trayectoria de un proyectil también describe una parábola. Puedes visualizarlo en ***http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c26tiro_parabolico.htm***.

Una aplicación más de las parábolas, aunque secundaria, se encuentra en las órbitas de los cometas. A cierta distancia del Sol, existe una velocidad umbral llamada velocidad de escape. Cuando un cometa tiene esa velocidad o una mayor, escapa del sistema solar; si su velocidad es menor, permanece dentro del campo gravitacional del Sol. El trayecto del cometa es parabólico si su velocidad es igual a la velocidad de escape. En éste caso el cometa se acerca al Sol una sola vez y se retira hacia el espacio para nunca volver.

También se forman parábolas en ciertas aplicaciones técnicas. Cuando se cuelga un puente de un cable, es preferible distribuir de manera uniforme el peso del puente y en ese caso el cable toma la forma de una parábola. Los arcos parabólicos tienen mayor resistencia que otras formas; razón por la cual los puentes de arco de concreto se construyen muchas veces en forma de parábola.

Otro ejemplo que nos será de mucha utilidad más adelante, es la superficie engendrada al girar una parábola en torno a su eje. ¿Te imaginas la forma de esta superficie? ¿Qué nombre te parece que puede tener? ¿Tienes presente alguna construcción edilicia con esta forma? Si no reconoces ninguna consulta el tema en internet.

Puede resultar interesante ver distintos ejemplos de parábolas presentes en la naturaleza y en la vida diaria en: ***http://www.youtube.com/watch?v=TU9rATRLmeU***

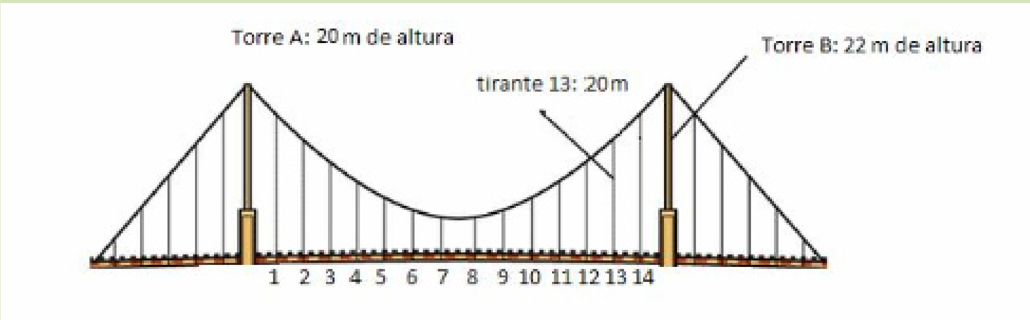
Actividad complementaria

1) Un faro de automóvil tiene un reflector parabólico de 20 cm de diámetro y 10 cm de profundidad. ¿A qué distancia del vértice debe colocarse el foco luminoso?

2) Un faro (o baliza) emplea un reflector parabólico de 1 m de diámetro. ¿Qué profundidad debe tener para que la fuente luminosa se coloque a media distancia entre el vértice y el plano de la orilla al borde?

3) Un cometa procedente del "espacio profundo" se acerca al Sol siguiendo una órbita parabólica (el sol se encuentra en el foco de la parábola). Cuando está a 100 millones de millas del Sol (más o menos la distancia de la Tierra al Sol), la línea que une al Sol y al cometa, forman un ángulo de 60º con el eje de la parábola. ¿Cuál será la distancia mínima entre el Sol y el cometa? (Sugerencia: el punto de una parábola más cercano al foco es el vértice. Usa la definición de una parábola y no una ecuación de la forma estándar)

4) Se ha decidido diseñar un puente colgante como se ve en la figura:



Si sabemos que el cable superior tiene forma parabólica, conocemos la altura de las dos torres y de uno de los tirantes, y sabemos que la distancia de torre a torre es de 120 m, con distancias entre tirantes iguales, ¿cuál sería la altura para cada uno de los tirantes que se encuentran entre las dos torres?

5) Las torres de un puente colgante están a 500 pies de distancia y salen a 100 pies sobre la superficie de la carretera. Los cables principales, o portantes entre las torres (llamadas pilones u horcas) llegan a 10 pies de altura de la carretera, en el centro del puente, y hay cables verticales de suspensión, que se llaman péndolas, cada 10 pies. Calcula las longitudes de las péndolas a intervalos de 50 pies.

6) Verifica que las ecuaciones paramétricas de una parábola con vértice en el punto (h,k) y eje focal horizontal, de ecuación $(x-h)^2 = 4p\ (y - k)$, están dadas por el sistema $\begin{cases} x = \dfrac{1}{4p}t^2 \\ y = k + t \end{cases}$ $t \in \Re$. ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas si el eje focal es vertical?

7) Determina las ecuaciones paramétricas del arco de la parábola de ecuación $y^2 = -4x$ comprendido entre los puntos *(0,0)* y *(-9,6)*.

8) Busca problemas o aplicaciones relacionados con el tema y compártelos con tus compañeros

Elipse 3

Según el modelo aristotélico, durante dos mil años se creyó que los planetas se movían en órbitas circulares alrededor de la Tierra, fue en el siglo XVII que Kepler demostró que las órbitas son elípticas y que el Sol está en uno de los focos.

Comenzamos presentando la definición de elipse desde un punto de vista geométrico, para arribar luego a la ecuación algebraica.

3.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA ELIPSE

Una ***elipse*** es el conjunto de todos los puntos ***P*** del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos $\boldsymbol{F_1}$ y $\boldsymbol{F_2}$ es constante. Esos dos puntos se llaman ***focos*** de la elipse y la distancia entre ellos se llama *distancia focal*.

La gráfica de una elipse ***E*** con focos F_1 y F_2 puede describirse como el siguiente conjunto de puntos (por comodidad llamamos *2a* a la suma de las distancias del punto a los focos):

$$E(F_1,F_2)=\{P/d(P,F_1)+d(P,F_2)=2\text{a}\}$$

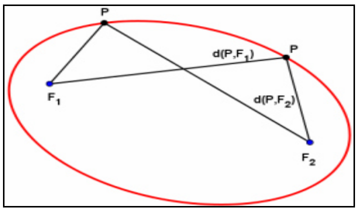


Figura 16

Una elipse puede construirse por varios métodos. Uno muy sencillo (llamado "método del jardinero") consiste en tomar una cuerda de longitud *2a* y fijar con estacas sus extremos en dos puntos del terreno (F_1 y F_2), y con un movimiento continuo extender la cuerda manteniéndola tensa hasta dar un giro completo.

***Actividad 14*:**

1) Traza una elipse, tan exactamente como puedas, en el pizarrón de clase. ¿Cómo te ayudarías con una soga y dos compañeros para lograrlo?

2) Repite el proceso en una hoja de papel. ¿Qué ocurre cuando la distancia entre los focos es muy grande? y ¿Cuándo es muy pequeña?

3) Visualiza una animación de esta construcción ingresando a:

http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c4_elipse_constr.html

3.2 Ecuación de la elipse con centro en el origen de coordenadas y eje focal horizontal o vertical

Fijado el sistema coordenado cartesiano usual, el lugar geométrico que estamos considerando queda caracterizado por el siguiente conjunto de puntos:

$$E(F_1,F_2)=\{P(x,y)/d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}$$

Queremos representar a una elipse como el conjunto de soluciones de una ecuación, tal como lo hicimos con circunferencia y parábola. Para obtener una ecuación más sencilla, colocamos los focos sobre el eje *x* en $F_1\ (-c,0)$ y $F_2\ (c,0)$, de manera que el origen de coordenadas esté ubicado a la misma distancia entre ellos. En este caso $\left|\text{F}_1\text{F}_2\right| = 2\text{c}$

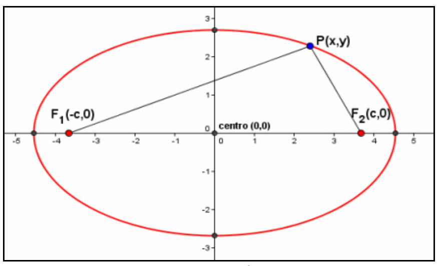


Figura 17

- La distancia del punto $P(x,y)$ al foco $F_1(c,0)$ es igual a $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

- La distancia del punto *P(x, y)* al foco *F_2(-c,0)* es igual a $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$
- Si *P(x ,y)* es un punto de la elipse, debe cumplir que: $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$

O sea: $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2\,a$$

trabajando algebraicamente llegamos a: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

Observemos el triángulo determinado por los punto *F_1(-c,0), F_2(c,0)* y *P(x,y)* de la *figura 17*. La distancia entre los focos es $2c$ y la suma de las longitudes de los otros dos lados es $2a$. Como la longitud de un lado de un triángulos es menor que la suma de los otros dos, tenemos que: $2c<2a$, o $c<a$, entonces $a^2-c^2>0$, lo que nos permite reemplazar a^2-c^2 por un número positivo, por ejemplo: b^2, es decir $b^2=a^2-c^2$, llegando a la ecuación

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Si dividimos ambos miembros por a^2b^2 obtenemos la ecuación de la elipse $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ (13)

Es inmediato ver que si el punto *P(x, y)* pertenece a la elipse (verifica su ecuación), los puntos *P_1(-x, y), P_2(-x,- y)* y *P_3(x,- y)* también pertenecen a la curva. Esto permite afirmar que los ejes coordenados son ***ejes de simetría*** de la curva, y el origen de coordenadas es ***centro de simetría***. En particular al eje que contiene a los focos se lo llama ***eje focal***.

Verr

Para representar gráficamente la curva conviene conocer las intersecciones con los ejes coordenados. Al hacer *y*=0 obtenemos $\frac{x^2}{a^2}=1$, de donde $x^2=a^2$ o $x=\pm\,a$. Esto dice que la gráfica cruza al eje *x* en los puntos de coordenadas *(-a,0)* y *(a,0)*. A estos puntos se los llaman ***vértices*** y al segmento que los une, cuya longitud es ***2a***, ***eje mayor.*** De la misma forma, si hacemos *x=0*, obtenemos $y=\pm b$, de donde sale que la curva cruza al eje *y* en los puntos de coordenadas *(0,-b)* y *(0,b)*. El segmento que los une se llama ***eje menor*** y mide **2b.** Como *a* > *b*, el eje mayor es más largo que el eje menor.

Podemos resumir que:

Elipse con centro en (0,0) y eje focal horizontal

Con $b^2=a^2-c^2\ (b<a)$, $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$(13), es la ecuación canónica o reducida de una elipse que cumplen con las siguientes propiedades:

* *centro* en el punto *C* de coordenadas *(0,0)*
* *focos* en los punto F_1 y F_2 de coordenadas(-*c, 0*) y*(c,0)*, $b^2=a^2-c^2$
* *vértices* en *(-a,0)* y *(a,0)*
* *eje mayor horizontal* de longitud *2a*
* *eje menor vertical* de longitud *2b*

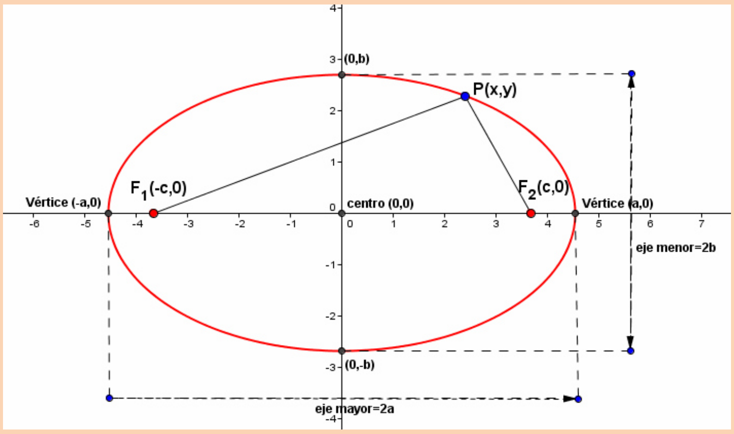
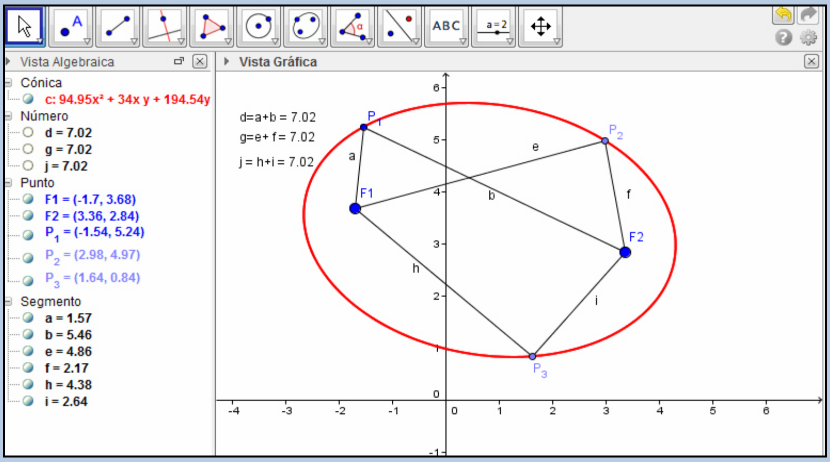


Figura 18

El software GeoGebra brinda de forma sencilla la posibilidad de graficar elipses. Para ello debemos desplegar el botón , ubicado en la barra de herramientas, y elegir la opción *elipse*, para luego marcar con el mouse tres puntos sobre la pantalla, los dos primeros representan los focos y el tercero un punto cualquiera d la elise. En la siguiente figura se muestra que la suma de las distancias de culaquier punto de la elipse a los focos es simepre la misma, en este caso 7.02.

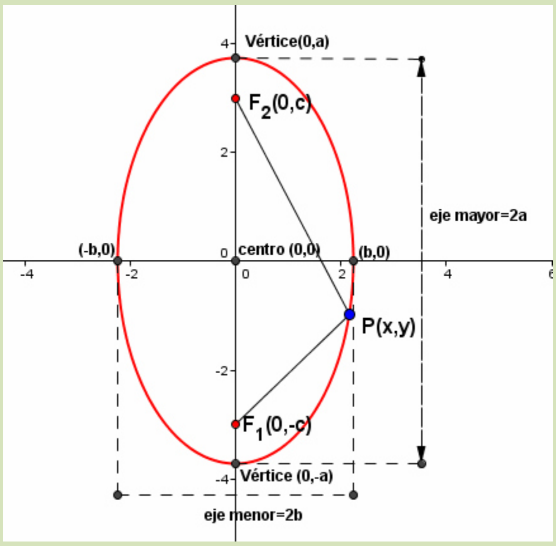


GeoGebra brinda la posibilidad de recrear construcciones de elipses siguiendo diferentes métodos. Los siguientes link nos muestran algunas de ellas:
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c4_elipse_constr.html
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c18_elipse_envolvente.htm(como envolvente)
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c20_elipse_hipotrocoide.htm(como hipotrocoide)
http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c23_elipse_construccion7.htm(el compás de Arquímedes)

***Actividad 15:* Elipse con centro en *(0,0)* y eje focal vertical**

1) Con $b^2 = a^2 - c^2$, comprueba que $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ (14) es la ecuación canónica o reducida de una elipse con centro en *(0,0)* y focos sobre el eje *y*.

Representa gráficamente el conjunto de puntos que verifican dicha ecuación y compárala con la siguiente figura.



Verifica que la elipse tiene las siguientes propiedades:

**focos* en los puntos F_1 y F_2 de coordenadas $(0, -c)$ y $(0, c)$
* *vértices* en los puntos de coordenadas $(0, -a)$ y $(0, a)$
* *eje mayor vertical* de longitud $2a$
* *eje menor horizontal* de longitud $2b$

2) Justifica que la gráfica es simétrica con respecto a los ejes coordenados y al origen de coordenadas

Figura 19

Ejemplo 9: Hallar los focos y los vértice de la elipse de ecuación $4x^2 + 9y^2 = 36$. Obtener su representación gráfica.

Dividimos ambos miembros de la ecuación por 36, llegando a: $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$. Podemos afirmar que se trata de una elipse con focos sobre el eje *x*, vértices en $(\pm 3{,}0)$.Para determinar los focos utilizamos que $b^2 = a^2 - c^2$; de donde $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$

Por lo tanto los focos se encuentran sobre el eje *x* y tienen coordenadas $(\pm\sqrt{5}{,}0)$

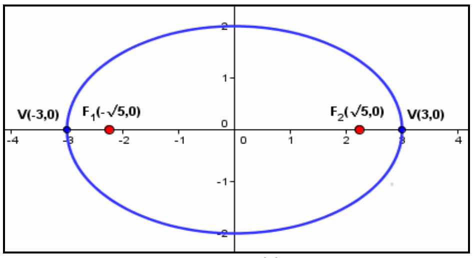


Figura 20

Ejemplo 10: Encontrar la ecuación de la elipse con focos en los puntos (-1,0) y (1,0) y semieje mayor igual a 3.

Veamos dos formas posibles de resolución:

Por los datos sabemos que *a = 3* y *c = 1*, por lo que el semieje menor es $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8}$.

La ecuación buscada es $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

Otra manera de encontrar la solución es utilizando definición de elipse "cualquier punto *P(x,y)* debe verificar que la suma de las distancias de *P* a los focos es igual a 2*a*", esto es: $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 6$

Elevando al cuadrado ambos términos: $(x-1)^2 + y^2 + (x+1)^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 36$

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 17 - x^2 - y^2$$

Elevando otra vez al cuadrado y simplificando obtenemos una ecuación equivalente: $\boxed{8x^2 + 9y^2 = 72}$.

Actividad 16: Representa gráficamente las elipses de los ejemplos *9* y *10* utilizando cualquier software matemático.

3.3 DEFINICIÓN DE EXCENTRICIDAD

El número $e = \frac{c}{a}$ recibe el nombre de excentricidad, siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Se puede demostrar que la forma de una elipse depende del cociente $\frac{c}{a}$.

Actividad 17:

1) Comprueba que todo punto *P(x,y)* perteneciente a una elipse verifica las desigualdades: $\frac{x^2}{a^2} \le 1$ *y* $\frac{y^2}{b^2} \le 1$, de lo que resulta: $|x| \le a$, $|y| \le b$, esto dice que la gráfica de la elipse se encuentra completamente dentro del rectángulo determinado por las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$.

2) Verifica que $\boldsymbol{0 < e < 1}$.

3) ¿Qué *"forma"* toma una elipse si *c* es casi igual a *a?*, y ¿si *c* es cercana a 0? ¿Podemos decir que la excentricidad es una medida del *"estiramiento"* de la elipse?

4) Propón algunos ejemplos que muestren las distintas formas que toman las gráficas de elipses según los valores de *c*.

Ejemplo 11: Deducir la ecuación de una elipse con focos en (0, -8) y (0,8) y excentricidad *e=4/5*.

De los datos sabemos que *c=8* y *e=4/5*. Entonces: $\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \Leftrightarrow a = 10$

para calcular b utilizamos que: $c^2 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow b^2 = a^2 - c^2$,

reemplazando llegamos a que $b=6$, por lo que la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

Calculamos las intersecciones con ambos ejes coordenados, obteniendo los puntos $(\pm 6{,}0)$ *y* $(0,\pm 10)$ y su gráfica tendrá el siguiente aspecto:

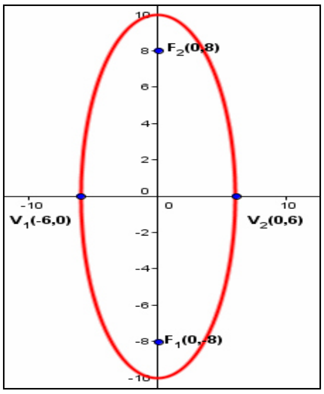


Figura 21

Actividad 18:

1) Para cada una de las siguientes elipses determina las medidas del eje mayor y la del semieje menor, las coordenadas de los vértices, focos y la excentricidad. Realiza las gráficas.

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $16x^2 + y^2 = 64$ c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

2) Encuentra la ecuación de la elipse según las condiciones que se dan en cada caso. Realiza la gráfica de cada una y verifica las mismas con un software matemático.

a) pasa por el punto $P(\frac{\sqrt{7}}{2},3)$, eje mayor está sobre *eje x* y su longitud es el doble de la de su eje menor.

b) Vértices (0, $\pm$ 8), excentricidad 3/5.

c) Centro en el origen de coordenadas, ejes en los ejes coordenados y pasa por los puntos (-1, 4) y ($\sqrt{3}$,2).

d) Longitud del eje mayor 4, longitud del eje menor 2, focos en el eje *y*.

e) Extremos del eje menor en (-10,0) y (10,0), distancia entre focos 6.

f) Excentricidad 1/9, focos en (0,-2) y (0,2).

g) Excentricidad $\frac{\sqrt{3}}{2}$, focos en el eje *y*, y longitud del eje mayor 4.

h) Focos en ($\pm$ 5,0), longitud del eje mayor 12.

3) En cada uno de los siguientes ítems determina las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas dadas por sus ecuaciones. Utiliza un software para visualizar las gráficas y verificar los resultados hallados:

a) $x + y = 3$ y $5x^2 + y^2 = 9$ b) $x^2 + y^2 = 25$ y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{256/7} = 1$ c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ *y* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

3.4 Ecuación de la elipse con ejes de simetrías paralelos a los ejes coordenados

Queremos encontrar la ecuación de una elipse con ejes de simetrías paralelos a los ejes coordenados y centro en un punto de coordenadas *(h, k)* (*h* y *k* no nulos a la vez).

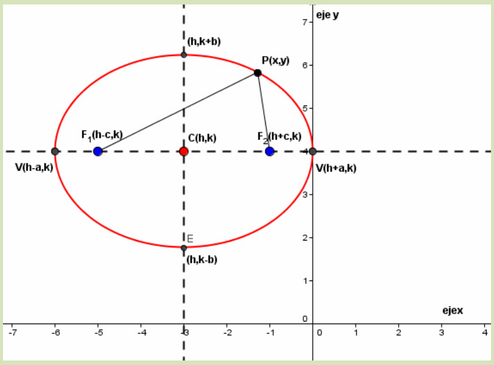
¿Qué condiciones deben satisfacer las coordenadas de un punto *P(x,y)* para pertenecer a gráfica de una elipse con eje focal horizontal (vertical) y vértice en el punto *(h,k)*?
y en tal caso, ¿Cuáles son las coordenadas de los focos y de los vértices?

Actividad 19: **Elipse con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados y centro en *(h,k)***

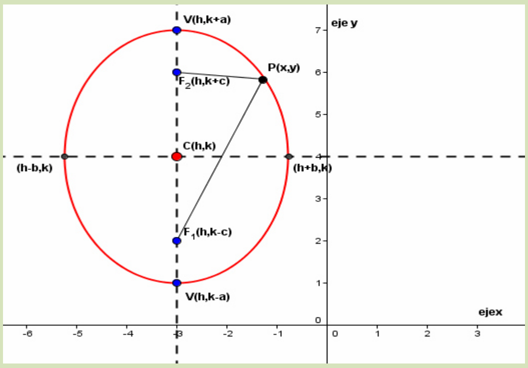
Con $b^2 = a^2 - c^2$, comprueba que cada una de las siguientes ecuaciones representa a una elipse con centro en el punto de coordenadas *(h,k)* y eje focal horizontal o vertical respectivamente.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (16) \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (17)$$

Representa gráficamente el conjunto de puntos que verifican dichas ecuaciones y compáralas con las siguientes figuras:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Verifica que se cumplen las siguientes propiedades:

eje focal horizontal

* *focos* en F_1 y F_2 de coordenadas *(h-c, k)* y *(h+c, k)*
* *vértices* en *(h-a, k)* y *(h+a, k)*
* *eje mayor horizontal* de longitud *2a*
* *eje menor vertical* de longitud *2b*

eje focal vertical

* *focos* en F_1 y F_2 de coordenadas *(h, k-c)* y *(h, k+c)*
* *vértices* en *(h, k-a)* y *(h, k+a)*
* *eje mayor vertical* de longitud *2a*
* *eje menor horizontal* de longitud *2b*

**excentricidad* $e = \dfrac{c}{a}$

Figura 22

Actividad 20:

1) Encuentra el centro, los focos y los vértices de cada elipse, y determina la longitud de los ejes mayor y menor. Traza las gráfica de cada una.

a) $(x-2)^2 + 4y^2 = 4$ b) $(x-3)^2 + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$ c) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

2) En cada caso determina la ecuación de la elipse que verifique las condiciones dadas y representa gráficamente:

a) centrada en el origen de coordenadas, un vértice en (10, 0) y un foco en (-6, 0).

b) centro en el punto (1,-2), la distancia entre los vértices es 8 unidades, eje focal horizontal y excentricidad es ½.

c) el punto *(1,1)* es uno de los extremos de su eje menor, tiene un vértice en el punto *(3,5)* y su eje mayor es vertical.

d) comparte un vértice y un foco con el vértice y foco de la parábola $x^2 + 4y = 40$, y que tiene su otro foco en el origen de coordenadas.

3) Determina la ecuación de una elipse cuyos ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados, siendo la elipse tangente a los mismos en los puntos *A(4,0)* y *B(0,-3)*. Representa gráficamente a la elipse.

Planteamos ahora la misma pregunta que en los casos de circunferencia y parábola:

¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la ecuación general de segundo grado (1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para representar algebraicamente una elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados?

Realizando un análisis similar a los realizados anteriormente, podemos llegar a la siguiente conclusión:

Para que la ecuación (3) represente a una elipses necesario que: $AC > 0$ y $B = 0$	(17)

Ahora bien:

¿Es suficiente que una ecuación de segundo grado cumpla la condición (17), para que sea una elipse?

Para llegar a una respuesta realiza la siguiente actividad:

Actividad 21:

1) Cuáles de las siguientes ecuaciones tienen por gráfica a una elipse, un punto o el conjunto vacío

a) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$ b) $2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 10 = 0$ c) $2x^2 + y^2 + 6x + 2y - 40 = 0$

d) $2x^2 + y^2 = 2y + 1$ e) $x^2 + 2y^2 = 4y - 4$ f) $x^2 + y^2 = 2x - 1$

2) Determina cuál debe ser el valor de F para que la gráfica de la ecuación $4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$ represente: a) una elipse b) un punto c) el conjunto vacío.

Algunas propiedades y aplicaciones de las elipses:

Las elipses tienen dos aplicaciones comunes con las demás secciones cónicas, y algunas aplicaciones únicas. Durante dos mil años se creyó que los planetas se movían en órbitas circulares alrededor de la Tierra, según el llamado modelo aristotélico. En el siglo XVII, Kepler demostró que las órbitas son elípticas y que el Sol está en uno de los focos, por esta razón se abandonó el modelo aristotélico del sistema solar. No obstante es posible que haya órbitas circulares, y algunas (entre ellas la Tierra) son casi circulares. De hecho, si redujéramos la órbita de la Tierra de tal modo que el eje mayor tuviera 8 pulgadas de longitud, el eje menor tendría 7.8 pulgadas. Con esa diferencia tan pequeña es difícil reconocer que la órbita sea una elipse o un círculo.

La otra propiedad que tienen en común las elipses con las otras secciones cónicas es la propiedad reflectora de los espejos elípticos. Una fuente luminosa en un foco de una elipse se refleja hacia el otro foco. La aplicación principal de esto se da en las llamadas bóvedas de los murmullos, que son unos recintos con bóveda elíptica (en realidad, un elipsoide, que es una elipse tridimensional) en donde una persona ocupa la posición de uno de los focos y puede murmurar a alguien que esté en el otro sin que lo oigan los demás. Otra aplicación es el empleo de reflectores elípticos de ultrasonido para disgregar los cálculos renales: se coloca el reflector de tal modo que el cálculo esté en uno de los focos y la fuente sonora en el otro, las ondas se concentran en la piedra haciéndola vibrar y desintegrándola.

Todos estos conceptos también se aplican en la aerodinámica e hidrodinámica: un ala, quilla o timón elípticos producen menos resistencia por fricción que otras formas. Uno de los ejemplos más conocido es el del ala elíptica desarrollada en el avión de caza británico “Spitfire”, de la Segunda Guerra Mundial.

Actividad complementaria

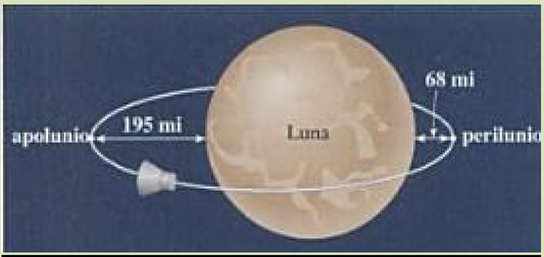
1) Un carpintero construirá la cubierta de una mesa elíptica a partir de una hoja de madera contrachapada, de 1,20 por 3,5. Trazará la elipse con el método del jardinero. ¿Qué longitud de cordón usará, y a qué distancia clavará las tachuelas si la elipse debe tener el tamaño máximo que admite la hoja de madera?

2) La Tierra se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol, y éste está en uno de los focos de la elipse. Las distancias mínima y máxima de la Tierra al Sol son 147.17km y 152.18km, respectivamente. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse? ¿Qué longitudes tiene el eje mayor y el eje menor?

3) La distancia (centro a centro) de la Luna a la Tierra varía desde un mínimo de 356.41km hasta un máximo de 406.70 km. Calcula la excentricidad de la órbita lunar y las longitudes de los ejes mayor y menor.

4) Un puente está formado por pilastras verticales con semielipses entre ellas. Cada semielipse salva un claro de 50 pies, tiene 10 pies de alto en las pilastras y 20 pies de alto en el centro del claro. Deduce una ecuación de la semielipse, si el eje x está en el piso y el origen a la mitad del claro.

5) Para un objeto en órbita elíptica en torno a la Luna, los puntos de la órbita que están más cerca y más lejos del centro de la Luna se llaman **perilunio** y **apolunio**, respectivamente. Son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en uno de los focos de la órbita. La nave espacial *Apollo II* se puso en órbita lunar cuyo perilunio estaba a 109.44 km (68 millas) y el apolunio a 313.82 km (195 millas) de la superficie del satélite. Suponiendo que la Luna es una esfera de 1730 km de radio, deduce una ecuación de la órbita de la *Apollo II*. (Coloca los ejes de coordenadas de tal modo que el origen quede en el centro de la órbita, y los focos estén en el eje *x*).



6) Verifica que las ecuaciones paramétricas de una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, están dadas por el sistema $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\cos t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi)$.

7) Determina los focos de las siguientes elipses a) $\begin{cases} x = \frac{2}{3}\cos t \\ y = 2sent \end{cases}$ $t \in [0,2\pi)$ b) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t \\ y = \sqrt{2}\, sent \end{cases}$ $t \in [0,2\pi)$.

8) Busca problemas o aplicaciones relacionados con el tema y compártelos con tus compañeros.

Hipérbola 4

Como mencionamos en la introducción las secciones cónicas fueron descubiertas por Menecmo, en su estudio del problema de la duplicación del cubo. En él se demuestra la existencia de una solución mediante el corte de una parábola con una hipérbola, lo cual es confirmado posteriormente por Proclo y Eratóstenes. Sin embargo, el primero en usar el término hipérbola fue Apolonio de Perge en su tratado Cónicas.

Nuevamente comenzaremos presentando la definición de hipérbola desde un punto de vista geométrico, para arribar luego a su ecuación algebraica.

4.1 DEFINICIÓN GEOMÉTRICA DE UNA HIPÉRBOLA

Una ***hipérbola*** es el conjunto de todos los puntos ***P*** del plano tal que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Esos dos puntos se llaman ***focos*** de la hipérbola y la distancia entre ellos se llama ***distancia focal***.

La gráfica de una hipérbola ***H*** con focos F_1 y F_2 puede describirse como el siguiente conjunto de puntos (por comodidad llamamos $2a$ a la constante):

$$H(F_1,F_2)=\{P\,/\,|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\}$$

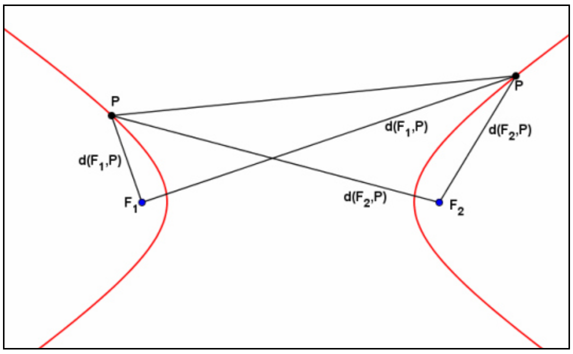


Figura 23

Una hipérbola puede construirse por varios métodos que no son tan sencillos como en el caso de la elipse.

***Actividad 22*:**
Visualiza la traza que describen los puntos de una hipérbola cuando se dan como datos los dos focos, ingresando a ***http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/c7_hiperbola_constr.html*** .

4.2 Ecuación de la Hipérbola con centro en el origen de coordenadas

Fijado el sistema de coordenadas cartesiano usual, el lugar geométrico que estamos considerando queda caracterizado por el siguiente conjunto de puntos:

$$H(F_1,F_2)=\{P(x,y)\,/\,|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\}$$

Deseamos representar a una hipérbola como el conjunto de soluciones de una ecuación, tal como lo hicimos con las cónicas tratadas anteriormente. Para obtener una ecuación más sencilla, colocamos los focos sobre el eje x en $F_1\,(-c,\,0)$ y $F_2\,(c,\,0)$, de manera que el origen de coordenadas esté ubicado a la misma distancia entre ellos. En este caso $|\overline{F_1F_2}|=2c$.

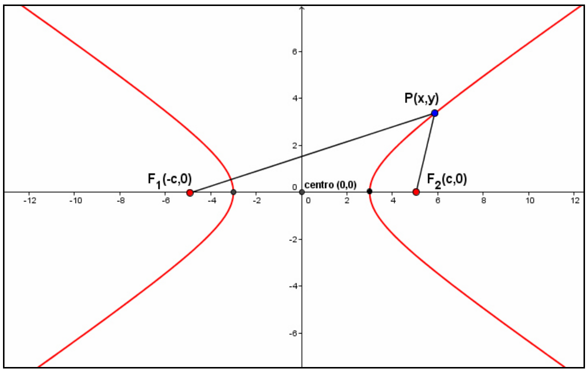


Figura 24

Si *P(x , y)* es un punto cualquier a de la hipérbola debe cumplir que: $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$

o sea: $$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a$$

Trabajando algebraicamente llegamos a la ecuación:

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2) \qquad (18)$$

Si observamos la *figura 23*, vemos que en el triángulo PF_1F_2 es $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|<2c$. En consecuencia, $2a<2c$ o sea, $a<c$, de donde $a^2<c^2$ por lo que existe un único número positivo b tal que $b^2=c^2-a^2$.

Reemplazando en (18): $$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

o su equivalente: $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Es inmediato ver que si el punto *P(x, y)* pertenece a la hipérbola (verifica su ecuación), los puntos $P_1(-x, y)$, $P_2(-x,-y)$ y $P_3(x,-y)$ también pertenecen a la curva. Esto permite afirmar que los ejes coordenados son ***ejes de simetría*** de la curva, y el origen de coordenadas es ***centro de simetría.***

La recta que contiene a los *focos* recibe el nombre de ***eje focal*** o ***eje transversal***, la distancia entre los focos es igual a ***2c*** y se llama ***distancia focal***. La *mediatriz* del segmento que une los focos, que también es un eje de simetría de la curva pero no la intercepta, se llama ***eje imaginario*** de la hipérbola.

La gráfica interseca al eje *x* en los puntos de coordenadas *(-a, 0)* y *(a, 0)* que se denominan ***vértices de la hipérbola***. No hay intersección con el eje *y*, porque al hacer *x= 0,* se obtiene $-y^2=b^2$.

Todo punto de la hipérbola verifica la desigualdad $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}+1\geq 1$, entonces $x^2\geq a^2$, y por lo tanto $x>a$ o $x<-a$. Esto nos indica que la hipérbola está formada por dos partes llamadas ***ramas.***

En el caso de la hipérbola también se llama ***excentricidad*** al número $e=\frac{c}{a}$, y se puede comprobar que es mayor que uno.

El conjunto de puntos del plano que verifican las dos inecuaciones $|x|\leq a$ e $|y|\leq b$ determina un rectángulo. Las rectas que contienen a sus diagonales, dadas por las ecuaciones $y=\pm\frac{b}{a}x$, se llaman ***asíntotas de la hipérbola.*** La gráficas de la hipérbola y las de sus asíntotas se acercan arbitrariamente cuando los valores de *x* e *y* se hacen suficientemente grandes.

*Para que el dibujo de una hipérbola resulte más sencillo y preciso, es conveniente graficar el **rectángulo** con vértices en los puntos (-a,0), (0,-b), (a,0) y (0,b). Trazar las rectas asíntotas, que son las que contienen a los vértices simétricos con respecto al origen de coordenadas, y localizar los vértices. Comenzar a graficar cada rama partiendo del vértice, de manera que se vaya acercando a la asíntota a medida que se aleja del centro.*

Si colocamos los focos sobre el eje *y* en F_1 *(0,-c)* y F_2 *(0, c)*, la ecuación de la hipérbola es similar a la anterior, intercambiando *x* por *y*. En este caso obtenemos una hipérbola con ***eje transversal vertical*** y las asíntotas tienen ecuaciones $y = \pm\frac{a}{b}x$. El procedimiento para graficarlas es el mismo.

***Actividad 23*:**

1) Deduce que las ecuaciones de las asíntotas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ y $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ son respectivamente, las rectas de ecuaciones $y=\pm\frac{b}{a}x$ e $y=\pm\frac{a}{b}x$.

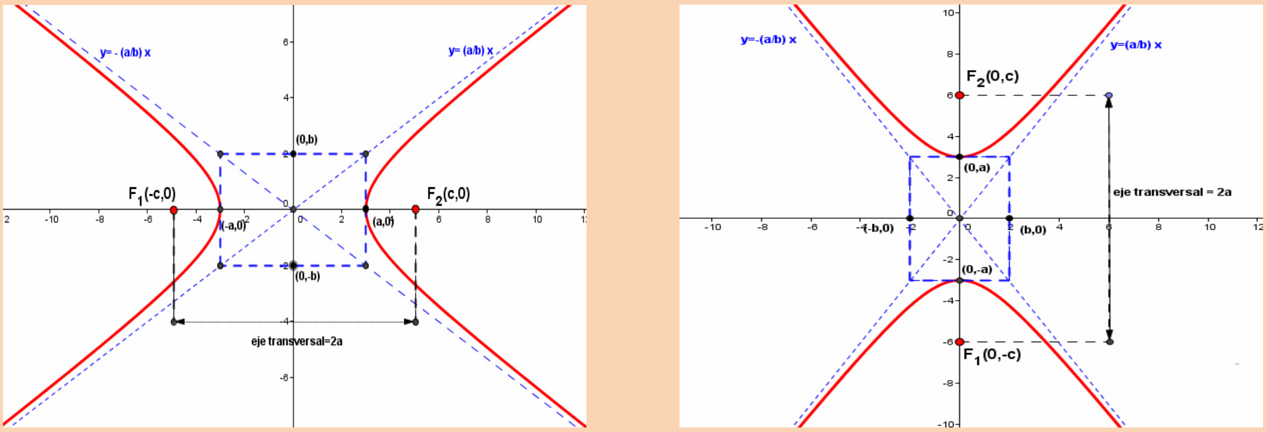
Podemos resumir que:

Hipérbola con centro en (0,0), eje focal horizontal u vertical

Si $b^2=c^2-a^2$, $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ (18) y $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$ (19) son las ecuaciones canónicas o reducidas de hipérbolas con eje focales horizontal o vertical respectivamente que cumplen con las siguientes propiedades:

* *focos* en los puntos F_1 y F_2 de coordenadas (*-c, 0*) y *(c,0)*	*F_1 *(0,-c)* y F_2*(0, c)*
* *vértices* en los puntos de coordenadas *(-a,0)* y *(a,0)*	* *(0, -a)* y *(0, a)*
* *eje focal horizontal* de longitud *2a*	* *eje focal vertical* de longitud *2a*
* *asíntotas* $y=\pm\frac{b}{a}x$	* *asíntotas* $y=\pm\frac{a}{b}x$

excentricidad $e=\frac{c}{a}$



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\qquad$ $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Figura 25

Ejemplo12: Determinar los vértices, focos, asíntotas y gráfica de la hipérbola de ecuación $4x^2-9y^2=36$.

Para llevarla a la forma canónica o reducida dividimos cada miembro de la ecuación por 36, de donde: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$.

Como el término que contiene a x^2 es positivo, la hipérbola tiene ***eje focal horizontal***. Sus vértices están en *(-3,0)* y *(3,0)*.

Como $b^2=c^2-a^2$, $a^2=9$ y $b^2=4$, resulta que $c=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$, por lo que los focos se encuentran en $\left(\pm\sqrt{13},0\right)$.

Sabiendo que *a=3* y *b=2,* las ecuaciones de las asíntotas son $y=\pm\frac{2}{3}x$. Después de trazar el rectángulo y las asíntotas, completamos el trazo de la hipérbola, como se ve en la siguiente figura.

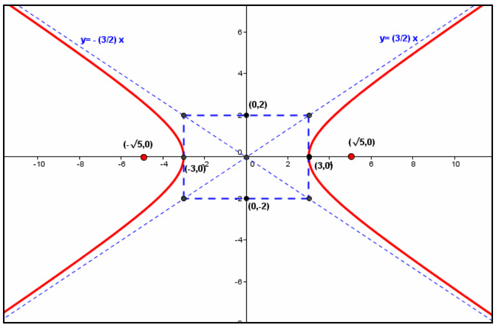


Figura 26

Ejemplo13: Determinar los vértices, focos, asíntotas y gráfica de la hipérbola cuya ecuación es $x^2 - 9y^2 + 9 = 0$.

Para llegar a la ecuación reducida de la hipérbola dividimos por (-9) llegando a la ecuación $y^2 - \frac{x^2}{9} = 1$. Como el término y^2 es positivo, la hipérbola tiene ***eje focal vertical***: sus focos y vértices están en el eje y. Sabiendo que a^2=1 y b^2=9, obtenemos que c^2=10. Por lo que los focos están en $(0, \pm\sqrt{10})$ y las asíntotas tienen ecuaciones $y = \pm\frac{1}{3}x$. Como en el ejemplo anterior, trazamos el rectángulo, las asíntotas y luego la traza de la hipérbola, como se ve en la *figura 26.*

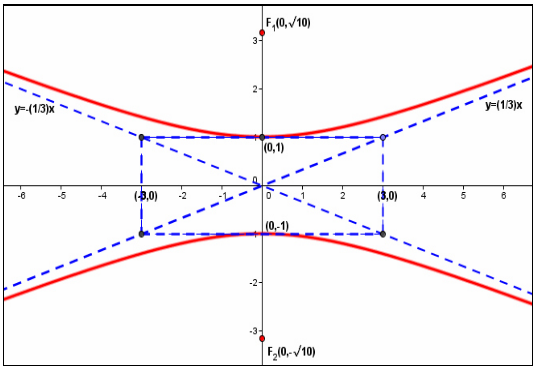


Figura 27

Ejemplo14: Sabiendo que el centro de una hipérbola es el origen de coordenadas, uno de los focos está en (-4,0) y la distancia entre los vértices es 6, determinar su ecuación. Graficar la curva y sus asíntotas.

Como los focos están sobre el eje x, la hipérbola tiene eje focal horizontal, $c = 4$ y $a=3$. Como $b^2 = c^2 - a^2$, resulta que $b = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$.

Por lo tanto la ecuación de la hipérbola es $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{7} = 1$ y las asíntotas son las rectas de ecuaciones $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}x$, y su gráfica se ve de la siguiente forma:

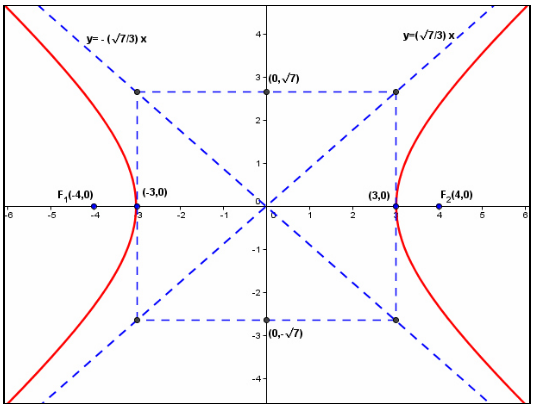


Figura 28

Ejemplo15: Encontrar la ecuación de una hipérbola sabiendo que sus vértices se encuentran en lo puntos *(0,-2)* y *(0,2)* y cuyas asíntotas tienen ecuaciones $y = \pm 2x$. Trazar la gráfica de la curva y sus asíntotas.

La hipérbola tiene eje focal vertical ya que sus vértices están en el eje *x* y *a=2*. Las ecuaciones de la hipérbola son $y = \pm\frac{a}{b}x = \pm 2x$, de donde resulta que *b=1*. Por lo que la ecuación de la hipérbola es $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$.

Como $b^2 = c^2 - a^2$, $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$, así $c = \sqrt{5}$. Los focos están es $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica se ve en la siguiente figura.

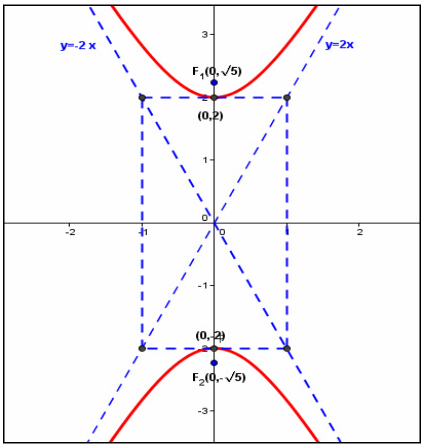


Figura 29

***Actividad 24*:**

1) Halla los vértices, focos, excentricidad y asíntotas de las siguientes hipérbolas. Grafica las curvas.

a) $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ *b)* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ *c)* $y^2 - x^2 = 1$ *d)* $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$

2) En cada caso halla la ecuación y gráfica de la hipérbola con centro en el origen de coordenadas partiendo de la información dada.

a) Un foco en *(5, 0)* y un vértice en *(3, 0)*.

b) Un vértice en *(0, 2)* y un foco en *(0, 4)*.

c) Un vértice en *(4, 0)* y asíntotas $y = \pm\frac{3}{2}x$.

d) Excentricidad igual a $\frac{5}{3}$ y un focos en *(0,-2)*.

e) Pasa por el punto $P(1, \frac{\sqrt{17}}{2})$ y una asíntota de ecuación $y = 2x$.

3) Halla los puntos de intersección de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ con la recta $3x + 2y = 0$.

4) Determina gráfica y analíticamente los puntos de intersección de las curvas de ecuaciones:

$x^2 + y^2 = 25$ y $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

5) Halla la distancia del foco de la derecha de la hipérbola $x^2 - 16y^2 = 144$ a la asíntota de pendiente positiva.

4.3 Ecuación de la hipérbola con ejes de simetrías paralelos a los ejes coordenados

Tal como lo planteamos para las otras secciones cónicas, queremos encontrar la ecuación de una hipérbola con ejes de simetrías paralelos a los ejes coordenados y centro en un punto de coordenadas *(h, k)* (*h* y *k* no nulos a la vez).

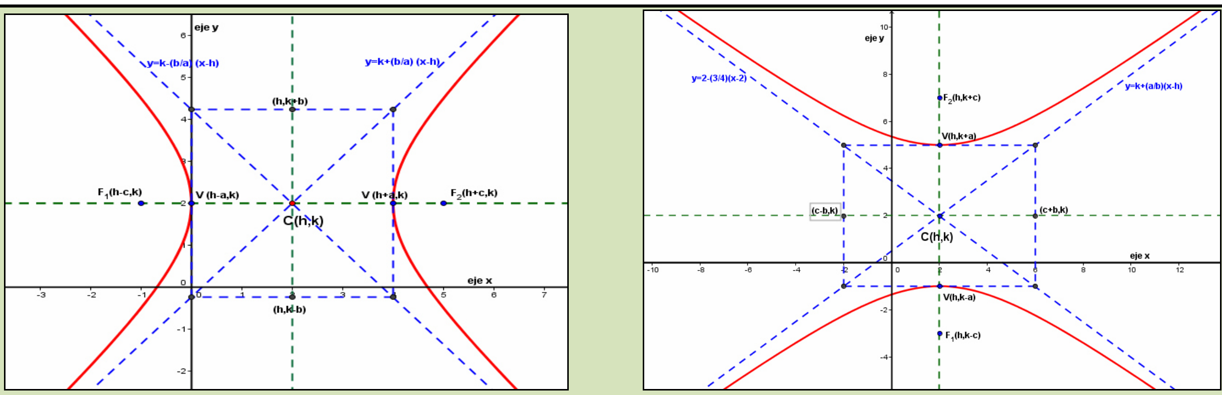
¿Qué condiciones deben satisfacer las coordenadas de un punto *P(x,y)* para pertenecer a gráfica de una hipérbola con eje focal horizontal (vertical) y vértice en el punto *(h,k)*?

Actividad 25:* Hipérbola con ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados y centro en *(h,k)

Comprueba que cada una de las siguientes ecuaciones representa a una hipérbola con vértice en el punto de coordenadas *(h,k),*con eje focal horizontal y vertical respectivamente.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Representa gráficamente el conjunto de puntos que verifican dichas ecuaciones y compáralas con las siguientes figuras:



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Siendo $b^2=c^2-a^2$, en cada caso expresa las coordenadas de los focos y de los vértices y verifica que se cumplen las siguientes propiedades:

eje focal horizontal

**focos* en los punto de coordenadas $F_1(h-c, k)$ y $F_2(h+c, k)$

* *vértices* en $(h-a, k)$ y $(h+a, k)$

eje focal vertical

**focos* en los punto de coordenadas $F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$

* *vértices* en $(h, k-a)$ y $(h, k+a)$

Observa que cada una de las coordenadas de los focos y de los vértices están respectivamente a una distancia c y a del centro.

* *asíntotas* $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$

* *asíntotas* $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$

**excentricidad* $e=\frac{c}{a}$

Figura 30

***Actividad 26*:**

1) Deduce que las asíntotas de las hipérbolas $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$ son respectivamente, las rectas de ecuaciones $y=k\pm\frac{b}{a}(x-h)$ y $y=k\pm\frac{a}{b}(x-h)$.

Ejemplo16: Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con focos en (-1, 2) y (5, 2) y con vértices en (0, 2) y (4, 2). Graficar la curva y sus asíntotas.

El centro de la hipérbola es el punto medio de las abscisas de los vértices: $\left(\frac{0+4}{2},\frac{2+2}{2}\right)=(2,2)$. Como a es la distancia entre la abscisa del centro de la hipérbola y la del vértice, resulta a=2. Razonando de la misma forma c=3, entonces $b^2=3^2-2^2=5$ y la ecuación de la hipérbola viene dada por: $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{5}=1$

Para encontrar las asíntotas reemplazamos los valores de h, k, a y b las respectivas ecuaciones, llegando a: $y=2\pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$.

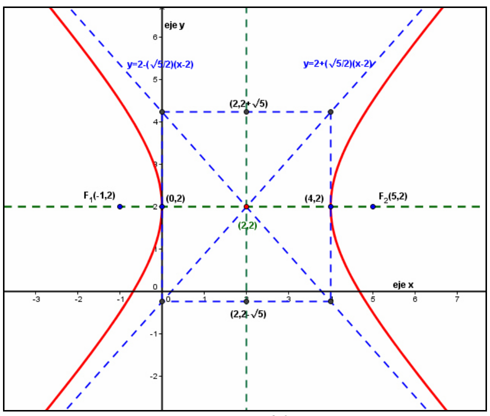


Figura 31

Ejemplo 17: Hallar centro, vértices, focos y asíntota de la hipérbola de ec uación $\frac{(y-2)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$. Graficar la curva y sus asíntotas.

El centro tiene coordenadas *(2,2)*, *a=3* y *b=4*, por lo que *c=5*. Las coordenadas de los vértices y focos son respectivamente: $(2,2\pm 3)$ y $(2,2\pm 5)$

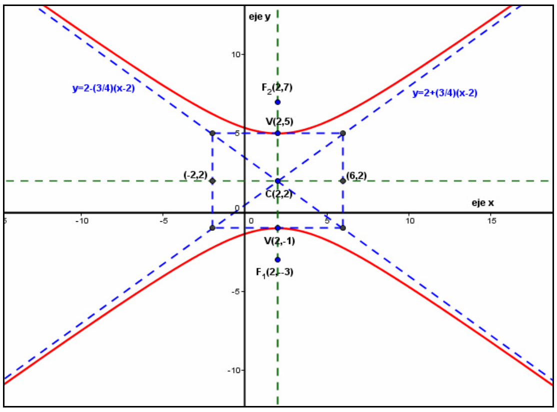


Figura 32

Ejemplo18: Representar gráficamente la hipérbola de ecuación $4x^2-3y^2+8x+16=0$. Determinar centro, focos, vértices y ecuaciones de las sus asíntotas.

Completamos cuadrados para llegar a su forma reducida o canónica.

$$4x^2-3y^2+8x+16=0$$
$$4(x^2+2x)-3y^2=-16$$
$$-4(x^2+2x+1)+3y^2=16-4$$
$$-4(x+1)^2+3y^2=12$$
$$\frac{y^2}{4}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$$

La hipérbola tiene su centro en el punto *(-1, 0)*, vértices en *(-1, ± 2)*, focos en $(-1,\pm\sqrt{7})$. Para representarla gráficamente dibujamos el rectángulo determinado por los cuatro puntos *(-1, ± 2)* y $(-1\pm\sqrt{3},0)$. Las asíntotas son las rectas que pasan por los vértices de ese rectángulo con ecuaciones: $y=\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$ *e* $y=-\frac{2}{\sqrt{3}}(x+1)$

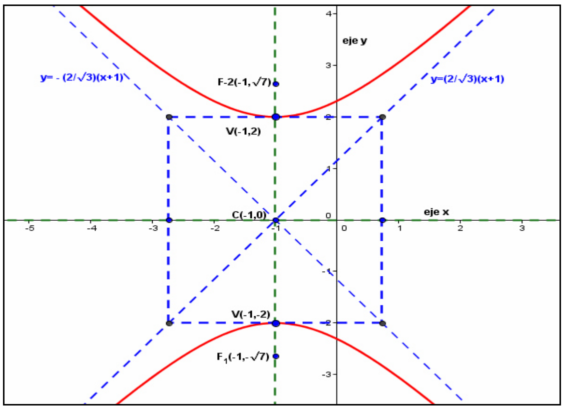


Figura 33

***Actividad 27*:**

1) En cada uno de los siguientes ítems, determina la ecuación de la hipérbola que verifica las condiciones dadas. Representa gráficamente cada una.

a) focos en *(-1, 2)* y *(5,2)* y vértices en *(0, 2)* y *(4, 2)*.

b) vértices en *(0,0)* y *(0,6)* y excentricidad igual a 3/2.

c) focos en *(16,2)* y *(-10,2)* siendo la distancia entre sus vértices igual a 24.

2) Halla centro vértices, focos, excentricidad y asíntotas de las siguientes hipérbolas y sus representaciones gráficas.

$a)\ \frac{(x+1)^2}{4}-y^2=1$ $\quad b)\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{9}=-1$ $\quad c)-4x^2+9(y-2)^2=36$ $\quad d)-4(y-1)^2+9(x+3)^2=1$

Volvemos a plantear la misma pregunta que hicimos en las cónicas anteriores, ahora para la hipérbola:

¿Qué condiciones deben cumplir los coeficientes de la ecuación general de segundo grado (1)

$$A\,x^2+B\,x\,y+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0$$

para representar algebraicamente una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados?

Si realizamos un análisis similar a lo hecho en los otros casos, podemos llegar a la siguiente conclusión:

Para que la ecuación (3) represente a una hipérbola es necesario que:

$$A\,C<0 \text{ y } B=0 \qquad (20)$$

Ahora bien:

¿Es suficiente que una ecuación de segundo grado cumpla la condición (20), para que sea una hipérbola?

Para llegar a una respuesta realiza la siguiente actividad:

Actividad 28:

1) Analiza la representación gráfica que corresponde a cada ecuación, indicando si se trata de una hipérbola, dos rectas secantes o el conjunto vacío.

a) $x^2-9y^2-6x+9=0$ b) $2x^2-8y^2+8x+16y+2=0$ c) $y^2-14y+52=0$

d) $9x^2-y^2+18x+6y=0$ e) $4x^2+y^2-8x+2y+6=0$ f) $x^2+1=y^2$

2) Determina cuál debe ser el valor de F para que la gráfica de la ecuación

$$4x^2-y^2+4(x-2y)+F=0$$

represente:
a) una hipérbola con eje focal horizontal
b) una hipérbola con eje focal vertical
c) un par de rectas secantes

Actividad 29:

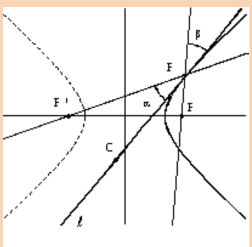
Para cada uno de los siguientes ítems escribe y representa gráficamente la ecuación de la hipérbola que cumple con las siguientes condiciones:

a) centro en el foco de la parábola de ecuación $x^2+16y=0$, excentricidad igual a 3/2 y contiene el punto P (2, -1).

b) centro en vértice de la parábola de ecuación $x^2+16y=0$, excentricidad igual a 3/2, y contiene al foco de ordenada positiva de la parábola de ecuación $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$.

Algunas propiedades y aplicaciones de las hipérbolas:

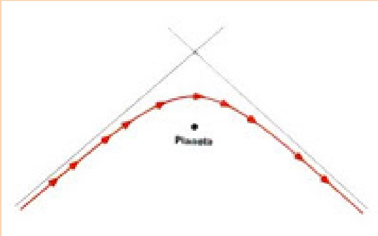
Propiedades de reflexión. Las rectas que unen los focos con cualquier punto de una hipérbola forman ángulos iguales con la tangente a la hipérbola en dicho punto.



Por tanto, si la superficie de un reflector, es generada por la revolución de una hipérbola alrededor de su eje transverso, todos los rayos de luz provenientes del exterior que converjan sobre un foco, se reflejan pasando por el foco. Esta propiedad se emplea a veces en ciertos telescopios juntos con reflectores parabólicos.
Este principio se usa en los telescopios del tipo ***Cassegrain.***

Astronomía, trayectorias de cometas. Un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar y sea atraído por el sol, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar. Esto sucede con algunos cometas. Un ejemplo de trayectoria hiperbólica es la descripta por el ***cometa Lulin***.

Recorrido de un *asteroide* que vaga libremente. Su trayectoria será rectilínea (Ley de Newton) hasta que se vea perturbada por la proximidad de un planeta, por ejemplo, cuya tracción comienza a curvarlo.



En raros casos el asteroide, será “capturado” por el planeta y caerá hacia él o pasara a moverse siguiendo una órbita elíptica a su alrededor. Pero lo más probable es que describa una trayectoria como la indicada: una rama de hipérbola. La asíntota de la izquierda marca la trayectoria que tendría el asteroide sin la influencia del campo gravitatorio del planeta. La atracción, mayor a menor distancia, obliga al asteroide a cambiar cada vez más rápidamente de dirección. Cuando el asteroide se aleja del planeta decrece paulatinamente la atracción y el movimiento tiende, de nuevo, a ser rectilíneo: aparece la segunda asíntota.

El *reloj de sol*. Cada día el Sol, desde que sale por el Este y se pone por el Oeste, describe sobre el cielo un arco de circunferencia. Este movimiento es aparente, porque, en realidad, es consecuencia del movimiento diario de rotación de la Tierra. Desde hace mucho tiempo se sabe que, cuando el Sol recorre el cielo a lo largo de un día, la sombra que proyecta un objeto fijo describe una curva cónica. Esto se puede comprobar experimentalmente si se va marcando, por ejemplo, cada media hora, sobre una superficie plana el límite de la sombra que proyecta un objeto cualquiera. Los relojes de sol se fundamentan en este hecho. Están provistos de un marcador o estilete, llamado gnomon, que proyecta su sombra sobre una superficie plana donde están señalizadas las horas. El extremo de la sombra indica la hora solar correspondiente. El sol, por lo lejano que está, se considera como un foco puntual de luz. La línea imaginaria que le une con el extremo del gnomon recorre a lo largo del día parte de la superficie de un cono, también imaginario. La superficie de este cono se corta por el plano del reloj donde se observa la sombra del extremo del gnomon. Por eso, la trayectoria que sigue esa sombra es la de una cónica. En las latitudes de la Península Ibérica (de 38º a 42º) esa cónica es siempre una hipérbola, tanto más curvada cuanto más próximo esté el día 21 de Junio (solsticio de verano) o al 21 de Diciembre (solsticio de invierno). En dos días del año, la trayectoria de la sombra que proyecta el gnomon es una recta en todos los lugares de la Tierra. Esto ocurre en los días 21 de marzo (equinoccio de primavera) y 23 de septiembre (equinoccio de otoño). La razón es que, en esos días, la trayectoria del Sol y el extremo del gnomon están en un mismo plano que corta al plano de observación en una recta.

Actividad complementaria

1) Un telescopio tiene su espejo principal parabólico, con foco a 10 pies del vértice, y un espejo hiperbólico con 12 pies entre sus focos; se instala a 9 pies del vértice de la parábola. Deduce las ecuaciones de ambos espejos, si el eje x es el eje de la parábola (y también el eje transversal de la hipérbola) y el origen se encuentra en el vértice de la parábola. Transforma las ecuaciones si el origen se ubica a la mitad de los focos de la hipérbola.

2) Un cometa se acerca al Sol con una órbita hiperbólica, comenzando en una dirección que forma un ángulo de 30º con el eje transversal, y llegando hasta 40 millones de millas del Sol. Determina la ecuación de la órbita, con el eje x coincidiendo con el eje transversal, y el origen con el Sol.

3) Verifica que las ecuaciones paramétricas de una hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, están dadas por el sistema $\begin{cases} x = a \sec t \\ y = b\, tg\, t \end{cases}$ $t \in [0,2\pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2}\pi \right\}$.

4) Determina la parametrización de la hipérbola $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

5) Busca problemas o aplicaciones relacionados con el tema y compártelos con tus compañeros.

Bibliografía

Lecciones de Algebra y Geometría Analítica. Mascó, A. López, E. 1982.Universitaria Cultura Argentina.

Cálculo de varias variables. Thomas, G. 2006. Pearson.

Cáclulo de varias variables. Trascendentes tempranas. Stewart, J. 7ª Ed. 2012. Cengage Learning.

Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Stewart, J. 6ª Ed. 2012. Cengage Learning.

Cálculo con Geometría Analítica. Protter, C., Murray, H. 3ª Ed. 1980. Fondo Educativo Interamericano.