ALGEBRA y GEOMETRÍA ANALÍTICA

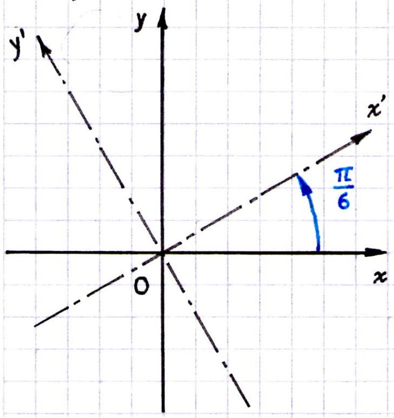
Ejercicios Cónicas de finales

HOJA N°

FECHA

(1) Realizando una rotación de un ángulo $\frac{\pi}{6}$, en sentido antihorario, al sistema coordenado Oxy se obtiene el sistema coordenado $Ox'y'$. La ecuación de la elipse E en el sistema $Ox'y'$ es $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$.

a) Encuentra las coordenadas de sus focos y vértices en el sistema Oxy.



Antes que nada reconozcamos las características de la elipse en el sistema rotado $(Ox'y')$

En la ecuación de una elipse genérica

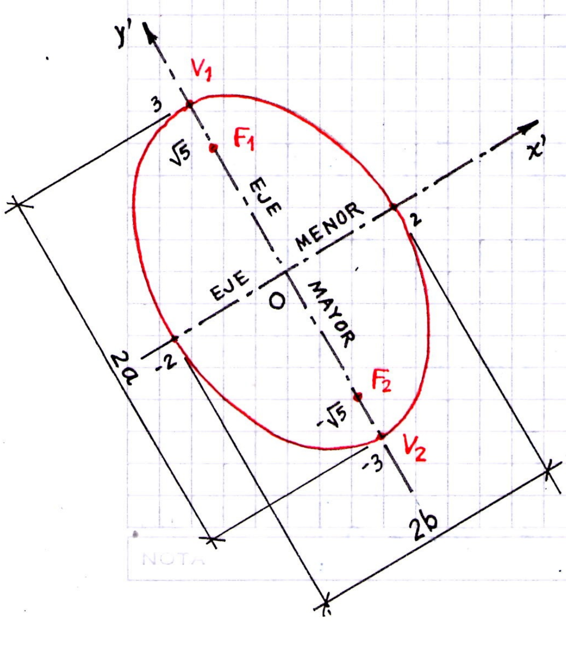
$$\frac{x^2}{(\ )^2} + \frac{y^2}{(\ )^2} = 1$$

el denominador mayor determina en qué eje se ubican los focos, los vértices y el eje mayor.

En este caso se trata del eje y'. Recordando que en una elipse resulta $a > b$ (pues $b^2 = a^2 - c^2$, siendo todos los términos positivos), entonces nuestra ecuación es de la forma $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ con $b^2 = 4$ y $a^2 = 9$.

Resulta $a = 3$; $b = 2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$; $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

- Las coordenadas de los focos, en el sistema $Ox'y'$ son: $(0 ; \pm\sqrt{5})$ y las de los vértices : $(0 ; \pm 3)$



Para expresar las coordenadas de estos puntos en el sistema original, Oxy, usamos las ecuaciones de rotación que relacionan los dos sistemas :

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos\frac{\pi}{6} - y' \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ y = x' \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + y' \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$$

NOTA

$$F_1(0;\sqrt5) \rightarrow \begin{cases} x = 0 - \sqrt5 \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt5/2 \\ y = 0 + \sqrt5 \cdot \frac{\sqrt3}{2} = \sqrt{15}/2 \end{cases}$$

$$F_2(0;-\sqrt5) \rightarrow \begin{cases} x = 0 - (-\sqrt5)\cdot \frac{1}{2} = \sqrt5/2 \\ y = 0 + (-\sqrt5)\sqrt3/2 = -\sqrt{15}/2 \end{cases}$$

$$V_1(0;3) \rightarrow \begin{cases} x = 0 - 3\cdot\frac{1}{2} = -3/2 \\ y = 0 + 3\cdot\sqrt3/2 = \frac{3\sqrt3}{2} \end{cases}$$

$$V_2(0;-3) \rightarrow \begin{cases} x = 0 - (-3)\cdot 1/2 = 3/2 \\ y = 0 + (-3)\cdot\sqrt3/2 = -\frac{3}{2}\sqrt3 \end{cases}$$

En resumen :

	SISTEMA $Ox'y'$	SISTEMA Oxy
F_1	$(0;\sqrt5)$	$\left(-\frac{\sqrt5}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
F_2	$(0;-\sqrt5)$	$\left(\frac{\sqrt5}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$
V_1	$(0;3)$	$\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\sqrt3\right)$
V_2	$(0;-3)$	$\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\sqrt3\right)$

b) Halla la ecuación de E en el sistema Oxy

Reemplazando en la ecuación $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$ con las leyes de rotación despejadas para x' e y' :

$$\begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{6} + y\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt3}{2}x + \frac{1}{2}y \\ y' = -x\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6} + y\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt3}{2}y \end{cases}$$

tenemos : $\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt3}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt3}{2}y\right) = 1$

Desarrollando binomios: $\frac{1}{4}\left[\frac{3}{4}x^2 + \frac{\sqrt3}{2}xy + \frac{1}{4}y^2\right] + \frac{1}{9}\left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{\sqrt3}{2}xy + \frac{3}{4}y^2\right] = 1$

$$\frac{3}{16}x^2 + \frac{\sqrt3}{8}xy + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{36}x^2 - \frac{\sqrt3}{18}xy + \frac{1}{12}y^2 = 1$$

$$\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{36}\right)x^2 + \left(\frac{\sqrt3}{8}-\frac{\sqrt3}{18}\right)xy + \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}\right)y^2 = 1$$

$$\frac{31}{144}x^2 + \frac{5}{72}\sqrt3\,xy + \frac{7}{48}y^2 = 1$$

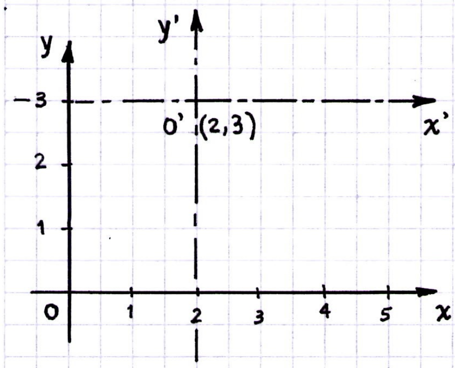
Resulta : $\boxed{31x^2 + 10\sqrt3\,xy + 21y^2 - 144 = 0}$

G.V.

Álgebra y Geometría Analítica	CÓNICAS - PRÁCTICA COMPLEMENTARIA	HOJA N°
		FECHA

(2) Una curva está representada por la ecuación $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$.

¿Cuál es su ecuación cuando se trasladan los ejes al nuevo origen, $O'(2;3)$?



Los dos sistemas coordenados están relacionados mediante las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + 3 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de la curva, nos deshacemos de las coordenadas según Oxy y quedan únicamente las variables del sistema O'x'y':

$$(x'+2)^2 + (y'+3)^2 - 4(x'+2) - 6(y'+3) + 7 = 0$$

Desarrollando los binomios y trabajando algebraicamente:

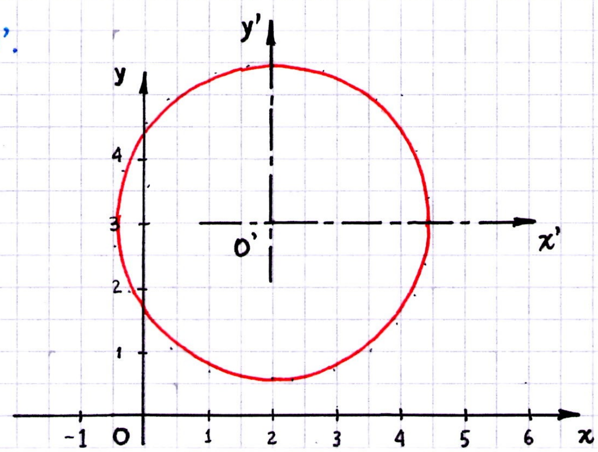
$$(x')^2 + \cancel{4x'} + 4 + (y')^2 + \cancel{6y'} + 9 - \cancel{4x'} - 8 - \cancel{6y'} - 18 + 7 = 0$$

$$(x')^2 + (y')^2 = 18 - 7 - 9 - 4 + 8$$

$$\underline{(x')^2 + (y')^2 = 6}$$

La expresión que hemos hallado satisface la ecuación general de una circunferencia centrada en el origen: $(x')^2 + (y')^2 = r^2$

Se trata entonces de una circunferencia de radio $r = \sqrt{6}$ centrada en el punto O'.



G.V.

NOTA

Algebra y Geometría Analítica	CÓNICAS - PRÁCTICA COMPLEMENTARIA	HOJA Nº
		FECHA

3) Transforme la ecuación $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$, refiriéndola a unos nuevos ejes que forman con los antiguos un ángulo θ, tal que $tg\,\theta = \frac{1}{2}$, siendo el centro de giro el origen de coordenadas del sistema Oxy.

Las ecuaciones que definen la rotación con un ángulo θ genérico son:

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\,sen\,\theta \\ y = x'\,sen\,\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

(Oxy : sistema original ; $Ox'y'$: sist. rotado)

Si reemplazamos estas relaciones en la ecuación $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0$ tenemos :

▶ $5(x'\cos\theta - y'\,sen\theta)^2 + 4(x'\cos\theta - y'\,sen\theta)(x'\,sen\theta + y'\cos\theta) + 8(x'\,sen\theta + y'\cos\theta)^2 - 36 = 0$

Desarrollando los binomios y trabajando algebraicamente :

▶ $5\left[(x'.\cos\theta)^2 - 2(x'\cos\theta)(y'sen\theta) + (y'.sen\theta)^2\right] + 4\left[x'^2\cos\theta\,sen\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'sen^2\theta - y'^2\cos\theta\,sen\theta\right] + \cdots$

$\cdots + 8\left[(x'sen\theta)^2 + 2x'y'sen\theta\cos\theta + (y'\cos\theta)^2\right] - 36 = 0$

▶ $5x'^2\cos^2\theta - 10x'y'sen\theta\cos\theta + 5y'^2sen^2\theta + 4x'^2sen\theta\cos\theta + 4x'y'(\cos^2\theta - sen^2\theta) - \cdots$

$\cdots - 4y'^2sen\theta.\cos\theta + 8x'^2sen^2\theta + 16x'y'sen\theta\cos\theta + 8y'^2\cos^2\theta - 36 = 0$

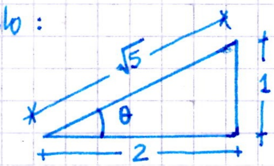
▶ $x'^2\left[5\cos^2\theta + 4sen\theta\cos\theta + 8sen^2\theta\right] + x'y'\left[6sen\theta\cos\theta + 4(\cos^2\theta - sen^2\theta)\right] + \cdots$

$\cdots + y'^2\left[5sen^2\theta - 4sen\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta\right] - 36 = 0 \quad (*)$

———— o ————

No conocemos θ directamente, sino su tangente : $tg\,\theta = 1/2$

En vez de trabajar con una aproximación de θ ($\theta = arctg(1/2)$) conviene trabajar de manera exacta con las funciones trigonométricas. Para ello nos asistimos trabajando con las relaciones trigonométricas de un triángulo rectángulo :



$tg\,\theta = \frac{cat.op}{cat.ady} = \frac{1}{2}$

$sen\,\theta = \frac{cat.op}{hip} = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{cat.ady}{hip} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

NOTA

Finalmente, reemplazando estos valores en $(*)$:

$$x'^2\left[5\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+8\cdot\frac{1}{5}\right]+x'y'\left[6\cdot\frac{1}{\sqrt5}\frac{2}{\sqrt5}+4\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\right)\right]+y'^2\left(5\cdot\frac{1}{5}-4\cdot\frac{1}{\sqrt5}\frac{2}{\sqrt5}+8\cdot\frac{4}{5}\right)-36=0$$

$$x'^2\cdot\frac{36}{5}+x'y'\cdot\frac{24}{5}+y'^2\,\frac{29}{5}-36=0$$

Equivalentemente : $\boxed{36x'^2+24x'y'+29y'^2-180=0}$

→ ecuación según el sist. rotado $Ox'y'$

G.V.

NOTA

4) Dada la ecuación $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2\sqrt{5}x + 6\sqrt{5}y = 0$, identifica el lugar geométrico que representa e indica sus elementos característicos (en el sistema original). Realiza un esbozo de su gráfica.

La ecuación de segundo grado tiene coeficientes
$A = 1, B = 4, C = 4, D = -2\sqrt{5}, E = 6\sqrt{5}, F = 0$
Además,
$B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, es decir que la ecuación representa una parábola o dos rectas paralelas. Usamos que $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$, para hallar $\cos\theta$ y $\sin\theta$

$$\cot 2\theta = \frac{1-4}{4} = -\frac{3}{4}$$

Es decir que el ángulo 2θ se encuentra en el segundo cuadrante y además $\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ Usando las fórmulas del ángulo mitad tenemos

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$
$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Entonces la transformación nos queda

$$\begin{cases} x = x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

(Vamos a llamar a esta transformación (*)) Ahora reemplazamos en la ecuación original y trabajamos algebraicamente para eliminar el término xy

$$\left(x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 4\left(x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\sqrt{5}\left(x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 6\sqrt{5}\left(x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 (x'-2y')^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(x'-2y')\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2x'+y') + 4\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 (2x'+y')^2 - 2\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(x'-2y') + 6\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2x'+y') = 0$$
$$\frac{1}{5}(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) + 4\frac{1}{5}(2x'^2 - 4x'y' + x'y' - 2y'^2) + 4\frac{1}{5}(4x'^2 + 4x'y' + y'^2) - 2(x'-2y') + 6(2x'+y') = 0$$
$$\frac{1}{5}(x'^2 - 4x'y' + 4y'^2) + \frac{4}{5}(2x'^2 - 3x'y' - 2y'^2) + \frac{4}{5}(4x'^2 + 4x'y' + y'^2) - 2x' + 4y' + 12x' + 6y' = 0$$
$$x'^2\left(\frac{1}{5} + 2\frac{4}{5} + 4\frac{4}{5}\right) + x'y'\left(-4\frac{1}{5} - 3\frac{4}{5} + 4\frac{4}{5}\right) + y'^2\left(4\frac{1}{5} - 2\frac{4}{5} + \frac{4}{5}\right) + x'(-2+12) + y'(4+6) = 0$$
$$5x'2 + 10x' + 10y' = 0$$

Y completamos cuadrados para llegar a la ecuación que buscamos

$$5x'2 + 10x' = -10y'$$
$$x'^2 + 2x' = -2y'$$
$$x'^2 + 2x' + 1 = -2y' + 1$$
$$(x'+1)^2 = -2(y' - \frac{1}{2})$$

Y aplicando la nueva transformación:

$$\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resulta,

$$x''^2 = -2y''$$

Es decir una parábola con foco en $(0, -\frac{1}{2})$ del sistema $O''x''y''$ y directriz $y'' = 1/2$

- Si reemplazamos el punto $(0, -\frac{1}{2})$ en el sistema $\begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - \frac{1}{2} \end{cases}$ Obtenemos el punto $(-1, 0)$ en el sistema $Ox'y'$, si reemplazamos nuevamente en la transformación (*) tenemos:

$$\begin{cases} x = (-1)\frac{1}{\sqrt{5}} - 0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = (-1)\frac{2}{\sqrt{5}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

  Es decir que el foco en el sistema original está en $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

- Ahora, como $y'' = y' - \frac{1}{2}$, la recta $y'' = 1/2$ coincide con la recta $y' = 1$. Luego si consideramos esto en la transformación:

$$\begin{cases} x' = x\frac{1}{\sqrt{5}} + y\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y' = -x\frac{2}{\sqrt{5}} + y\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

  Obtenemos:

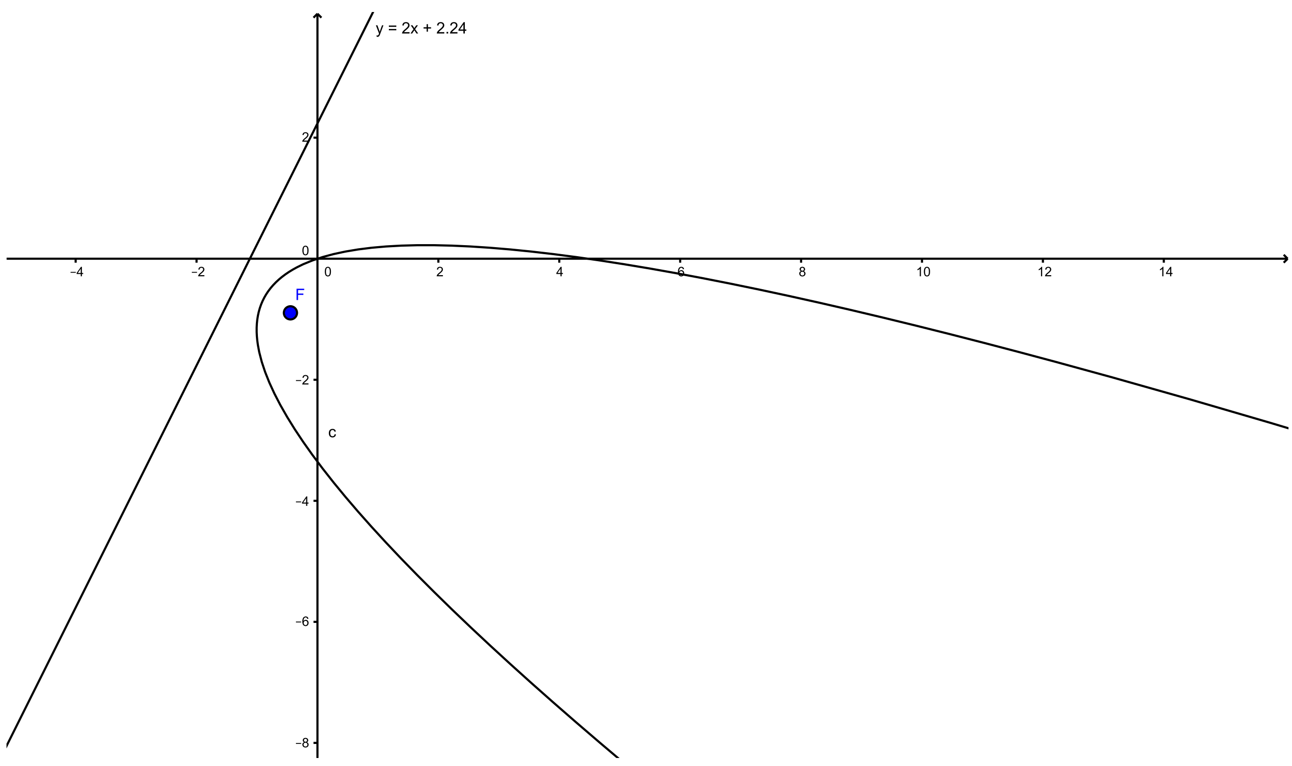
$$y' = -x\frac{2}{\sqrt{5}} + y\frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

  Es decir que la ecuación de la recta directriz es

$$-x\frac{2}{\sqrt{5}} + y\frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

  O multiplicando toda la expresión por $\sqrt{5}$ y despejando y,

$$y = 2x + \sqrt{5}$$



5)Dada la ecuación $4x^2 + 3xy - 18 = 0$ (*), identifica el lugar geométrico que representa e indica sus elementos geométricos (en el sistema original). Realiza un esbozo de su gráfica.

Desarrollo:

Recordemos que las ecuaciones de segundo grado tiene la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En nuestro caso $A = 4;\ B = 3;\ C = D = E = 0;\ F = \ -18.$

Veamos qué cónica representa:

$B^2 - 4AC = 9 - 4.4.0 = 9 > 0$ entonces la ecuación representa una hipérbola.

Calculamos el ángulo adecuado para eliminar el término rectangular xy usando la fórmula que tenemos: $cotg(2\theta) = \frac{A-C}{B}$, entonces $tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}$

Las ecuaciones de la rotación son:

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sen\theta \\ y = x'sen\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

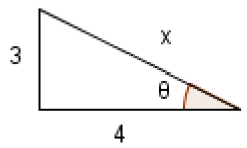
Como $A \neq C$entonces $tg(2\theta) = \frac{B}{A-C}$

$$tg(2\theta) = \frac{3}{4}>0$$

Luego, 2θ se encuentra en el primer cuadrante.

Como $tg(2\theta) = sen(2\theta)/cos(2\theta)$ tenemos que $cos(2\theta) > 0$

Por otro lado, consideramos el siguiente triángulo rectángulo:



Por teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$
$$x = \ \pm 5$$

Solo nos quedamos con el valor positivos de x.
Y como $cos(2\theta) = cateto\ ady/hipotenusa$ tenemos que $cos(2\theta) = 4/5$ (1)

Además, sabemos que: $sen(\theta) = \sqrt{\frac{1-cos\,2\theta}{2}}$

$$\text{y}cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+cos\,2\theta}{2}} \qquad (2)$$

Luego, de (1) y (2):$sen(\theta) = \sqrt{\frac{1-4/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$$cos(\theta) = \sqrt{\frac{1+4/5}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de la rotación son:

$$\begin{cases} x = x' \frac{3\sqrt{10}}{10} - y' \frac{\sqrt{10}}{10} \\ y = x' \frac{\sqrt{10}}{10} + y' \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Reemplazando x e y en la ecuación dada (*) tenemos:

$$4(\frac{3\sqrt{10}}{10}x' - \frac{\sqrt{10}}{10}y')^2 + 3[(\frac{3\sqrt{10}}{10}x' - \frac{\sqrt{10}}{10}y')(\frac{\sqrt{10}}{10}x' + \frac{3\sqrt{10}}{10}y')] - 18 = 0$$

$$4(\frac{9\times 10}{100}x'^2 + \frac{2\times 3\sqrt{10}}{10}\,x'y' + \frac{10}{100}y'^2) + 3(\frac{3\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{10\times 10}\,x'^2 + (\frac{3\sqrt{10}}{10})^2 x'y' - (\frac{\sqrt{10}}{10})^2 x'y' - \frac{3\sqrt{10}\times\sqrt{10}}{10\times 10}y'^2 - 18 = 0$$

$$\frac{18}{5}\,x'^2 + \frac{12}{5}\,x'y' + \frac{2}{5}\,y'^2 + \frac{9}{10}\,x'^2 + \frac{27}{10}\,x'y' - \frac{3}{10}\,x'y' - \frac{9}{10}y'^2 - 18 = 0$$

$$\frac{9}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - 18 = 0$$

dividiendo por 18 ambos miembros tenemos:

$$\boxed{\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{36} = 1 \quad (**)}$$

Esta ecuación representa una <u>hipérbola</u>.

- Los elementos característicos son los <u>focos</u> y las <u>asíntotas</u>.

Primero hallaremos los focos y las asíntotas en el sistema $x'y'$ y luego en el sistema original.

Para hallar los focos en el sistema $x'y'$ usamos que $a^2 - b^2 = c^2$

De (**) tenemos que: $36 + 4 = c^2$, entonces $c = \pm\sqrt{40} = \pm 2\sqrt{10}$;

Luego, $F_1(2\sqrt{10}; 0)$ y $F_2(-2\sqrt{10}; 0)$ $en\ x'y'$.

Sabemos que las asíntotas son: $y' = \pm\frac{a}{b}x'$

$$y' = \pm\frac{6}{2}x'$$

$y' = \pm 3x'$asíntotas en $x'y'$.

Para hallar los focos en el sistema original xy usamos las ecuaciones de la rotación:

$$\begin{cases} x = x'\frac{3\sqrt{10}}{10} - y'\frac{\sqrt{10}}{10} \\ y = x'\frac{\sqrt{10}}{10} + y'\frac{3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

Como $F_1(2\sqrt{10}; 0) = (x'; y')$
reemplazando en la anterior obtenemos las coordenadas del foco en el sistema xy:

- $x = 2\sqrt{10}.\frac{3\sqrt{10}}{10} - 0.\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$x = \frac{3.10}{5} = 6$$

- $y = 2\sqrt{10}\,.\frac{\sqrt{10}}{10} + 0\,.\frac{3\sqrt{10}}{10}$

  $y = \frac{2.10}{10} = 2$

Por lo tanto

$\boxed{F_1(6; 2) \text{ en } xy}$

Como $F_2(-2\sqrt{10}; 0) = (x'; y')$
reemplazando en las ecuaciones obtenemos las coordenadas del otro foco en el sistema xy:

- $x = -2\sqrt{10}.\frac{3\sqrt{10}}{10} - 0.\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$x = \frac{-6.10}{10} = -6$$

- $y = -2\sqrt{10}\,.\frac{\sqrt{10}}{10} + 0\,.\frac{3\sqrt{10}}{10}$

  $y = -\frac{-2.10}{10} = -2$

Por lo tanto

$\boxed{F_2(-6;-2) \text{ en } xy}$

Ahora, para hallar las asíntotas de la hipérbola en el sistema original tenemos las siguientes ecuaciones que se desarrollaron en teoría:

$$\begin{cases} x' = \frac{3\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{10}}{10}y \\ y' = -\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y \qquad (***) \end{cases}$$

estan son las ecuaciones que queríamos hallar.
Sabemos que las asíntotas en el sistema $x'y'$ son:
$A_1)\ y' = 3x'$y$A_2)\ y' = -3x'$

Reemplazando x'e y' por (***) obtendremos las asíntotas en el sistema original xy:

$$A_1)\ -\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y = 3(\frac{3\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{10}}{10}y)$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y - \frac{9\sqrt{10}}{10}x - \frac{3\sqrt{10}}{10}y = 0$$

$$-\sqrt{10}\,x = 0$$

$\boxed{x = 0}$

$$A_2)\ -\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y = -3(\frac{3\sqrt{10}}{10}x + \frac{\sqrt{10}}{10}y)$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y + \frac{9\sqrt{10}}{10}x + \frac{3\sqrt{10}}{10}y = 0$$

$$\frac{8\sqrt{10}}{10}x + \frac{6\sqrt{10}}{10}y = 0$$

$\boxed{y = -\frac{4}{3}x}$

Excentricidad:

De la ecuación (**) tenemos que: $a = 6$ y $c = 6 + 2 = 8$

Por lo tanto:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{8}{6} \approx 1{,}33$$

Por último hallamos los vértices:

Sabemos que en el sistema $x'y'$ los vértices son $V_1(6;0)$ y $V_2(-6;0)$.
Reemplazando en las ecuaciones de la rotación obtenemos las coordenadas de los vértices en el sistema xy:

- $x = 6.\frac{3\sqrt{10}}{10} - 0.\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$x = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

- $y = 6\,.\frac{\sqrt{10}}{10} + 0\,.\frac{3\sqrt{10}}{10}$

  $y = \frac{6\sqrt{10}}{10}$

por lo tanto:

$$\boxed{V_1\left(\frac{9\sqrt{10}}{5};\frac{6\sqrt{10}}{10}\right)}$$

- $x = -6.\frac{3\sqrt{10}}{10} - 0.\frac{\sqrt{10}}{10}$

$$x = -\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

- $y = -6\,.\frac{\sqrt{10}}{10} + 0\,.\frac{3\sqrt{10}}{10}$

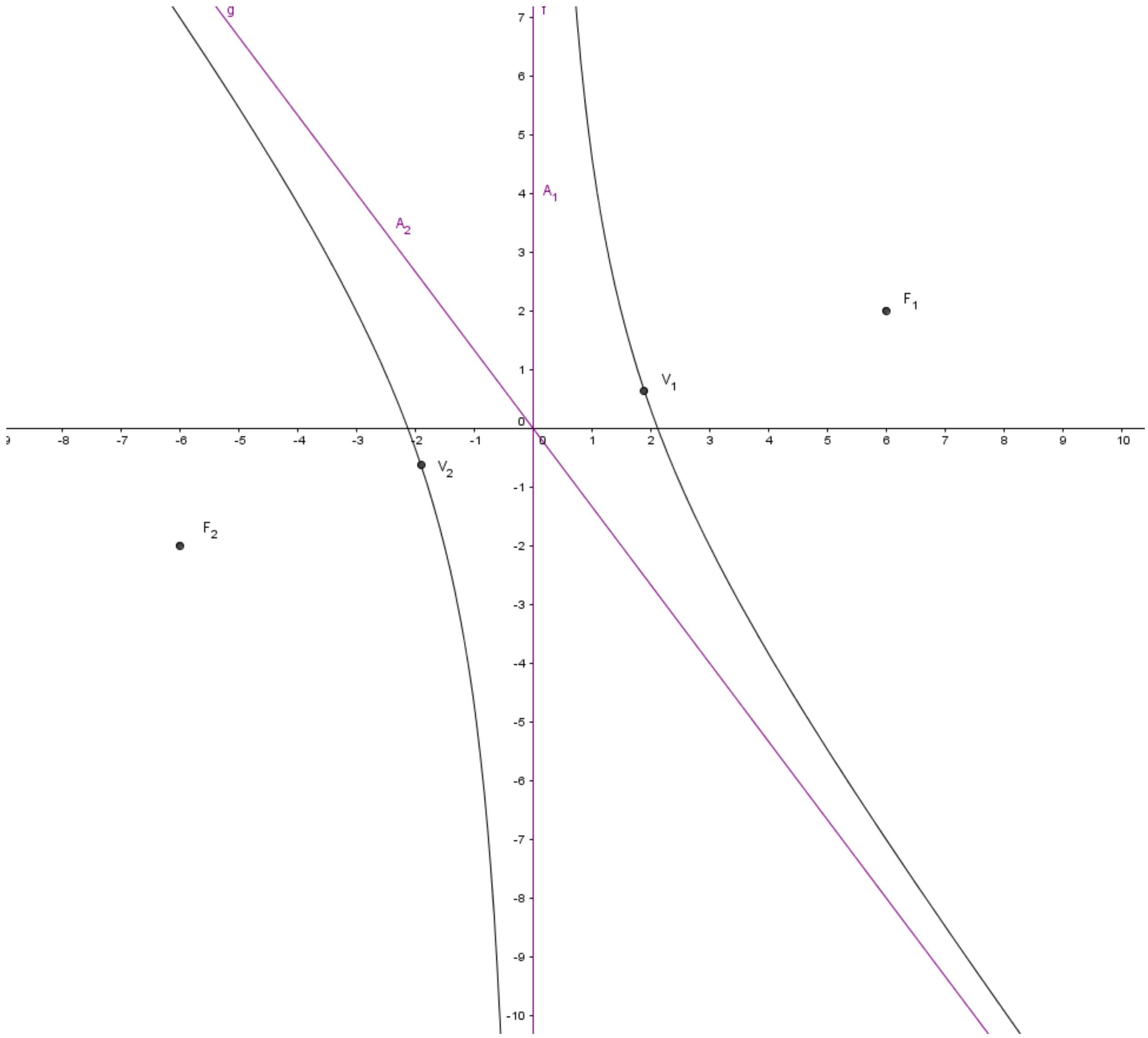
  $y = -\frac{6\sqrt{10}}{10}$

por lo tanto:

$$\boxed{V_2\left(-\frac{9\sqrt{10}}{5};\ -\frac{6\sqrt{10}}{10}\right)}$$

Hemos obtenido todos los datos:

	$x´y´$	xy
F_1	$(2\sqrt{10}; 0)$	$(6; 2)$
F_2	$(-2\sqrt{10}; 0)$	$(-6; 2))$
Asíntota $A_1)$	$y´ = 3x´$	$x = 0$
Asíntota $A_2)$	$y´ = -3x´$	$y = -\frac{4}{3}x$
e	$8/6$	
V_1	$(6; 0)$	$(\frac{9\sqrt{10}}{5}; \frac{6\sqrt{10}}{5})$
V_2	$(-6; 0)$	$(-\frac{9\sqrt{10}}{5}; -\frac{6\sqrt{10}}{5})$



g
f
A1
A2
F1
F2
V1
V2

6) Dada la ecuación $13x^2 + 10xy + 13y^2 - 62\sqrt{2}x - 46\sqrt{2}y + 98 = 0$**, identifica el lugar geométrico que representa e indica sus elementos geométricos característicos (en el sistema original). Realiza un esbozo de su gráfica.**

De la ecuación

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 - 62\sqrt{2}x - 46\sqrt{2}y + 98 = 0$$

vemos que $A = 13$, $B = 10$, $C = 13$, $D = -62\sqrt{2}$, $E = -46\sqrt{2}$, $F = 98$. En primer lugar notemos que $B^2 - 4AC = 10^2 - 4 \cdot 13 \cdot 13 = 100 - 676 = -576 < 0$ y entonces la curva puede ser una elipse, una circunferencia, un punto o bien no hay curva, como dice el Teorema. Calculemos el ángulo θ adecuado para eliminar el término xy. Como $A - C = 0$, se tendrá que

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

De aquí, $sen(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $cos(\theta) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Calculamos las fórmulas de la rotación:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')$$

Reemplazamos en la ecuación original,

$$13\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y')\Big]^2 + 10 \cdot \frac{2}{4}(x' - y') \cdot (x' + y') + 13\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y')\Big]^2 - 62 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') - 46 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') + 98 = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \frac{13}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) + 5(x'^2 - y'^2) + \frac{13}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) - 62x' + 62y' - 46x' - 46y' + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{13}{2}x'^2 - 13x'y' + \frac{13}{2}y'^2 + 5x'^2 - 5y'^2 + \frac{13}{2}x'^2 + 13x'y' + \frac{13}{2}y'^2 - 108x' + 16y' + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 18x'^2 + 8y'^2 - 108x' + 16y' + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 18(x'^2 - 6x') + 8(y'^2 + 2y') + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 18\Big[(x' - 3)^2 - 9\Big] + 8\Big[(y' + 1)^2 - 1\Big] + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 18(x' - 3)^2 + 8(y' + 1)^2 - 162 - 8 + 98 = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 18(x' - 3)^2 + 8(y' + 1)^2 = 72 \\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(x' - 3)^2}{4} + \frac{(y' + 1)^2}{9} = 1
\end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{cases} x'' &= x' - 3 \\ y'' &= y' + 1 \end{cases}$$

nos queda

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1$$

En el sistema $Ox''y''$, esta última ecuación representa una elipse. Sus elementos característicos son: $a'' = 3$, $b'' = 2$, $c'' = \sqrt{a''^2 - b''^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$. El eje mayor es el eje y'' (de ecuación $x'' = 0$). El eje menor es el eje x'' (de ecuación $y'' = 0$). Los focos son $F_1''(0, \sqrt{5})$, $F_2''(0, -\sqrt{5})$ y los vértices $V_1''(0, 3)$ y $V_2''(0, -3)$

Pasando al sistema $Ox'y'$, nos queda que el eje mayor es (siendo $x'' = 0$) $x' = 3$ y el eje menor (siendo $y'' = 0$)

$y' = -1$. Los focos son $F_1'(3, \sqrt{5}-1)$, $F_2'(3, -\sqrt{5}-1)$ y los vértices $V_1'(3,2)$ y $V_2'(3,-4)$.

Pasando al sistema Oxy y usando el hecho que:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

$$y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$$

obtenemos para el eje mayor

$$\begin{aligned} x' = 3 \Longrightarrow 3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}x &= \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{3\cdot 2}{\sqrt{2}} - x &= y \\ \frac{6}{\sqrt{2}} - x &= y \end{aligned}$$

Razonando análogamente obtenemos para el eje menor

$$\begin{aligned} y' = 1 \Longrightarrow -1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + x &= y \end{aligned}$$

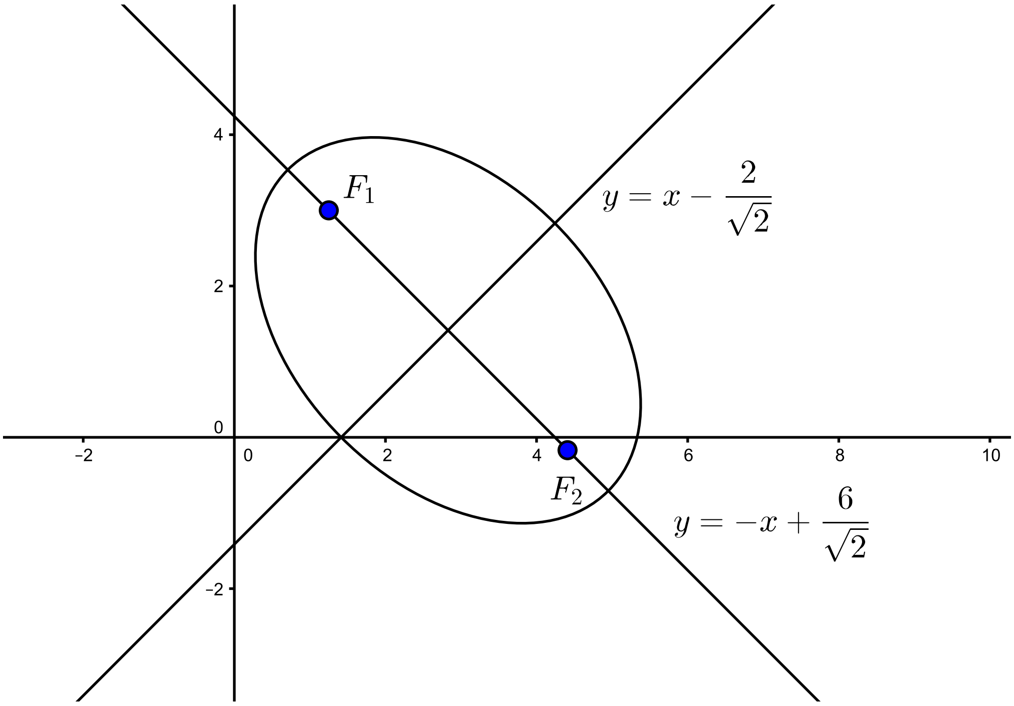
Focos:

$$\begin{aligned} F_1'(3, \sqrt{5}-1) &\longrightarrow F_1\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sqrt{5}-1), \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-1)\Big) \\ &\longrightarrow F_1\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{5}+1), \frac{\sqrt{2}}{2}(3+\sqrt{5}-1)\Big) \\ &\longrightarrow F_1\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(4-\sqrt{5}), \frac{\sqrt{2}}{2}(2+\sqrt{5})\Big) \end{aligned}$$

De manera similar llegamos a que

$$F_2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}(4+\sqrt{5}), \frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{5})\Big)$$

Los vértices quedan: $V_1\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\Big)$ y $V_2\Big(\frac{7\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$



F_1
F_2
$y = x - \frac{2}{\sqrt{2}}$
$y = -x + \frac{6}{\sqrt{2}}$
4
2
0
-2
-2
0
2
4
6
8
10

<u>Ejercicio 7:</u> **Dada la parábola $y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$ haga una traslación conveniente para escribirla de la forma reducida $y'^2 = kx'$. Indique sus elementos principales.**

Completemos cuadrados en y:

$$y^2 - 2y = -2x + 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y-1)^2 - 1 = -2x + 1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y-1)^2 = -2x + 2 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (y-1)^2 = -2(x-1)$$

Luego si consideramos $y' = y - 1$ y $x' = x - 1$ (*) resulta:

$$y'^2 = -2x'$$

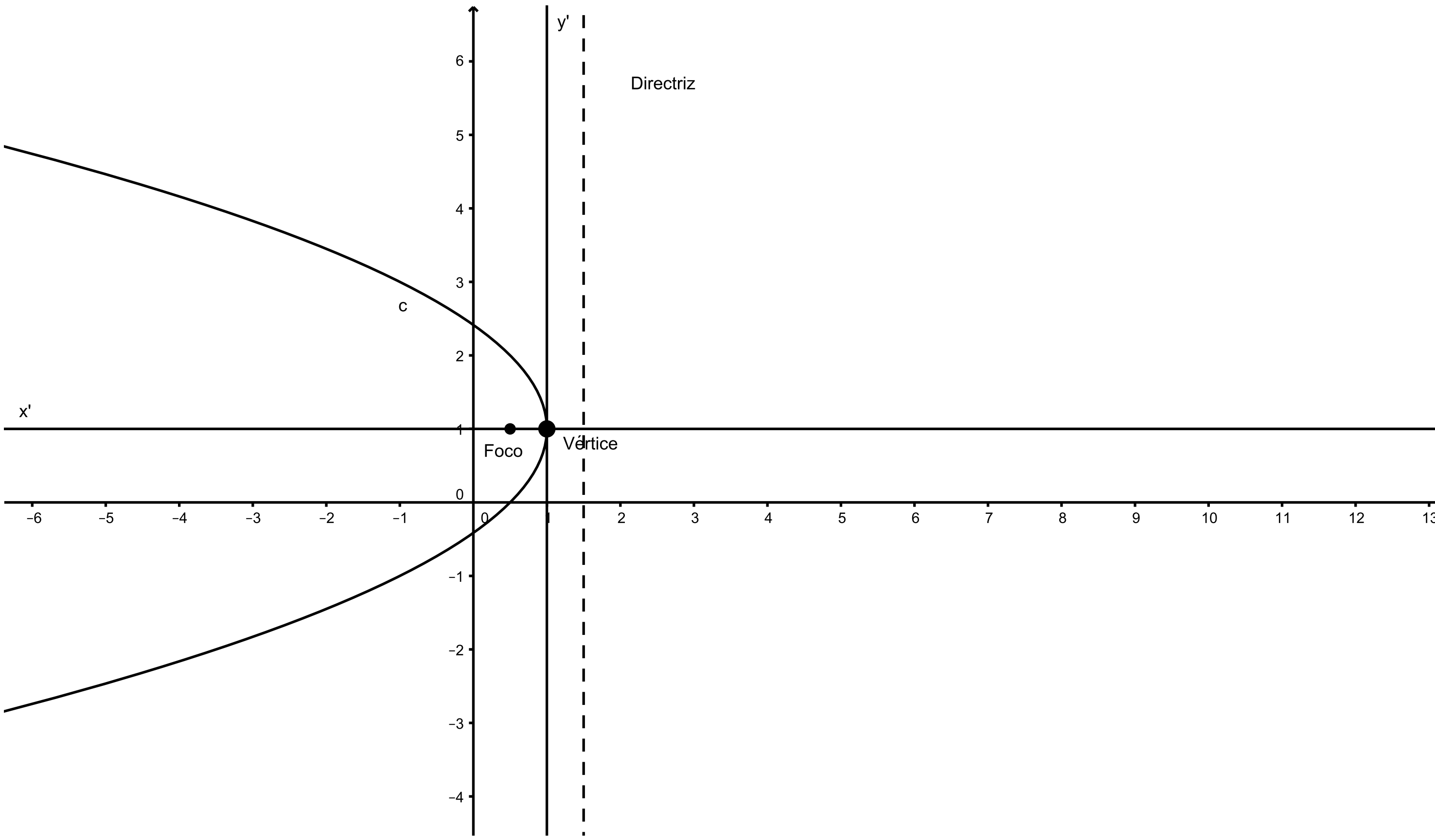
que es la forma reducida ($k = -2$).

Indiquemos sus elementos principales en el sistema $(ox'y')$:

- El vértice es $(0,0)$
- Como $2p = 2 \Longrightarrow p = 1$ luego el foco es $(-\frac{p}{2}, 0) = (-\frac{1}{2}, 0)$
- La directriz es la recta $x' = \frac{p}{2} = \frac{1}{2}$
- El eje es la recta $y' = 0$

Indiquemos sus elementos principales en el sistema original (oxy): De (*) $y = y' + 1$ y $x = x' + 1$

- El vértice es $(0+1, 0+1) = (1,1)$
- El foco es $(-\frac{1}{2} + 1, 0 + 1) = (\frac{1}{2}, 1)$
- La directriz es la recta $x - 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{3}{2}$
- El eje es la recta $y - 1 = 0 \Longrightarrow y = 1$


y'
Directriz
c
x'
Foco
Vértice

Ejercicio 8: Por una rotación de 45^o de los ejes coordenados, cierta ecuación se transforma en $4x'^2 - 9y'^2 = 36$. Hallar la ecuación original.

Las ecuaciones que relacionan los sistemas $x'y'$ con xy son:

$$x' = xcos45 + ysen45 = x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$y' = -xsen45 + ycos45 = -x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Hallemos la ecuación en el sistema original (oxy):

$4x'^2 - 9y'^2 - 36 = 0$

$\Longrightarrow 4(x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 9(-x\frac{\sqrt{2}}{2} + y\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 36 = 0$

$\Longrightarrow 4(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}) - 9(\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}) - 36 = 0$

$\Longrightarrow 2x^2 + 4xy + 2y^2 - \frac{9}{2}x^2 + 9xy - \frac{9}{2}y^2 - 36 = 0$

$\Longrightarrow -\frac{5}{2}x^2 + 13xy - \frac{5}{2}y^4 - 36 = 0$

Luego la ecuación original es: $-\frac{5}{2}x^2 + 13xy - \frac{5}{2}y^4 - 36 = 0$

*9)*Por una traslación de los ejes coordenados al nuevo origen (3,3) y despues una rotación en un ángulo de 30º, las coordenadas de cierto punto P se transforman en (7,6).
Halle las coordenadas del punto P en el sistema original.

Desarrollo:
Recordemos las ecuaciones de la traslación:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases}$$

donde(h, k) son las coordenadas del nuevo origen.
Por lo tanto: $(h, k) = (3,3)$ que llamaremos o'

Sabemos que los ejes giran un ángulo $\theta = 30º$ en torno de su origen $o'(3,3)$.
Las coordenadas del punto P antes de rotar son (x, y)y luego de rotar $(x', y') = (7,6)$.

Las ecuaciones de de transformación del sistema original al nuevo son:

$$\begin{cases} x = x'cos\theta - y'sen\theta \\ y = x'sen\theta + y'cos\theta \end{cases}$$

Luego, reemplazamos θ y (x', y')por 30º y $(7,6)$ respectivamente en las ecuaciones anteriores:

$$\begin{cases} x = 7cos30° - 6sen30° \\ y = 7sen\theta + 6cos30° \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7.\frac{\sqrt{3}}{2} - 6.\frac{1}{2} \\ y = 7.\frac{1}{2} + 6.\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{7\sqrt{3}}{2} - 3 \\ y = \frac{7}{2} + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Por lo tanto las coordenadas del punto P en el sistema original son:

$$P(\frac{7\sqrt{3}}{2} - 3; \frac{7}{2} + 3\sqrt{3})$$

10)Estudie y grafique el lugar geométrico definido por la siguiente ecuación:
$x^2 + 6xy + 9y^2 - 1 = 0$

La ecuación de segundo grado tiene coeficientes
$A = 1, B = 6, C = 9, D = 0, E = 0, F = -1$
Del teorema 3 de la pág. 285
$B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0$, es decir que la ecuación representa una parábola o dos rectas paralelas.
Usamos que $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$, para hallar $\cos\theta$ y $\sin\theta$

$$\cot 2\theta = \frac{1-9}{6} = -\frac{4}{3}$$

Es decir que el ángulo 2θ se encuentra en el segundo cuadrante y además $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$ Usando las fórmulas del ángulo mitad tenemos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

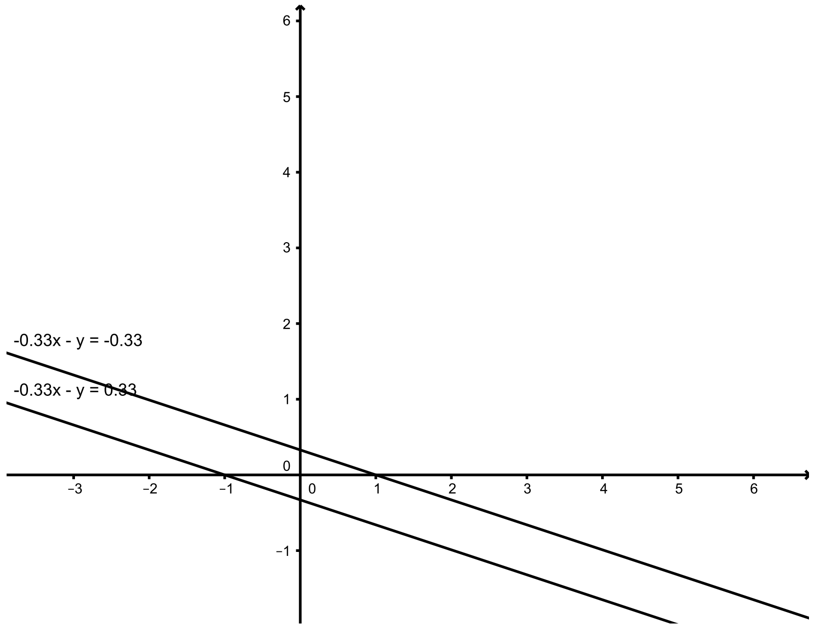
Entonces la transformación nos queda

$$\begin{cases} x = x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}} \\ y = x'\frac{3}{\sqrt{10}} + y'\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación original y trabajamos algebraicamente para eliminar el término xy

$$\left(x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 + 6\left(x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(x'\frac{3}{\sqrt{10}} + y'\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 9\left(x'\frac{3}{\sqrt{10}} + y'\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - 1 = 0$$
$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 (x' - 3y')^2 + 6\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(x' - 3y')\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(3x' + y') + 9\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(3x' + y')^2 - 1 = 0$$
$$\frac{1}{10}(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) + 6\frac{1}{10}(3x'^2 - 9x'y' + x'y' - 3y'^2) + 9\frac{1}{10}(9x'^2 + 6x'y' + y'^2) - 1 = 0$$
$$\frac{1}{10}(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) + \frac{3}{5}(3x'^2 - 8x'y' - 3y'^2) + \frac{9}{10}(9x'^2 + 6x'y' + y'^2) - 1 = 0$$
$$x'^2\left(\frac{1}{10} + 3\frac{3}{5} + 9\frac{9}{10}\right) + x'y'\left(-\frac{6}{10} - 8\frac{3}{5} + 6\frac{9}{10}\right) + y'^2\left(\frac{9}{10} - 3\frac{3}{5} + \frac{9}{10}\right) - 1 = 0$$
$$100x'^2 = 1$$
$$x'^2 = \frac{1}{100}$$
$$x' = \pm\frac{1}{10}$$

Es decir que la ecuación de segundo grado representa dos rectas paralelas.



-0.33x - y = -0.33
-0.33x - y = 0.33

11)Estudie y grafique el lugar geométrico definido por las siguiente ecuación:
$x^2 + xy + y^2 - 3$

La ecuación de segundo grado tiene coeficientes
$A = 1, B = 1, C = 1, D = 0, E = 0, F = -3$

Y como, $B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3$, la ecuación representa una elipse, una circunferencia o un punto.
Buscamos el ángulo usando $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$
Y resulta

$$A - C = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Entonces la transformación nos queda

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} - y' \sin \frac{\pi}{4} \\ y = x' \sin \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Y usando $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ la transformación será
$\begin{cases} x = x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$
Ahora reemplazamos en la ecuación original y trabajamos algebraicamente para eliminar el término xy

$$\left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3 = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' - y')^2 + \left(x' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (x' + y')^2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}(x' - y')^2 + \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}(x' + y')^2 - 3 = 0$$

$$\frac{1}{2}x'^2 - x'y' + \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + \frac{1}{2}x'^2 + x'y' + \frac{1}{2}y'^2 - 3 = 0$$

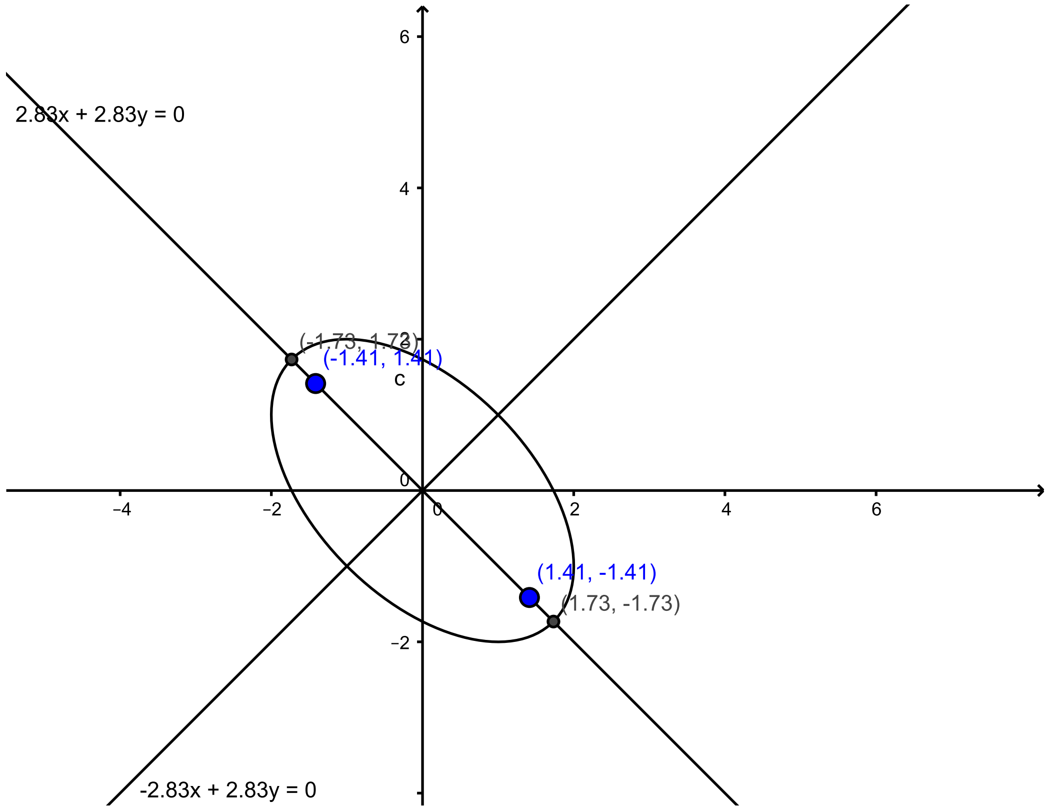
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) x'^2 + (-1 + 1)x'y' + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) y'^2 - 3 = 0$$

$$\frac{3}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 3$$

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

Y llegamos a una elipse donde $a^2 = 6, b^2 = 2 \Rightarrow c^2 = 4$.

Es decir que la elipse tiene como eje al eje y', los focos están a distancia 2 del origen y los vértices están a distancia $\sqrt{6}$ del origen.



2.83x + 2.83y = 0
-2.83x + 2.83y = 0
(-1.73, 1.73)
(-1.41, 1.41)
c
(1.41, -1.41)
(1.73, -1.73)

12)Estudie y grafique el lugar geométrico definido por las siguiente ecuación:
$4x^2 - 3xy - 18 = 0$

La ecuación de segundo grado tiene coeficientes
$A = 4, B = -3, C = 0, D = 0, E = 0, F = -18$
Luego,$B^2 - 4 \cdot A \cdot C = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot 0 = 9$, es decir que la ecuación representa una hipérbola o dos rectas secantes.
Usamos que $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$, para hallar $\cos\theta$ y $\sin\theta$

$$\cot 2\theta = \frac{1-9}{6} = -\frac{4}{3}$$

Es decir que el ángulo 2θ se encuentra en el segundo cuadrante y además $\cos 2\theta = -\frac{4}{5}$ Usando las fórmulas del ángulo mitad tenemos

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

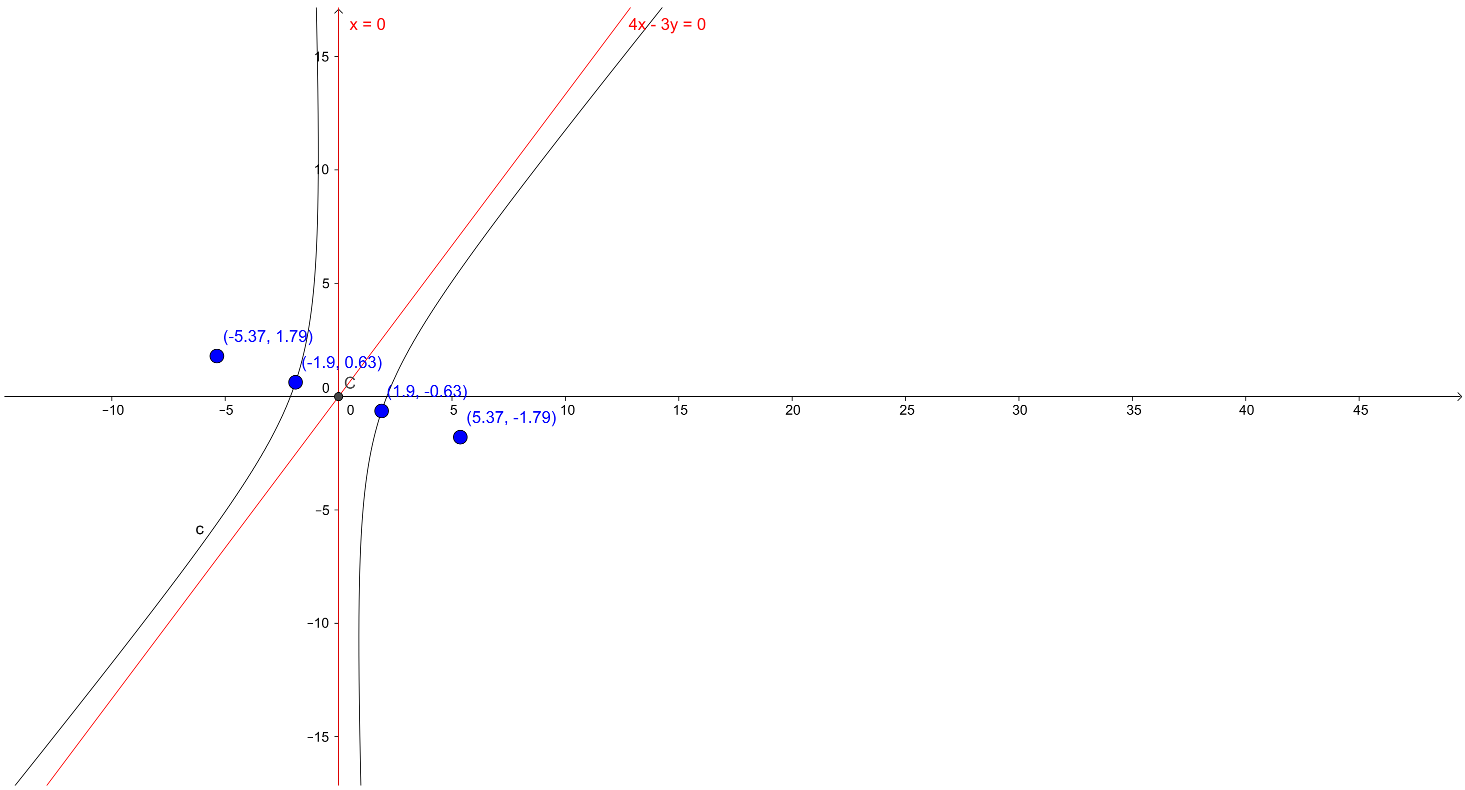
Entonces la transformación nos queda

$$\begin{cases} x = x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}} \\ y = x'\frac{3}{\sqrt{10}} + y'\frac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación original y trabajamos algebraicamente para eliminar el término xy

$$4\left(x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 - 3\left(x'\frac{1}{\sqrt{10}} - y'\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(x'\frac{3}{\sqrt{10}} + y'\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 18 = 0$$
$$4\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2(x' - 3y')^2 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(x' - 3y')\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)(3x' + y') - 18 = 0$$
$$\frac{4}{10}(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) - \frac{3}{10}(3x'^2 - 9x'y' + x'y' - 3y'^2) - 18 = 0$$
$$\frac{2}{5}(x'^2 - 6x'y' + 9y'^2) - \frac{3}{10}(3x'^2 - 8x'y' - 3y'^2) - 18 = 0$$
$$x'^2\left(\frac{2}{5} - 3\frac{3}{10}\right) + x'y'\left(-6\frac{2}{5} + 8\frac{3}{10}\right) + y'^2\left(9\frac{2}{5} + 3\frac{3}{10}\right) - 18 = 0$$
$$-\frac{1}{2}x'^2 + \frac{9}{5}y'^2 = 18$$
$$\frac{y'^2}{10} - \frac{x'^2}{36} = 1$$

Es decir que nuestra ecuación representa una hipérbola con eje en el eje y', focos a distancia $4\sqrt{2}$ del origen y vértices a distancia 2 del origen.


x = 0
4x - 3y = 0
(-5.37, 1.79)
(-1.9, 0.63)
(1.9, -0.63)
(5.37, -1.79)
C
c