

Álgebra y Geometría Analítica

Práctica complementaria resuelta: Elipse e Hipérbola (2016)

1. A partir de la siguiente ecuación de una elipse, $\epsilon) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ determine las coordenadas de los focos, vértices y su excentricidad.
2. Determine la ecuación de una elipse que tiene por centro al origen de coordenadas, sus vértices son $(0; \pm 3)$ y su excentricidad es $\sqrt{\frac{8}{9}}$. Grafica el lugar geométrico correspondiente a la ecuación hallada.
3. Grafica el lugar geométrico del plano cuyos puntos de coordenadas (x, y) verifican: $|(x - 3, y)| + |(x + 3, y)| = 8$
4. Escribe la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ sabiendo que la misma está centrada en el origen.
5. Halla la excentricidad de la elipse cuyos focos son los puntos $(0, \pm\sqrt{12})$ y $(1, \sqrt{12})$ es un punto de paso.
6. Determina la ecuación de una elipse cuya distancia focal es $8\sqrt{6}$ y el área del rectángulo construido sobre sus ejes es 80.
7. La Tierra se mueve en órbita elíptica alrededor del Sol, y éste está en uno de los focos de la elipse. Las distancias mínima y máxima de la Tierra al Sol son 91.446.000 y 94.560.000 millas respectivamente.
 - a. ¿Cuál es la excentricidad de la elipse?
 - b. ¿Qué longitudes tienen el eje mayor y el eje menor?
8. La órbita de la Luna es una trayectoria elíptica. La distancia (centro a centro) de la Luna a la Tierra varía desde un mínimo de 221.463 millas hasta un máximo de 232.710 millas. Calcular la excentricidad de la órbita lunar y las longitudes de los ejes mayor y menor.
9. Escribe la ecuación de la curva tal que la diferencia de las distancias de sus puntos a los puntos $(-2; 0)$ y $(2; 0)$ es constante e igual a 2. Esboza la gráfica de la misma.

Álgebra y Geometría Analítica

10. Halla las coordenadas de los focos, vértices y las ecuaciones de las asíntotas de la siguiente hipérbola: $H) 2x^2 - 3y^2 + 6 = 0$
11. Encuentra la ecuación de una hipérbola sabiendo que pasa por el punto $(5; \sqrt{32})$ y una de sus asíntotas tiene como ecuación $y = \frac{4}{7}x$
12. Halla la ecuación de una hipérbola centrada en el origen de coordenadas conociendo que su distancia focal es 30 y la longitud de su eje transversal es 18. ¿Cuál es la longitud del eje conjugado?
13. Dada la ecuación $5x^2 - 4y^2 + 13 = 0$, reconoce el lugar geométrico que representa y determina sus elementos característicos.
14. Determine las ecuaciones paramétricas de la elipse que tiene como focos a los vértices de la hipérbola $9y^2 - 16x^2 = 1296$ y posee excentricidad $e = 0.5$
15. Halle la intersección de la recta $-\sqrt{7}x + 3y = 0$ con la hipérbola que tiene un foco en $(5,0)$ y una de sus asíntotas es $y = -\frac{4}{3}x$. Grafique la situación planteada.
16. Halla la ecuación de una hipérbola cuyas asíntotas son las bisectrices de los cuatro cuadrantes y la longitud de su eje transversal es la misma que la longitud del semieje mayor de la elipse $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

Álgebra y Geometría Analítica

Soluciones

1. Como lo explicita el enunciado, la ecuación de la elipse a tratar es $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

En la misma se observa que $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$

Como $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = 9$

Las coordenadas genéricas de los focos de una elipse con eje focal sobre el eje x son

$F_1(c, 0)$ y $F_2(-c, 0)$, con lo cual:

$F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$

Los vértices tienen coordenadas de la forma $(a, 0)$, $(-a, 0)$, con lo cual, según la información obtenida a partir de la ecuación de la elipse:

$V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$

Concluimos que el eje mayor está sobre el eje x y el eje menor sobre el eje y.

Finalmente, la excentricidad la calculamos como:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$$

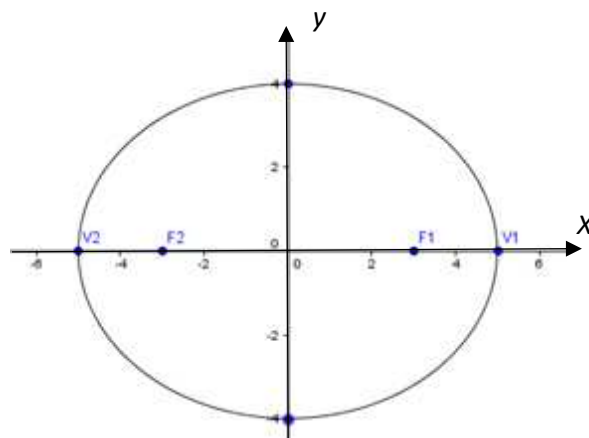


Figura 1: "Elipse correspondiente al ejercicio 1"

En la figura 1, se observa la elipse con sus elementos característicos.

2. En este problema, sabemos que debido a que sus vértices son $V_1(0, 3)$, $V_2(0, -3)$, el eje focal está sobre el eje y, se tiene:

$$a = 3$$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{9}}$

Con lo cual se obtiene: $c = \sqrt{\frac{8}{9}} * 3$

Además, ya que $b^2 = a^2 - c^2$, $b^2 = 1$

Se determina entonces la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$$

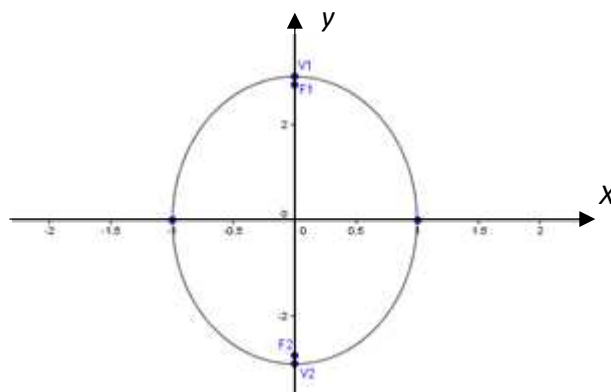


Figura 2: "Elipse correspondiente al ejercicio 2"

En la figura 2, se observa la elipse representada por la ecuación anterior.

Álgebra y Geometría Analítica

3. Observando la expresión de la condición planteada, observamos que describe la suma de los módulos de dos vectores. Estos dos vectores tienen por componentes $(x-3; y)$ y $(x+3; y)$ por lo que se puede interpretar que estos vectores tienen como extremos a un punto común de coordenadas genéricas (x, y) y de manera individual a los puntos $(3; 0)$ y $(-3; 0)$. Además no debemos olvidar que el módulo de un vector representa también la distancia entre sus extremos. Por lo tanto, la condición que impone el enunciado se interpreta como que la suma de las distancias del punto $(x; y)$ a los puntos $(\pm 3; 0)$ es constante e igual a 8. Ésta no es más que la condición que deben cumplir los puntos del plano para pertenecer a una elipse con focos en $(\pm 3; 0)$ y longitud del semieje mayor igual a 8.

Habiendo interpretado el enunciado, ya sabemos que:

$$F_1(3,0) \text{ y } F_2(-3,0) \text{ y además } 2a = 8$$

Con lo cual, $a = 4$ y $c = 3$. Asimismo, como los focos yacen sobre el eje x , el eje mayor está contenido en el mismo.

$$\text{Como } b^2 = a^2 - c^2 \text{ resulta ser, } b^2 = 7$$

Entonces, el lugar geométrico que cumple con la condición dada, es una elipse cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

Y su gráfica se representa en la figura 3.

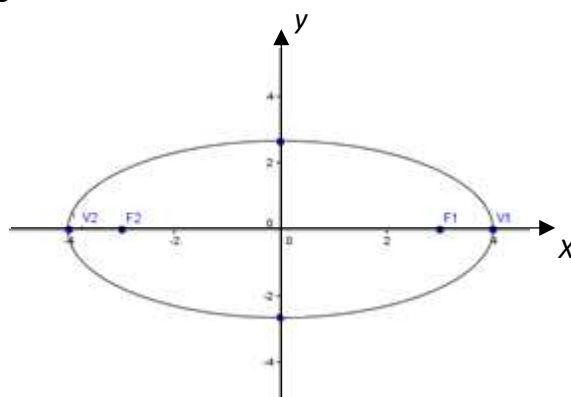


Figura 3: "Elipse correspondiente al ejercicio 3"

4. En este caso, los datos son las coordenadas de dos puntos de paso. En un caso general habría más de una solución posible, sin embargo se aclara que la elipse debe estar centrada en el origen, luego la solución es única y es sencillo probar que tampoco depende de la posición del eje focal. Por lo tanto, sin pérdida de la generalidad suponemos el eje focal coincidente con el eje x .

Sabemos que los puntos $P_1\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $P_2\left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ pertenecen a la elipse, por lo tanto deben verificar su ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Álgebra y Geometría Analítica

Entonces se debe cumplir:

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Al resolver este sistema se obtiene:

$$a^2 = 4 \quad \text{y} \quad b^2 = 1$$

Como en la elipse se verifica: $b^2 = a^2 - c^2$ resulta ser,
 $c^2 = 3$

Con lo cual los vértices de la elipse son $(\pm 2, 0)$ y los focos $(\pm\sqrt{3}, 0)$

En la figura 4 se grafica los resultados obtenidos.

Quedando así la ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

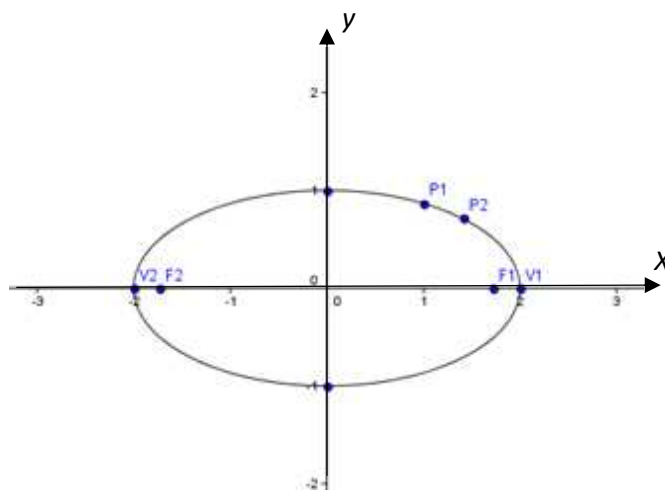


Figura 4: "Elipse correspondiente al ejercicio 4"

5. En este problema, se nos solicita hallar la excentricidad de una elipse, por lo que según la definición de excentricidad debemos calcular los valores de "a" y "c".

Para esto, conocemos que los focos se encuentran en $(0, \pm\sqrt{12})$ de modo que ya podemos concluir que $c = \sqrt{12}$.

Además, sabemos que $(1, \sqrt{12})$ es un punto de paso de la elipse, por lo que debe verificar su ecuación, que como el eje focal es el eje y, es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Por otro lado, utilizamos la relación $b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 12$

Álgebra y Geometría Analítica

Utilizando el dato del punto de paso:

$$\frac{1^2}{b^2} + \frac{(\sqrt{12})^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{1}{a^2 - 12} + \frac{12}{a^2} = 1$$

Resolviendo, obtenemos:

$$a^4 - 25a^2 + 12^2 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación bicuadrática son $a^2 = 9 \wedge a^2 = 16$. Con lo cual, obtenemos dos valores de a : $a = 4$ y $a = 3$

Pero como se sabe, $c < a$, por lo que se descarta una de las opciones, resultando $a = 4$

En conclusión:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

6. En general, sabemos que la distancia focal es $2c$ y en este caso es igual a $8\sqrt{6}$, en conclusión $c = 4\sqrt{6}$

Debido a que el área del rectángulo construido con los ejes de la elipse es 80, podemos inferir que el producto entre la longitud del eje mayor y la del eje menor es 80, es decir:

$$2a \times 2b = 80$$

Siendo $2a$ la longitud del eje mayor y $2b$ la longitud del eje menor.

Entonces se tiene:

$$a = \frac{20}{b}$$

Sabiendo además que $b^2 = a^2 - c^2$; $b^2 = \left(\frac{20}{b}\right)^2 - (4\sqrt{6})^2$

Resolviendo, se llega a la siguiente ecuación:

$$b^4 + 96b^2 - 400 = 0$$

Que tiene la forma de una ecuación bicuadrática con solución $b^2 = 4$ o $b^2 = -100$. En este problema, b es un número real, de modo que consideramos válido el caso en que $b^2 = 4$.

Álgebra y Geometría Analítica

Así, $b = 2 \Rightarrow a = \frac{20}{2} = 10$

Finalmente, la solución no será única, sino que serán dos elipses descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\epsilon_1) \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad y \quad \epsilon_2) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Ambas elipses se grafican en la figura 5a y 5b respectivamente

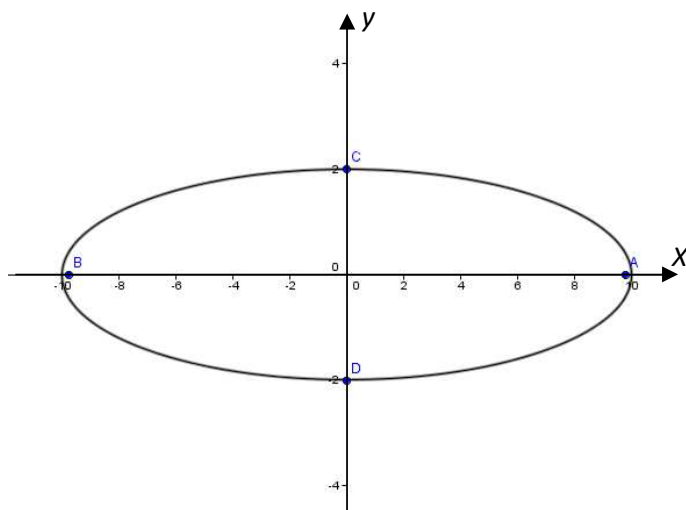


Figura 5a: " ϵ_1 , correspondiente al ejercicio 6"

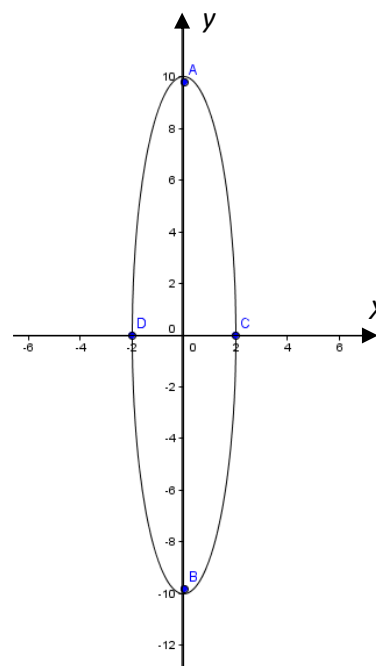


Figura 5b: " ϵ_2 , correspondiente al ejercicio 6"

7. La distancia mínima es 91.446.000 millas y la máxima es 94.560.000 millas. Sea entonces,

$$d_1 = 91446000$$

$$d_2 = 94560000$$

De la definición de elipse, tenemos que:

$$2a = d_1 + d_2 = 186006000$$

Si el centro está en el $O(0,0)$, los vértices de la elipse son los puntos de la forma $(\pm a, 0)$, entonces:

$$V_1(-93003000, 0) \quad y \quad V_2(93003000, 0)$$

Con $a = 93003000$

Álgebra y Geometría Analítica

Los focos $F_1(-c, 0)$ $F_2(c, 0)$ son tales que $c = a - d_1$, entonces:

$$c = 93003000 - 91446000 = 1557000$$

$$\therefore F_1(-1557000, 0) F_2(1557000, 0)$$

Ahora, para obtener b , utilizamos la relación $b^2 = a^2 - c^2$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{93003000^2 - 1557000^2} \\ = 92989965.91$$

$$\therefore e) \frac{x^2}{93003000^2} + \frac{y^2}{92989965.91^2} = 1$$

Para calcular la excentricidad de la elipse, utilizamos su definición:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1557000}{93003000} \cong 0.0167$$

La longitud del eje menor es por definición la cantidad $2a$, que ya hemos calculado y es

$$2a = 186006000$$

La longitud del eje menor es por definición la cantidad $2b$, que ya hemos calculado y es

$$2b = 185979931.8$$

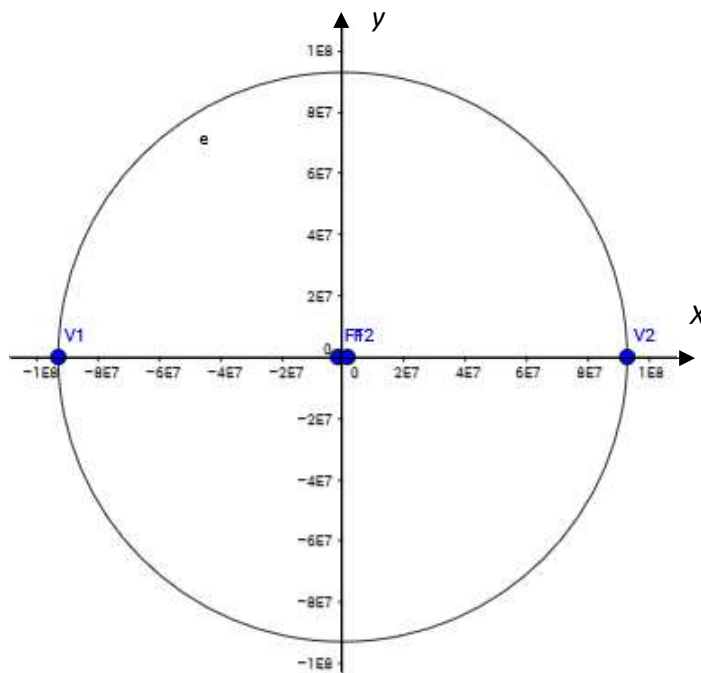


Figura 6: "Elipse correspondiente al ejercicio 7"

En la figura 6, puede observarse la elipse que caracteriza la órbita terrestre. Nótese que el hecho de que los focos estén tan próximos con respecto a la distancia entre vértices hace que la elipse luzca semejante a una circunferencia.

8. Como en el ejercicio anterior, podemos considerar que la Tierra se encuentra en uno de los focos, F_1 , y la luna orbitando a su alrededor. En este caso, la distancia mínima es 221.463 millas y la máxima es 232.710 millas. Entonces,

$$d_1 = 221463$$

$$d_2 = 232710$$

De la definición de elipse, tenemos que:

$$2a = d_1 + d_2 = 454173$$

Si el centro está en $O(0,0)$, los vértices de la elipse son los puntos de la forma $(\pm a, 0)$, entonces:

$$V_1\left(-\frac{454173}{2}, 0\right) \text{ y } V_2\left(\frac{454173}{2}, 0\right)$$

Álgebra y Geometría Analítica

Los focos $F_1(-c, 0)$ $F_2(c, 0)$ son tales que $c = a - d_1$, entonces:

$$c = \frac{454173}{2} - 221463 = \frac{11247}{2}$$

$$\therefore F_1\left(-\frac{11247}{2}, 0\right) F_2\left(\frac{11247}{2}, 0\right)$$

Ahora, para obtener b utilizamos la relación $b^2 = a^2 - c^2$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{\left(\frac{454173}{2}\right)^2 - \left(\frac{11247}{2}\right)^2} = 227016.86$$

$$\therefore e) \frac{x^2}{227086.5^2} + \frac{y^2}{227016.86^2} = 1$$

Para calcular la excentricidad de la elipse, utilizamos su definición:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\frac{11247}{2}}{\frac{454173}{2}} \cong 0.025$$

La longitud del eje menor es por definición la cantidad $2a$, que ya hemos calculado y es

$$2a = 454173$$

La longitud del eje menor es por definición la cantidad $2b$, que ya hemos calculado y es

$$2b = 454033.72$$

9. Si sabemos que la diferencia entre las distancias de los puntos genéricos $P(x, y)$ a los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$ es constante e igual a 2, podemos escribir a esta condición como:

$$\begin{aligned} |d(P, A) - d(P, B)| &= 2 \\ \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} &= \pm 2 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \pm 4\sqrt{(x+2)^2 + y^2} + (x+2)^2 + y^2 \\ \left(\frac{-8x-4}{4}\right)^2 &= (x+2)^2 + y^2 \\ 4x^2 + 4x + 1 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 \\ 3x^2 - y^2 &= 3 \\ x^2 - \frac{y^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

Puede advertirse que ésta es la ecuación de una hipérbola con eje focal coincidente con el eje x .

Se puede observar también que este resultado era de esperar ya que la condición impuesta por el enunciado es justamente la definición de una hipérbola con focos en los puntos $(\pm 2, 0)$ y longitud del eje transversal igual a 2.

Álgebra y Geometría Analítica

10. Tenemos la ecuación de la hipérbola expresada como

$$H) 2x^2 - 3y^2 + 6 = 0$$

Luego,

$$H) \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 1$$

De la ecuación anterior, obtenemos:

$$a = \sqrt{2}$$

$$b = \sqrt{3}$$

Mediante la relación $b^2 = c^2 - a^2$ calculamos c de la siguiente manera:

$$c = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{3 + 2} = \sqrt{5}$$

De la definición de excentricidad surge:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Los focos $F_1(0, c)$ $F_2(0, -c)$ son:

$$F_1(0, \sqrt{5}) \text{ y } F_2(0, -\sqrt{5})$$

Los vértices de la hipérbola son los puntos de la forma $(0; \pm a)$, luego:

$$V_1(0, \sqrt{2}) \text{ y } V_2(0, -\sqrt{2})$$

Las asíntotas son las rectas de ecuación

$y = \pm \frac{a}{b}x$, para esta posición de la hipérbola, como se ve en la figura 8.

$$\therefore r_1) y = \sqrt{\frac{2}{3}} x$$

$$\therefore r_2) y = -\sqrt{\frac{2}{3}} x$$

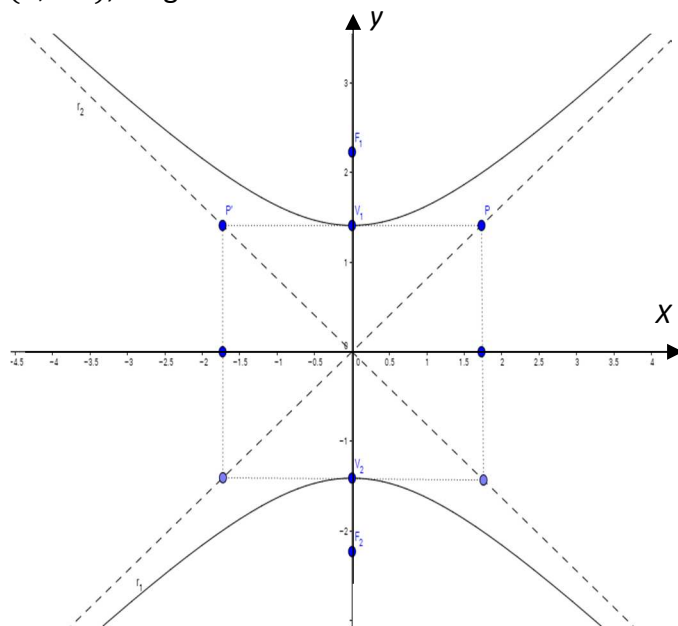


Figura 8: "Hipérbola correspondiente al ejercicio 10"

Álgebra y Geometría Analítica

11. Buscamos la ecuación de una hipérbola que contiene a $A(5, \sqrt{32})$ y tiene como asíntota a la recta $r_1) y = \frac{4}{7}x$

Sabemos que la recta $r_2) y = -\frac{4}{7}x$ también es asíntota.

En la figura 9 se puede observar que dadas las rectas asíntotas y la posición del punto de paso podemos deducir que la posición de la hipérbola va a ser con el eje focal en el eje y .

Sea entonces la ecuación buscada de la forma:

$$H) \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Vale que $a = \frac{4}{7}b$, ya que el punto $(b, a) \in r_1$:

$$\begin{aligned} \frac{32}{a^2} - \frac{5^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{32}{\frac{16}{49}b^2} - \frac{5^2}{b^2} = 1 \Rightarrow 98 - 25 = \\ &= b^2 = 73 \Rightarrow a^2 = \frac{1168}{49} \end{aligned}$$

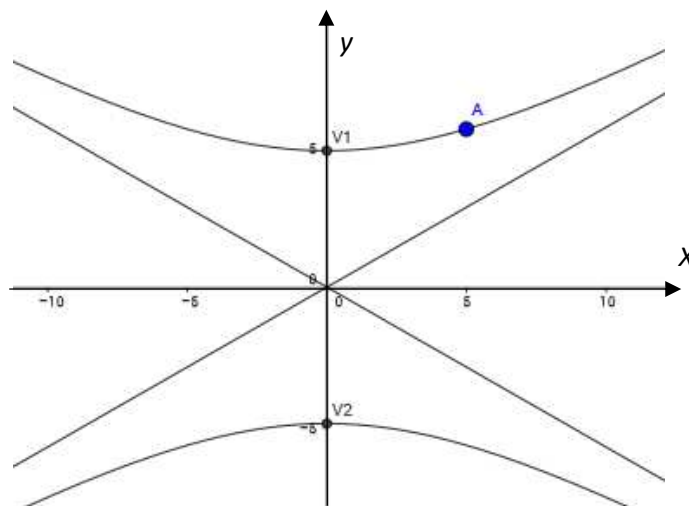


Figura 9: "Hipérbola correspondiente al ejercicio 11"

En conclusión,

$$H) \frac{y^2}{1168/49} - \frac{x^2}{73} = 1$$

12. En este ejercicio, se nos plantea que la distancia focal es $d = 30$, es decir, que la distancia entre los focos es $d = 30$, la cual es $2c$, por lo tanto, $c = 15$.

Por otro lado, la distancia entre vértices (longitud del eje transverso) es $l = 18$, que a su vez es $2a$, por lo tanto $a = 9$

De la relación $b^2 = c^2 - a^2$:

$$b^2 = 144$$

Ya conocidos los valores de a^2 y b^2 podríamos escribir la ecuación de la hipérbola solicitada. Sin embargo, desconocemos si la hipérbola posee como eje conjugado al eje x o al eje y , por lo tanto, existirán dos soluciones.

- Eje conjugado coincidente con el eje y :

$$H) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow H) \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$$

Álgebra y Geometría Analítica

- Eje conjugado coincidente con el eje x:

$$H) \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow H) \frac{y^2}{81} - \frac{x^2}{144} = 1$$

En las figuras 10a y 10b se observan respectivamente los resultados obtenidos.

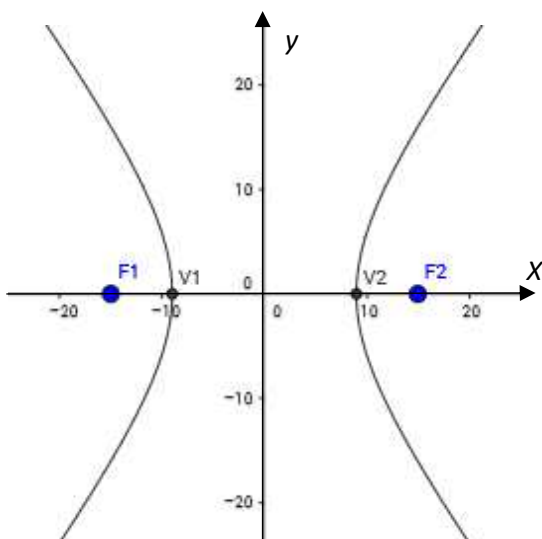


Figura 10a: "Hipérbola correspondiente al ejercicio 12
Eje conjugado coincidente con el eje y"

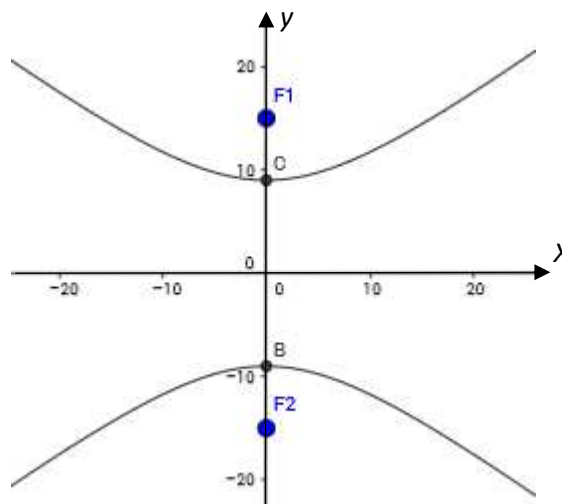


Figura 10b: "Hipérbola correspondiente al ejercicio 12
Eje conjugado coincidente con el eje x"

13. Para reconocer el lugar geométrico que representa, vamos a llevar la ecuación a una forma conocida:

$$5x^2 - 4y^2 + 13 = 0$$

$$5x^2 - 4y^2 = -13$$

$$\frac{5x^2}{-13} - \frac{4y^2}{-13} = 1$$

$$\frac{y^2}{13/4} - \frac{x^2}{13/5} = 1$$

La ecuación representa una hipérbola cuyo eje focal es el eje y.

Como $a = \frac{\sqrt{13}}{2}$ y $b = \sqrt{\frac{13}{5}}$, resulta:

$$c^2 = b^2 + a^2 = \frac{117}{20} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{117}{20}}$$

Álgebra y Geometría Analítica

Entonces los focos de la hipérbola son $F_1\left(0, \sqrt{\frac{117}{20}}\right)$ y $F_2\left(0, -\sqrt{\frac{117}{20}}\right)$, sus vértices son $V_1\left(0, \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ y $V_2\left(0, -\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$, y la excentricidad es $\epsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{117}{20} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}} \approx 1.34$.

Finalmente, como la hipérbola está sobre el eje y , calculamos sus asíntotas como $y = \pm \frac{a}{b}x$, entonces resultan:

$$r_1) y = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

$$r_2) y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

14. Para poder encontrar los focos de la elipse, primero debemos hallar los vértices de la hipérbola.

Para ello, necesitamos conocer el valor de a en la ecuación de la hipérbola:

$$9y^2 - 16x^2 = 1296$$

$$\frac{y^2}{1296/9} - \frac{x^2}{1296/16} = 1$$

$$\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{81} = 1$$

De esta última expresión podemos reconocer $a = 12$ y $b = 9$.

Luego calculamos $c = \sqrt{b^2 + a^2} = 15$

Por lo tanto, la ecuación representa una hipérbola con eje focal sobre el eje y , cuyos vértices son $V_1(0,12)$ y $V_2(0, -12)$, y la excentricidad es $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$.

Luego, la elipse tiene como focos los puntos $F_1(0,12)$ y $F_2(0, -12)$, por lo que $c = 12$. Como la excentricidad es $\epsilon = \frac{c}{a} = 0.5 = \frac{1}{2}$, resulta que $a = 2c = 24$. A b lo calculamos haciendo $b^2 = a^2 - c^2$, por lo que $b = \sqrt{432}$.

En consecuencia, el eje mayor vale $2a = 48$ y el eje menor vale $2b = 2\sqrt{432}$. Finalmente, las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{cases} x = 2\sqrt{432}\cos(\alpha) \\ y = 48\sin(\alpha) \end{cases}$$

Con $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Álgebra y Geometría Analítica

15. Para resolver el problema, primero debemos conocer la ecuación de la hipérbola. Como sabemos que tiene un foco en $(5,0)$, el eje focal es el eje x y obtenemos que $c = 5$. De la asíntota que nos da el enunciado $y = \frac{4}{3}x$, tenemos que $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$. Sabiendo que $b^2 = c^2 - a^2$, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \\ b^2 = 25 - a^2 \end{cases}$$

Despejamos b de la primera ecuación y reemplazamos en la segunda:

$$\left(\frac{4a}{3}\right)^2 + a^2 = 25$$

$$\frac{16}{9}a^2 + a^2 = 25$$

$$\frac{25}{9}a^2 = 25$$

$$a = \pm 3$$

Como a es positivo, tomamos $a = 3$. Entonces resulta $b = 4$ y la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Para hallar la intersección de la recta y la hipérbola planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\sqrt{7}x + 3y = 0 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$$

Álgebra y Geometría Analítica

Despejamos y de la primera ecuación:

$$y = \frac{\sqrt{7}}{3}x$$

Reemplazamos en la segunda:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}x\right)^2}{16} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{1}{16} \cdot \frac{7}{9}x^2 = 1$$

Multiplicamos la ecuación por 9 y agrupamos x^2 :

$$\frac{9}{16}x^2 = 9$$

$$x = \pm 4$$

Tomando $x = 4$, resulta $y = \frac{4\sqrt{7}}{3}$.

Y tomando $x = -4$, resulta $y = -\frac{4\sqrt{7}}{3}$. Por lo tanto, la intersección de la recta y la hipérbola son los puntos:

$$P_1\left(4, \frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$P_2\left(-4, -\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)$$

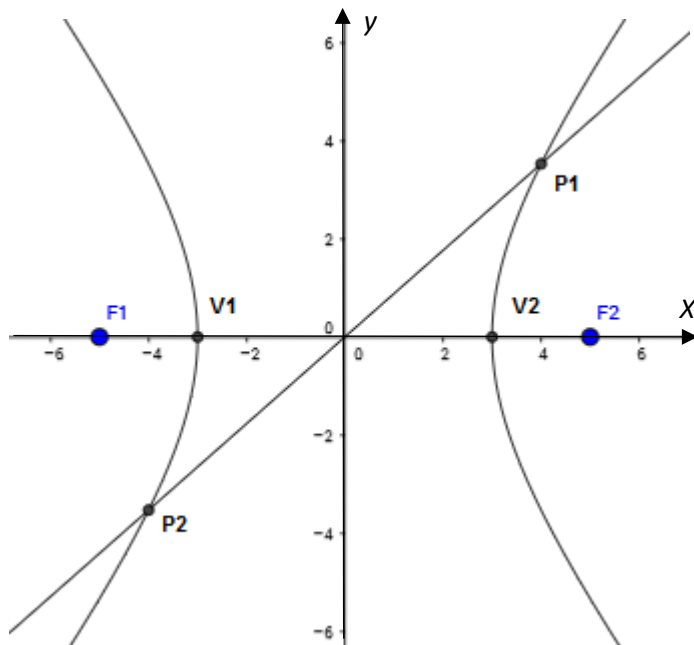


Figura 11: "Gráfica correspondiente al ejercicio 15"

Álgebra y Geometría Analítica

16. Como las asíntotas con bisectrices de los cuadrantes del plano, son rectas del tipo $y = \pm x$.

Por lo tanto, se puede deducir que $a = b$. Para obtener la longitud del eje transversal, o la distancia entre los vértices que es $2a$, primero debemos hallar la longitud del semieje mayor de la elipse $x^2 + 4y^2 + 36 = 0$.

Para hacer esto, vamos a trabajar con la ecuación de la elipse:

$$x^2 + 4y^2 - 36 = 0$$

$$x^2 + 4y^2 = 36$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Por lo tanto $a = 6$ y $b = 3$. Entonces la longitud del semieje mayor de la elipse es $2a = 12$. Como $2a$ también es la distancia entre los vértices de la hipérbola y es igual a la longitud del semieje mayor de la elipse resulta $a = 6$.

Entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$$