Universidad Nacional de Rosario
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Formación Básica
Departamento de Matemática
Álgebra y Geometría Analítica

Cónicas: circunferencia y parábola

Ejercicio 1: Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio igual a 4.

Sabemos que la ecuación de una circunferencia es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, donde $C(h,k)$ es el centro y r es el radio.

En este caso tenemos, en particular, que $C(0,0)$ y $r=4$. Luego,

$$(x-0)^2+(y-0)^2=4^2 \Rightarrow x^2+y^2=16$$

es la ecuación de la circunferencia buscada.

Ejercicio 2: Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el origen y que pasa por el punto $(-3,2)$.

Por lo recordado en el ejercicio anterior, sabemos que la ecuación será de la forma $x^2+y^2=r^2$.

Como $(-3,2)$ es un punto de la circunferencia, debe satisfacer su ecuación. Luego,

$$(-3)^2+2^2=r^2 \Rightarrow 9+4=r^2 \Rightarrow r^2=13$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=13$.

Ejercicio 3: Encontrar la ecuación de la circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ con $A(4,1)$ y $B(-1,-3)$, y graficarla.

Buscamos el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB}=(-1-4,-3-1)=(-5,-4)$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-5)^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$$

Luego, $r=\frac{\sqrt{41}}{2}$.

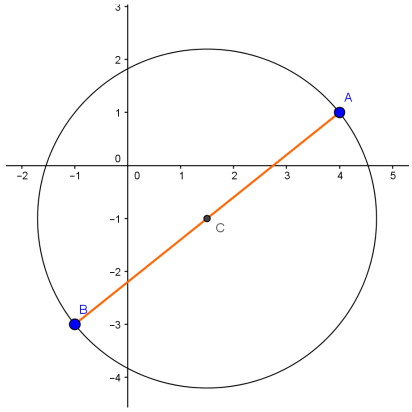
Calculamos ahora el punto medio del segmento $\overline{AB}$:

$$C(\frac{4+(-1)}{2},\frac{1+(-3)}{2}) \Rightarrow C(\frac{3}{2},-1)$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x-\frac{3}{2})^2+(y+1)^2=\frac{41}{4}$.

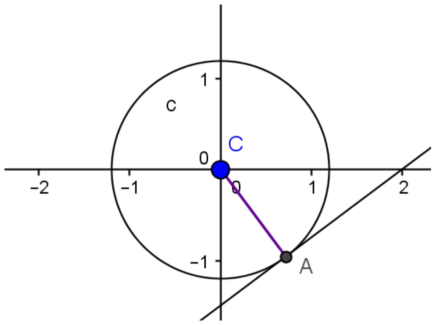
Ejercicio 4: Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(0,0)$ y cuyo radio es igual a la distancia entre el origen y la recta $r)-3x+4y+6=0$. ¿Cómo son la recta y la circunferencia entre sí?

Calculemos primero la distancia del origen a r. Para ello,



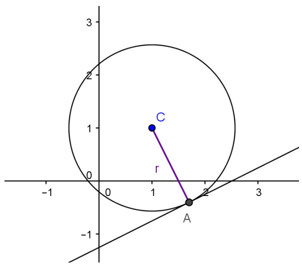
$$d(0,r)=\frac{|-3.0+4.0+6|}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}=\frac{|6|}{25}=\frac{6}{5}\Rightarrow r=\frac{6}{5}$$

Además $C(0,0)$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=\frac{36}{25}$. Haciendo un dibujo vemos que la recta es tangente a la circunferencia.



<u>Ejercicio 5</u>: Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(1,1)$ y es tangente a la recta $s)-2x+4y+5=0$

Como ya tenemos el centro de la circunferencia, nos resta encontrar la longitud del radio. Como la circunferencia debe ser tangente a s, entonces el radio será perpendicular a la recta.

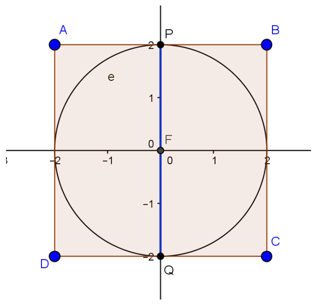


Luego, $r=d(C,s)=\frac{|-2.1+4.1+5|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{20}}$.

Entonces la ecuación de la circunferencia buscada es $(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{49}{20}$.

<u>Ejercicio 6</u>: Dado el cuadrado $ABCD$ donde $A(-2,2)$, $B(2,2)$, $C(2,-2)$ y $D(-2,-2)$, encuentre la ecuación de la circunferencia inscripta en el cuadrado y de la circunferencia circunscripta al cuadrado.

Busquemos primero la ecuación de la circunferencia inscripta a $ABCD$. Para que esté inscripta, cada lado del cuadrado debe ser tangente a ella.



Observando la figura notamos que si unimos el punto medio de $\overline{AB}$ y el de $\overline{DC}$ tenemos el diámetro de la circunferencia. Calculemos, entonces, estos puntos medios y luego el módulo del vector que determinan (lo que nos dará la longitud del diámetro de la circunferencia).

Punto medio de $\overline{AB}$: $P(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+2}{2}) \Rightarrow P(0, 2)$.

Punto medio de $\overline{DC}$: $Q(\frac{-2+2}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}) \Rightarrow Q(0, -2)$.

$\overrightarrow{PQ} = (0 - 0, -2 - 2) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (0, -4)$

$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

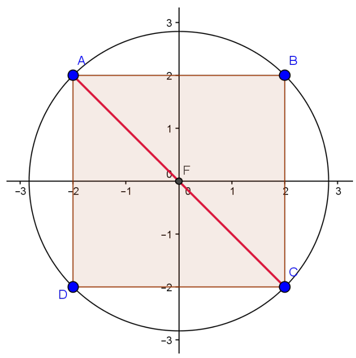
Tenemos que la longitud del diámetro de la circunferencia es 4. Luego, $r = \frac{4}{2} = 2$.

Nos falta encontrar el centro de la circunferencia. Volviendo al dibujo, notamos que el centro C es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$. Entonces,

$$F(\frac{0+0}{2}, \frac{2+(-2)}{2}) \Rightarrow F(0, 0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia inscripta en $ABCD$ es $x^2 + y^2 = 4$.

Encontremos ahora la ecuación de la circunferencia circunscripta a $ABCD$. Observando la figura notamos que si unimos los vértices de una de las diagonales (por ejemplo, A y C), tenemos el diámetro de la circunferencia.



Calculemos, entonces, el módulo de $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = (2 - (-2), -2 - 2) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (4, -4)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

Es decir, la longitud del diámetro de la circunferencia es $\sqrt{32}$. Luego, $r = \frac{\sqrt{32}}{2}$.
Por otro lado, observamos que C es el punto medio del segmento $\overline{AC}$. Entonces,

$$F(\frac{-2+2}{2}, \frac{2+(-2)}{2}) \Rightarrow F(0,0)$$

Luego, la ecuación de la circunferencia circunscripta a $ABCD$ es $x^2 + y^2 = 8$.

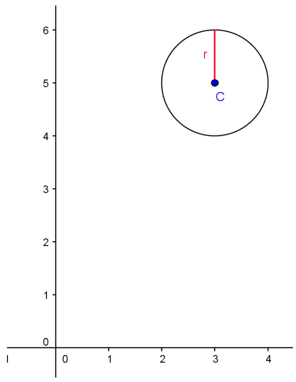
<u>Ejercicio 7</u>: Determinar la ecuación canónica de la circunferencia $x^2+y^2-6x-10y+33 = 0$ y graficarla. Luego hallar la recta tangente a la misma en el punto $P(3,6)$.

Para buscar la ecuación canónica, completamos cuadrados en la ecuación dada:

$$x^2 + y^2 - 6x - 10y + 33 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2.\,3x + 9 - 9) + (y^2 - 2.\,5y + 25 - 25) + 33 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 - 9 - 25 + 33 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$$

Vemos entonces que la circunferencia tiene centro $C(3,5)$ y radio $r = 1$. Grafiquémosla:

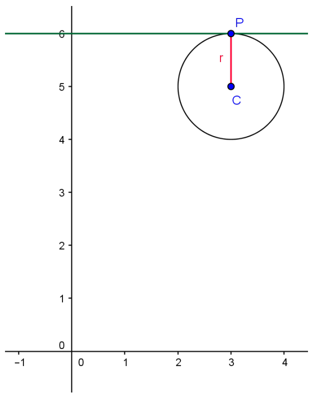


Por otro lado,

$$(3-3)^2 + (6-5)^2 = 1$$

lo que muestra que $P(3,6)$ es un punto de la circunferencia.

Buscamos ahora la recta tangente a la circunferencia que pasa por P. Sabemos que esta recta (a la que llamaremos t) debe ser perpendicular al radio. Por ello podemos tomar el vector $\overrightarrow{CP}$ como normal a t.



$$\overrightarrow{CP} = (3-3, 6-5) \Rightarrow \overrightarrow{CP} = (0,1)$$

Luego, $t)0.\,x+1.\,y+c=0 \Rightarrow t)y+c=0$.
Como $P \in t$, $6+c=0 \Rightarrow c=-6$.
Por lo tanto la recta tangente a la circunferencia por P es $t)y-6=0$.

<u>Ejercicio 8</u>: Encontrar la parábola con eje paralelo al eje y con vértice en $V(-1,-1)$ y que pasa por el punto $P(1,6)$.

Sabemos que la ecuación de una parábola con eje vertical es $(x-k)^2 = \pm 2.p.(y-h)$ $(p>0)$, donde $V(k,h)$ es el vértice de la parábola y p es la distancia del foco a la directriz. En este caso, tenemos como dato que $V(-1,-1)$ y además que $P(1,6)$ satisface la ecuación de la parábola. Tenemos así que,

$$1^{\text{o}})(x-(-1))^2 = \pm 2.p.(y-(-1)) \Rightarrow (x+1)^2 = \pm 2.p.(y+1)$$
$$2^{\text{o}})P(1,6) \text{ satisface dicha ecuación:} (1+1)^2 = \pm 2.p.(6+1) \Rightarrow p = \tfrac{2}{7}$$

Luego, $(x+1)^2 = 2.(\frac{2}{7}).(y+1)$ o también $(x+1)^2 = \frac{4}{7}.(y+1)$ es la ecuación de la parábola buscada.

<u>Ejercicio 9</u>: Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen y directriz $x=\frac{4}{5}$.

Sabemos que la ecuación de una parábola con vértice en el origen puede ser $y^2 = \pm 2.p.x$ o $x^2 = \pm 2.p.y$. Como la directriz es $x=\frac{4}{5}$ y el eje de la parábola es perpendicular a dicha recta, tenemos que el eje de la parábola buscada es paralelo al eje x. Además, sabemos que el origen es el vértice de la parábola, resulta que su eje es el eje x. Por lo tanto, la ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = \pm 2.p.x$, pero como la directriz es $x=\frac{4}{5}$, nos quedamos con la opción $y^2=-2.p.x$.

Recordemos que p es la distancia del foco a la directriz, o también $\frac{p}{2}$ es la distancia del vértice a la directriz y el foco. Así resulta,

$$\frac{p}{2} = dist((0,0), \text{"}x=\tfrac{4}{5}\text{"}) = \frac{|0-\frac{4}{5}|}{\sqrt{1}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow p = \frac{8}{5}$$

Luego $y^2 = -\frac{16}{5}.x$ es la ecuación de la parábola buscada.

<u>Ejercicio 10</u>:Hallar la/s ecuación/es de la parábola con vértice en el origen y eje una de los ejes coordenados, que pasa por el punto de intersección de la recta $-4x+3y=-23$ y la circunferencia con centro $(-2,-2)$ y radio 5.

La ecuación de la parábola con centro en el origen es de la forma $y^2 = \pm 2.p.x$ o $x^2 = \pm 2.p.y$. La ecuación de la circunferencia con centro $(-2,-2)$ y radio 5 es

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$$

Como buscamos el punto de intersección de la recta $-4x+3y=-23$ y la circunferencia $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$, podemos plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo.

$-4x+3y=-23 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{23}{3}$ **(1)**

Reemplazamos **(1)** en la ecuación de la circunferencia:

$(x+2)^2 + (\frac{4}{3}x - \frac{23}{3} + 2)^2 = 25 \Rightarrow x^2+4x+4+\frac{16}{9}x^2 - \frac{136}{9}x + \frac{289}{9} = 25 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 - \frac{100}{9}x + \frac{100}{9} = 0$

Multiplicamos por 9 y dividimos por 25:

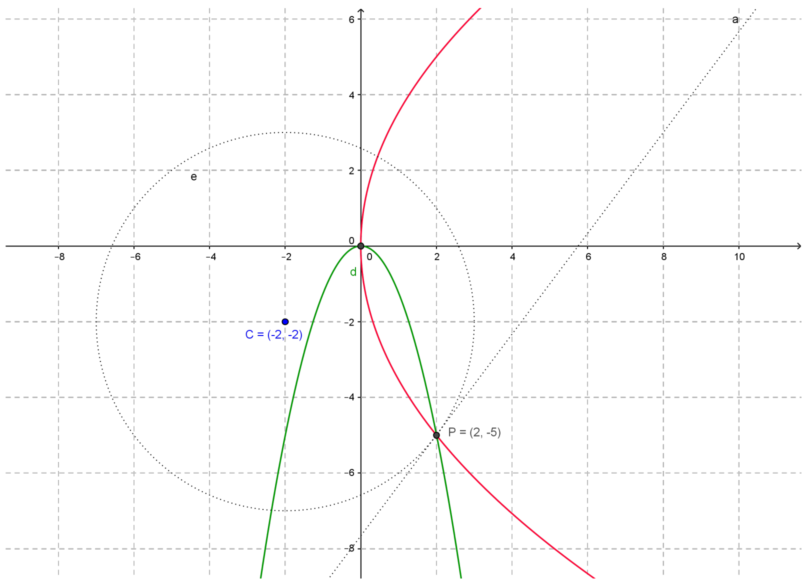
$x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow \mathbf{x=2} \Rightarrow \mathbf{y} = \frac{4}{3}\cdot 2 - \frac{23}{3} = \mathbf{-5}$

Tenemos así que el punto de intersección entre la recta y la circunferencia es $P(2,-5)$ Reemplazando dicho punto P en las dos posibles ecuaciones de la parábola, resulta

$$(-5)^2 = \pm 2.p{,}2 \text{ ó } 2^2 = \pm 2.p.(-5)$$
$$25 = \pm 4 \cdot p \text{ ó } 4 = \pm(-10) \cdot p$$
$$p = \frac{25}{4} \text{ ó } -\frac{2}{5} = p$$

Por lo tanto, existen dos ecuaciones de parábolas que satisfacen las condiciones dadas:

$$y^2 = 2.\frac{25}{4}x \text{ y } x^2 = -2.\frac{2}{5}y$$
$$y^2 = \frac{25}{2}x \text{ y } x^2 = -\frac{4}{5}y$$



<u>Ejercicio 11</u>:Encuentra la ecuación de la parábola cuyo foco es $(-3,5)$, $p = \frac{5}{3}$ y eje paralelo al eje x.

Como tenemos que el eje de la parábola es paralelo al eje x, la ecuación será de la forma $(y-k)^2 = \pm 2.p.(x-h)$. Reemplazando el dato $p = \frac{5}{3}$ resulta

$$(y-k)^2 = \pm 2.\frac{5}{3}.(x-h)$$
$$(y-k)^2 = \pm \frac{10}{3}.(x-h)$$

Sabemos también que la distancia del foco $F(x_f, y_f)$ al vértice $V(x_v, y_v)$ es igual a $\frac{p}{2}$. Podemos así plantear lo siguiente para averiguar las coordenadas del vértice

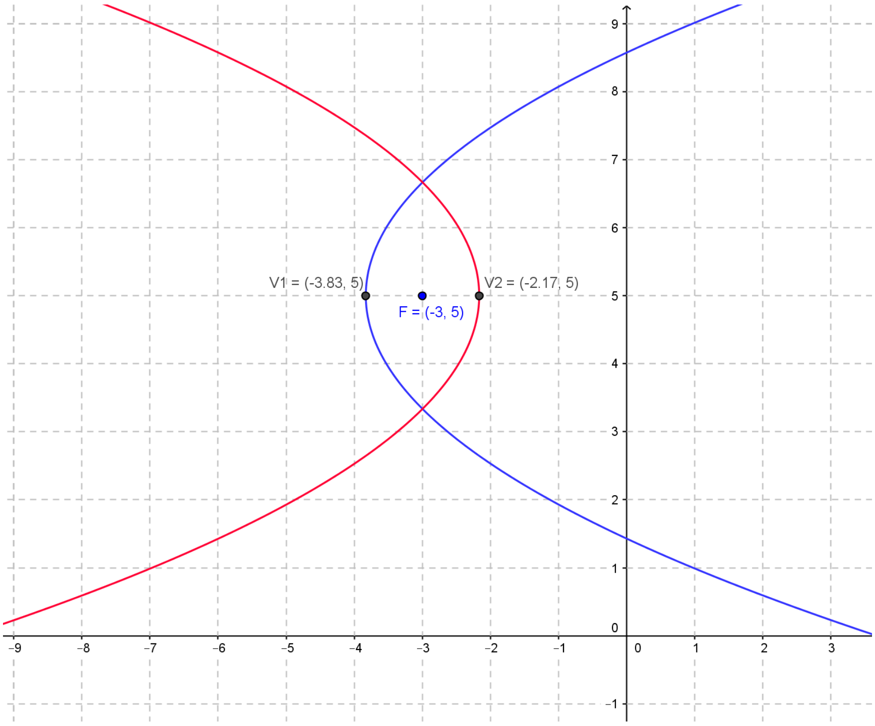
$$dist(F,V) = |\overline{FV}| = \frac{p}{2} = \frac{\frac{5}{3}}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow |(x_v - x_f, y_v - y_f)| = \frac{5}{6}$$

Como el eje de la parábola es horizontal tenemos que $y_v = y_f = 5$. Nos queda así que

$$|x_v - x_f| = |x_v - (-3)| = \frac{5}{6} \Rightarrow x_v + 3 = \frac{5}{6} \text{ ó } x_v + 3 = -\frac{5}{6} \Rightarrow x_v = -\frac{13}{6} \text{ ó } x_v = -\frac{23}{6}$$

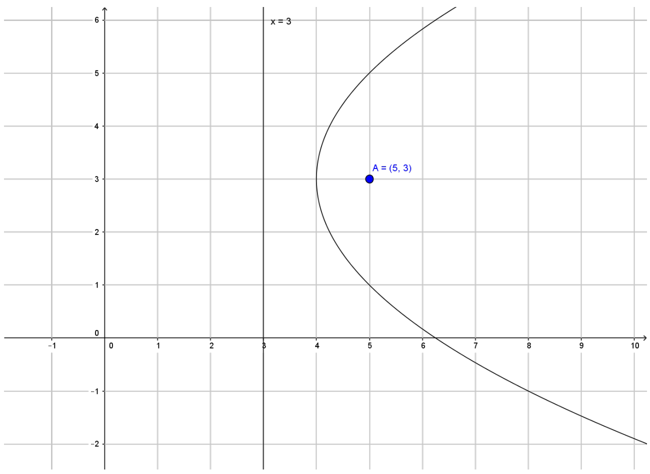
Por lo tanto, existen dos ecuaciones de parábolas que satisfacen las condiciones dadas:

$$(y-5)^2 = -\frac{10}{3}.(x + \frac{13}{6}) \text{ y } (y-5)^2 = \frac{23}{3}.(x + \frac{13}{6})$$



<u>Ejercicio 12</u>:Identificar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $A(5,3)$ y la recta $r)x=3$. Realizar un esbozo de la gráfico y explicitar la ecuación de la curva.

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de A y de r es por definición una parábola, cuyo foco es el punto A y la directriz es r. Luego, como la recta $r)x=3$ es paralela al eje y y la ecuación de la parábola es de la forma $(y-k)^2=\pm 2.p.(x-h)$, donde $V(h,k)$ es el vértice de la parábola y p es la distancia del foco a la recta directriz.



Por dato, ya tenemos que $A(5,3)$ es el foco y la recta $r)x=3$ es a directriz de la parábola. Busquemos ahora el valor de p:

$$dist(A,r)=\frac{|5-3|}{\sqrt{1^2-0^2}}=\frac{2}{1}=2\Rightarrow p=2$$

Para obtener las coordenadas del vértice, sabemos que la distancia del foco $F(x_f,y_f)$ al vértice $V(x_v,y_v)$ es igual a $\frac{p}{2}$. Podemos así plantear lo siguiente para averiguar las coordenadas del vértice

$$dist(A,V)=|\overline{AV}|=\frac{p}{2}=\frac{2}{2}=1\Rightarrow |(x_v-x_f,y_v-y_f)|=1$$

Como el eje de la parábola es horizontal tenemos que $y_v = y_f = 3$. Nos queda así que

$$|x_v - x_f| = |x_v - 5| = 1 \Rightarrow x_v - 5 = 1 \text{ ó } x_v - 5 = -1 \Rightarrow x_v = 6 \text{ ó } x_v = 4$$

Pero, como la recta directriz es $x = 3$ y $x_f = 5$ resulta que $3 < x_v < 5$. Entonces nos queda que $x_v = 4$. Por lo tanto las coordenadas del vértice son

$$V(4,3)$$

Resulta entonces que la ecuación de la parábola es

$$(y-3)^2 = 4(x-4)$$

Ejercicio 13:Determinar la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría sea paralelo al eje y, su vértice pertenezca al eje x y que contenga a los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,12)$

Como el eje de simetría de la parábola es paralelo al eje y, sabemos que la ecuación de la parábola es de la forma $(x-h)^2 = \pm 2.p.(y-k)$, donde $V(h,k)$ es el vértice.

En nuestro caso, tenemos que el vértice $V(h,k)$ pertenece al eje x, por lo cual $k = 0$. Entonces $(x-h)^2 = \pm 2.p.y$, con$V(h,0)$. Ademas, tenemos que los puntos $A(2,3)$ y $B(-1,12)$ pertenecen a la parábola, los cuales (gráficamente) se encuentran por encima del vértice. Resulta así que la parábola es cóncava hacia arriba y entonce la ecuación queda $(x-h)^2 = 2.p.y$

Luego, si los reemplazamos en la ecuación de la parábola obtenemos

(1)$(2-h)^2 = 2 \cdot p \cdot 3 \Rightarrow 4 - 4h + h^2 = 6p$
(2)$(-1-h)^2 = 2 \cdot p \cdot 12 \Rightarrow 1 + 2h + h^2 = 24p$

Restando **(1)** con **(2)** nos queda

$$3 - 6h + 0 = -18p \Rightarrow p = \frac{-1}{6} + \frac{1}{3}h$$

Reemplazando lo obtenido en **(1)**, tenemos que

$4 - 4h + h^2 = 6.(\frac{-1}{6} + \frac{1}{3}h) = -1 + 2h \Rightarrow h^2 - 6h + 5 = 0 \Rightarrow h = 5$ ó $h = 1 \Rightarrow p = \frac{3}{2}$ y $V_1(5,0)$ ó $p = \frac{1}{6}$ y $V_2(1,0)$

Entonce, existe dos parábolas que cumplen las condiciones pedidas:

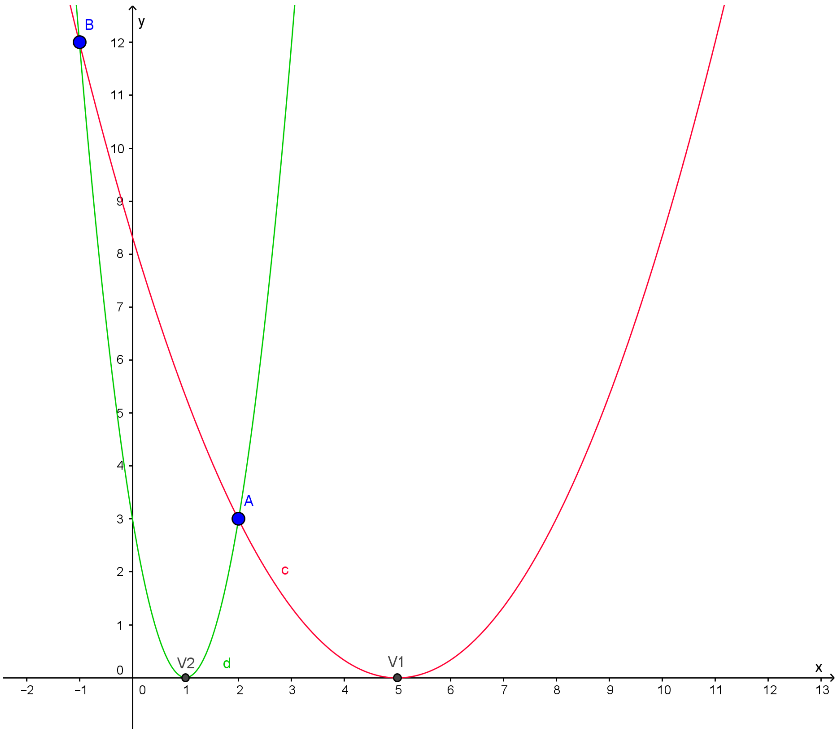
$(x-5)^2 = 2.\frac{3}{2}.y \Rightarrow (x-5)^2 = 3y$
$(x-1)^2 = 2.\frac{1}{6}.y \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}y$

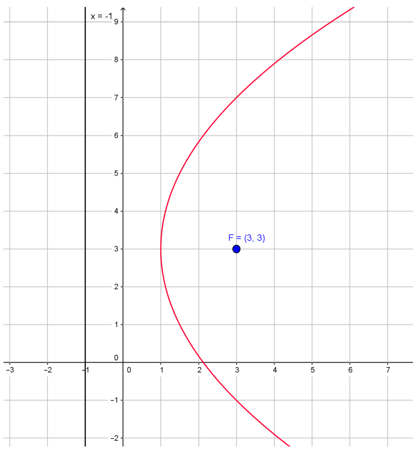
Ejercicio 14:Dada la parábola de ecuación $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$, calcular la coordenada de su vértice, foco y directriz

En primer lugar, completemos cuadrados en la ecuación para identificar mas fácilmente los elementos de la parábola.

$$\begin{gathered} y^2 - 6y - 8x + 17 = 0 \\ y^2 - 6y = 8x - 17 \\ y^2 - 2 \cdot 3y + 9 - 9 = 8x - 17 \\ (y-3)^2 = 8x - 17 + 9 \\ (y-3)^2 = 8x - 8 \\ (y-3)^2 = 8(x-1) \\ (y-3)^2 = 2 \cdot 4(x-1) \end{gathered}$$

Así, podemos observar que las coordenadas del vértice son $V(1,3)$ y $p = 4$. Por la forma de la ecuación que obtuvimos, la recta directriz es paralela al eje y, y su ecuación viene dada por $x = h - \frac{p}{2} = 1 - \frac{4}{2} = -1$. Además, el foco tiene coordenadas $F(h + \frac{p}{2}, k)$, por lo cual queda $F(3,3)$.


B
A
c
d
V2
V1
x
y


x = -1
F = (3, 3)