

250. CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA

Murray H. Protter
Charles B. Morrey
Tercera edición

Algebra y Geometria I

2006

Cónicas.

RECTAS, CIRCUNFERENCIAS, CÓNICAS 251

\$ 2,70

4. LA CIRCUNFERENCIA*

Las líneas rectas corresponden a las ecuaciones de primer grado en x e y . Un estudio sistemático de las ecuaciones en x e y debería proseguir con las ecuaciones de segundo grado, tercer grado, y así sucesivamente. Las curvas de segundo grado son suficientemente simples para estudiarlas ampliamente en este curso. Las curvas correspondientes a las ecuaciones de tercer y mayor grado no serán tratadas sistemáticamente, porque las complicaciones rápidamente se hacen muy grandes. Sin embargo, el estudio de las ecuaciones de cualquier grado —la teoría de las curvas algebraicas— es un tema interesante en sí mismo, y puede ser estudiado en cursos avanzados.

El conjunto de todos los puntos (x, y) que están a una distancia dada r de un punto fijo (h, k) constituye una circunferencia. A veces se expresa esta idea diciendo: la gráfica de todos estos puntos es una circunferencia. Por la fórmula de la distancia entre dos puntos sabemos que

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2},$$

* En el apéndice I, sección I, al final del libro, existe material adicional acerca de la circunferencia, y también otro conjunto de problemas.

o, elevando al cuadrado,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Esta es la ecuación de una circunferencia de radio r y centro en (h, k) .

Ejemplo 1. Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en $(-3, 4)$ y radio 6.

Solución. Tenemos $h = -3$, $k = 4$, $r = 6$. Sustituyendo en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 36.$$

Desarrollando esta ecuación se convierte en

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 11 = 0$$

que es otra forma de la respuesta.

Comenzaremos ahora en otra forma. Supóngase que nos dan una ecuación tal como

$$x^2 + y^2 - 4x + 7y - 8 = 0;$$

deseamos saber si ella representa o no una circunferencia; en caso afirmativo, deseamos determinar el centro y el radio. El método usado en este caso se llama «completar los cuadrados». Escribimos

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 7y) = 8,$$

donde hemos dejado espacios apropiados, como puede notarse. Sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x y el cuadrado de la mitad del coeficiente de y a ambos lados, obteniendo así

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 7y + \frac{49}{4}) = 8 + 4 + \frac{49}{4}$$

y

$$(x - 2)^2 + (y + \frac{7}{2})^2 = \frac{97}{4}.$$

Esta ecuación representa una circunferencia de centro en $(2, -\frac{7}{2})$ y radio $\frac{1}{2}\sqrt{97}$. La recta tangente a la circunferencia se define en la forma usual por los métodos del cálculo. También tenemos la definición elemental de que una recta perpendicular al radio y que pasa por el punto donde el radio encuentra a la circunferencia, es tangente a la circunferencia en este punto. Estudiaremos un ejemplo que ilustra el hecho de que las dos definiciones concuerdan. El punto $(1, 2)$ pertenece a la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x + 3y - 13 = 0.$$

Nos planteamos el problema de obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $(1, 2)$. (Ver fig. 8-6.) Por derivación implícita podemos

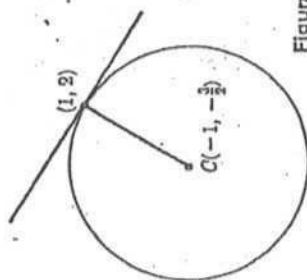


Figura 8-6

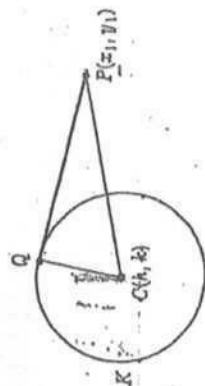


Figura 8-7

obtener la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Tenemos

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} + 2 + 3 \frac{dy}{dx} = 0$$

y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2}{2y + 3}.$$

En el punto $(1, 2)$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2 + 2}{4 + 3} = -\frac{4}{7},$$

y la ecuación de la recta, de acuerdo con la fórmula punto-pendiente, es

$$y - 2 = -\frac{4}{7}(x - 1) \Leftrightarrow 4x + 7y - 18 = 0.$$

Cualquier recta perpendicular a esta recta tangente tiene pendiente $\frac{7}{4}$. La perpendicular particular que pasa por $(1, 2)$ tiene la ecuación

$$y - 2 = \frac{7}{4}(x - 1) \Leftrightarrow 7x - 4y + 1 = 0. \quad (1)$$

El centro C de la circunferencia está en $(-1, -\frac{3}{2})$. Puesto que

$$7(-1) - 4(-\frac{3}{2}) + 1 = 0,$$

la recta (1) pasa por el centro C . Por lo tanto, vemos que la recta tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto. Así, pues, las dos definiciones de tangente a una circunferencia concuerdan.

Sea $P(x_1, y_1)$ un punto fuera de la circunferencia K con centro en $C(h, k)$ y radio r . En notación de conjuntos, podemos escribir

$$K = \{(x, y) : (x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = 0\}.$$

Una tangente trazada de P a la circunferencia tiene su punto de contacto en Q (ver fig. 8-7). Puesto que el triángulo PQC es rectángulo, vemos que $|PQ| = \sqrt{|PC|^2 - r^2}$. Usando la fórmula de la distancia para la longitud $|PC|$, tenemos

$$|PQ| = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}.$$

Por el procedimiento de completar los cuadrados, se deduce que si la circunferencia con ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2)$$

tiene centro en (h, k) y radio $r > 0$, entonces

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 - r^2 = x^2 + y^2 + Dx + Ey + F.$$

Por lo tanto, si la circunferencia de la fig. 8-7 tiene la ecuación (2), entonces

$$|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F}.$$

Ejemplo 2. Desde $P(8, 4)$ se traza una tangente a la circunferencia K dada por

$$K = \{(x, y): x^2 + y^2 + 2x + y - 3 = 0\}.$$

Calcular la distancia de P al punto de tangencia Q .

Solución. Usando la segunda fórmula para $|PQ|$, obtenemos

$$|PQ| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 2 \cdot 8 + 4 - 3} = \sqrt{97}.$$

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 14, obtener la ecuación de la circunferencia determinada por las condiciones dadas, donde C denota el centro y r el radio.

1. $C = (-3, 4)$, $r = 5$
2. $C = (0, 0)$, $r = 4$
3. $C = (2, 3)$, $r = 2$
4. $C = (2, -1)$, $r = 3$
5. Los extremos de un diámetro son los puntos $(4, 2)$ y $(8, 6)$
6. Los extremos de un diámetro son los puntos $(-2, 3)$ y $(4, -1)$
7. $C = (3, 4)$, tangente al eje x
8. $C = (-2, 3)$, tangente al eje y
9. $C = (2, 1)$, pasa por $(3, 4)$
10. $C = (-1, -2)$, pasa por $(-2, 2)$
11. $C = (2, 3)$, tangente a $3x + 4y + 2 = 0$
12. $C = (3, -2)$, tangente a $5x - 12y = 0$
13. Tangente a los dos ejes, radio 6, en el segundo cuadrante
14. Tangente al eje x y a la recta $y = 2x$, radio 5 (cuatro soluciones)

En cada uno de los problemas 15 a 22, determinar la gráfica de la ecuación dada, por el método de completar los cuadrados.

15. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
16. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$
18. $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 15 = 0$

19. $x^2 + y^2 + 3x - 5y - \frac{1}{2} = 0$
20. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 4 = 0$

En cada uno de los problemas 23 a 26, obtener la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada, en el punto P de dicha circunferencia.

23. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$, $P(1, 3)$
24. $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 7 = 0$, $P(-1, 1)$
25. $x^2 + y^2 + 5x - 6y - 21 = 0$, $P(2, -1)$
26. $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$, $P(-3, 4)$

En cada uno de los problemas 27 a 30, obtener la ecuación de la recta normal a la circunferencia dada, en el punto P de dicha circunferencia. Resuelva el problema en dos formas distintas.

27. $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$, $P(2, -3)$
28. $x^2 + y^2 - 3x - 8y + 18 = 0$, $P(1, 4)$
29. $x^2 + y^2 - 4x - 7y - 6 = 0$, $P(6, 1)$
30. $x^2 + y^2 + 8x + 2y + 16 = 0$, $P(-4, -2)$

En cada uno de los problemas 31 a 34, se trazan rectas tangentes a la circunferencia dada, por el punto P que no pertenece a la circunferencia. Obtener la ecuación de estas rectas.

31. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 21 = 0$, $P(-4, 5)$
32. $x^2 + y^2 - 2x + 5y + 7 = 0$, $P(-1, -2)$
33. $x^2 + y^2 - x - 4y - 7 = 0$, $P(3, 0)$
34. $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 2 = 0$, $P(-3, 3)$
35. La pendiente de la tangente a

$$x^2 + y^2 + 3x + y + 25 = 0 \quad \text{es} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 3}{2y + 1}, y \neq -\frac{1}{2}.$$

¿Qué es lo incorrecto en esta proposición?, o, ¿es ella correcta?

5. LA PARÁBOLA*

En la sección 4, al tratar de la circunferencia, iniciamos un estudio sistemático de las ecuaciones de segundo grado en x e y . Ahora continuamos el análisis de las curvas de segundo grado.

Definiciones. Una parábola es la gráfica de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo es igual a su distancia a una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta fija, directriz.

La definición de la parábola es puramente geométrica, en el sentido que no dice nada acerca de las coordenadas, o sea los valores de x e y . Recordemos

* En el apéndice 1, sección 2, al final del libro, existe material adicional acerca de la parábola, y también otro conjunto de problemas.

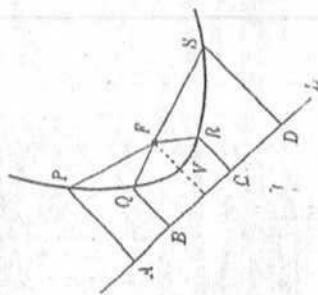


Figura 8-8

que la definición de la circunferencia como la gráfica de los puntos que están a una distancia dada de un punto fijo, también es una definición geométrica. Resulta que las parábolas siempre están dadas por ecuaciones de segundo grado, tal como ocurrió en el caso de la circunferencia.

En la fig. 8-8 se muestra una situación típica. La recta L es la directriz, el punto F es el foco y P, Q, R, S son puntos que satisfacen las condiciones de la gráfica. Esto es,

$$|AP| = |PF|, |BQ| = |QF|, |CR| = |RF|, \text{ y } |DS| = |SF|.$$

La recta que pasa por el foco y es perpendicular a L , interseca a la parábola en un punto V . Este punto se llama el vértice de la parábola.

Para obtener una ecuación de la parábola, fijemos un sistema de coordenadas y coloquemos la directriz y el foco en lugares convenientes. Supongáse que la distancia del foco F a la directriz L es de p unidades. Coloquemos el foco en $(p/2, 0)$ y hagamos que la recta L sea $x = -p/2$, como se muestra en la fig. 8-9. Si $P(x, y)$ es un punto típico de la gráfica, las condiciones son tales que la distancia $|PF| = \sqrt{[x - (p/2)]^2 + (y - 0)^2}$ es igual a la distancia de P a la recta L . Por inspección de la figura (o por la fórmula de la distancia de un punto a una recta), deducimos fácilmente que la distancia de P a L es $|x - (-p/2)|$. Por lo tanto tenemos

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

y, puesto que ambos miembros son positivos, podemos elevar al cuadrado para obtener

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

y

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Esta ecuación se convierte en

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Todo punto de la gráfica satisface esta ecuación. Recíprocamente, invirtiendo los pasos, se puede demostrar que todo punto que satisface esta ecuación está en la gráfica. A esta expresión se le llama *ecuación de la parábola con foco en $(p/2, 0)$ y directriz $x = -p/2$* . El vértice de la parábola está en el origen. En la ecuación se aprecia que el eje x es un eje de simetría, ya que al reemplazar y por $-y$ la ecuación no cambia. A la recta de simetría de la parábola se le llama *eje de la parábola*.

Si se coloca en otras posiciones al foco y a la directriz, la ecuación será, por supuesto, diferente. Existen cuatro *posiciones estándar* para la combinación foco-directriz de las cuales ha sido descrita la primera. Siendo siempre p un número positivo, la segunda posición estándar se define de modo que $(-p/2, 0)$ sea el foco, y la recta $x = p/2$ la directriz. Usando el mismo método anterior, obtenemos la ecuación

$$y^2 = -2px, \quad p > 0,$$

que representa a la parábola en una posición como la mostrada en la fig. 8-10. La tercera posición tiene su foco en $(0, p/2)$ y la recta $y = -p/2$ como directriz. La ecuación resultante es

$$x^2 = 2py, \quad p > 0,$$

y la parábola está en la posición que se muestra en la fig. 8-11. En la cuarta posición estándar, el foco está en $(0, -p/2)$ y la directriz es la recta $y = p/2$. La ecuación resultante es

$$x^2 = -2py, \quad p > 0,$$

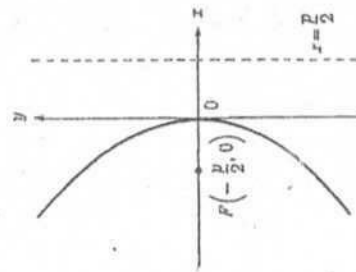


Figura 8-10

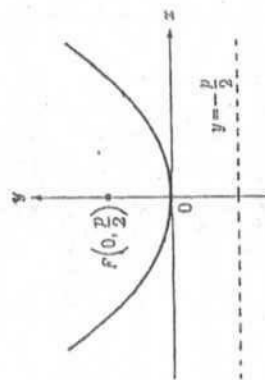


Figura 8-11

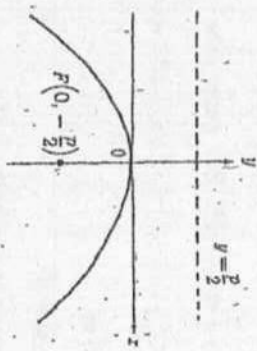


Figura 8-12

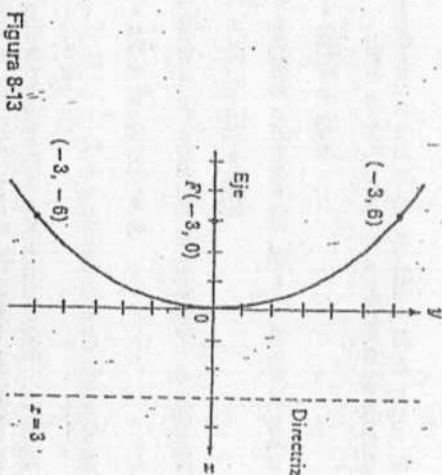


Figura 8-13

y la parábola está en la posición que se muestra en la fig. 8-12. En las cuatro posiciones el vértice está en el origen.

Ejemplo 1. Una parábola está dada por

$$S = \{(x, y); y^2 = -12x\}.$$

Hallar el foco, la directriz y el eje. Hacer una gráfica.

Solución. Puesto que $2p = 12$, se tiene que $p = 6$. Como la ecuación es del segundo tipo, el foco está en $(-3, 0)$. La directriz es la recta $x = 3$, y el eje de la parábola es el eje x . La curva aparece en la fig. 8-13.

Cuando la parábola no está en una de las posiciones estándar, la ecuación es más complicada. Si la directriz es horizontal o vertical, la ecuación es sólo un poco diferente. Sin embargo, si la directriz no es paralela a ninguno de los ejes, la ecuación se altera considerablemente. En el siguiente ejemplo se muestra la forma en que se puede obtener la ecuación de la parábola directamente por la definición.

Ejemplo 2. Obtener la ecuación de la parábola con foco en $F(3, 2)$ y cuya directriz es la recta $x = -4$. Ubicar el vértice y el eje de simetría.

Solución. Por la definición de la parábola, $P(x, y)$ es un punto de la curva si y sólo si $|PF| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ es igual a la distancia de P a la directriz, que es $|x+4|$. Tenemos

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = |x+4|.$$

Como ambos miembros son positivos, elevamos al cuadrado y obtenemos

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + 8x + 16.$$

Esto nos da

$$(y-2)^2 = 14x + 7 \quad \Leftrightarrow \quad (y-2)^2 = 14\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Grificando la ecuación (fig. 8-14) se observa que el eje es la recta $y = 2$, y que el vértice es el punto $(-\frac{1}{2}, 2)$.

Las cuatro formas de la parábola, cuando el eje es vertical u horizontal, y el vértice está en el punto (a, b) en vez del origen, son:

$$(y-b)^2 = 2p(x-a), \quad p > 0, \quad (1)$$

con foco en $(a + p/2, b)$ y directriz $x = a - p/2$;

$$(y-b)^2 = -2p(x-a), \quad p > 0, \quad (2)$$

con foco en $(a - p/2, b)$ y directriz $x = a + p/2$;

$$(x-a)^2 = 2p(y-b), \quad p > 0, \quad (3)$$

con foco en $(a, b + p/2)$ y directriz $y = b - p/2$;

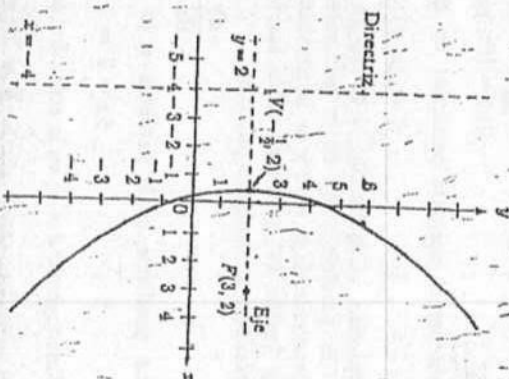
$$(x-a)^2 = -2p(y-b), \quad p > 0, \quad (4)$$

con foco en $(a, b - p/2)$ y directriz $y = b + p/2$.

Las cuatro fórmulas anteriores pueden ser obtenidas directamente de la definición de parábola (como en el ejemplo 2). Ver el problema 23 al final de esta sección.

Ejemplo 3. Dada la parábola $x^2 = -4y - 3x + 2$, obtener el vértice, el foco, la directriz y el eje. Graficar la curva.

Figura 8-14



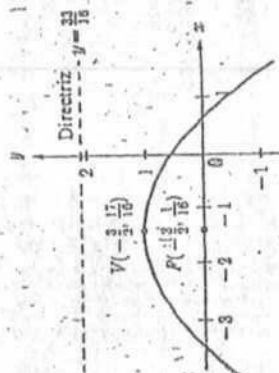


Figura 8-15

Solución. Para completar los cuadrados en x , escribimos

$$x^2 + 3x = -4y + 2,$$

y luego obtenemos

$$(x + \frac{3}{2})^2 = -4y + 2 + \frac{9}{4} = -4y + \frac{17}{2}.$$

O, lo que es lo mismo,

$$(x + \frac{3}{2})^2 = -4(y - \frac{17}{16}).$$

que es la cuarta de las formas anteriores. Se nota que el vértice es $(-\frac{3}{2}, \frac{17}{16})$. Puesto que $2p = 4$, sabemos que $p = 2$, y que el foco es $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{16})$. La directriz es la recta $y = \frac{1}{16}$ y el eje es la recta $x = -\frac{3}{2}$. La curva está representada en la fig. 8-15.

En los dos ejemplos siguientes, discutimos los problemas que combinan cierto número de ideas que ya hemos estudiado.

Ejemplo 4. Dada la familia de rectas

$$l(k) = \{(x, y) : 3x + 2y - k = 0\},$$

obtener el miembro particular de esta familia que es tangente a la parábola

$$S = \{(x, y) : y = 3x^2 - 2x + 1\}.$$

Solución. Cuando $l(k) \cap S$ consta de un punto, la recta es tangente a la parábola o es paralela al eje de la parábola. Si la recta es tangente a la parábola, la pendiente de la recta y de la parábola deben ser iguales en el punto de contacto. La familia $l(k)$ consta de todas las rectas de pendiente $-\frac{3}{2}$. La pendiente de la parábola en cualquier punto es

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 2.$$

La pendiente de la parábola y la pendiente de la recta son iguales cuando

$$6x - 2 = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}.$$

Sustituyendo $x = \frac{1}{4}$ en la ecuación de S , obtenemos

$$y = 3(\frac{1}{4})^2 - 2(\frac{1}{4}) + 1 = \frac{13}{4}.$$

El punto de la parábola en el que la pendiente es $-\frac{3}{2}$ es $(\frac{1}{4}, \frac{13}{4})$. Este punto debe pertenecer también a la recta. Por lo tanto,

$$3(\frac{1}{4}) + 2(\frac{13}{4}) - k = 0$$

y, por lo tanto, $k = \frac{29}{2}$. El miembro buscado de $l(k)$ es

$$l(\frac{29}{2}) = \{(x, y) : 3x + 2y - \frac{29}{2} = 0\}.$$

Ejemplo 5. Obtener la ecuación de la recta tangente a la parábola

$$S = \{(x, y) : y^2 + 3y - 2x + 4 = 0\},$$

en el punto de ella donde $y = 2$.

Solución. Reemplazando $y = 2$ en la ecuación de S , obtenemos $x = 7$. La pendiente en cualquier punto de S está dada por la relación

$$2y \frac{dy}{dx} + 3 \frac{dy}{dx} - 2 = 0,$$

y en $(7, 2)$ hallamos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y + 3} = \frac{2}{7}.$$

La ecuación de la recta tangente es $y - 2 = \frac{2}{7}(x - 7)$.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 4, obtener las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz. Graficar la curva.

1. $y^2 = 8x$

3. $y^2 = -12x$

2. $x^2 = 6y$

4. $x^2 = -16y$

En los problemas 5 a 10, obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen, que satisfice la siguiente condición adicional.

5. Foco en $(-4, 0)$

7. Directriz: $y = 2$

9. Pasa por $(2, 3)$ y su eje es el eje x

10. Pasa por $(2, 3)$ y su eje es el eje y

En los problemas 11 a 16, obtener el foco, el vértice, la directriz y el eje de la parábola. Graficar la curva.

11. $y = x^2 - 2x + 3$

13. $y = -4x^2 + 3x$

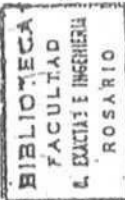
15. $x^2 + 2y - 3x + 5 = 0$

12. $x = y^2 + 2y - 4$

14. $x = y^2 + 2y - 7$

16. $y^2 + 2x - 4y + 7 = 0$

En los problemas 17 a 22, obtener la ecuación de la parábola a partir de la definición.



17. Directriz $x = 0$, foco en $(6, 0)$
18. Directriz $y = 0$, foco en $(0, 5)$
19. Vértice en $(0, 4)$, foco en $(0, 2)$
20. Vértice en $(-2, 0)$, directriz $x = 1$
21. Foco en $(-1, -2)$, directriz $x - 2y + 3 = 0$
22. Foco en $(2, 3)$, directriz $x + y + 1 = 0$
23. (a) Usar la definición de la parábola para establecer la fórmula (1) de la página 259. (b) Lo mismo que en la parte (a) para la fórmula (2) de la página 259. (c) Lo mismo que en la parte (a) para la fórmula (3) de la página 259. (d) Lo mismo que en la parte (a) para la fórmula (4) de la página 259.
24. Determinar el miembro de la familia

$$(k) = \{(x, y) : 4x - y - k = 0\}$$

que es tangente a la parábola $y = 2x^2 - x + 1$.

25. Determinar el miembro de la familia

$$(k) = \{(x, y) : kx - y - 5 = 0\}$$

que es tangente a la parábola $y = 3x^2 + 2x + 4$.

26. Determinar el miembro de la familia de parábolas $y = kx^2 + 4x - 3$ que es tangente a la recta $2x - y + 1 = 0$.

En los problemas 27 a 31, obtener la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado P perteneciente a la parábola.

27. $y^2 = 9x$, $P(1, 3)$
28. $x^2 = 12y + 7$, $P(1, -\frac{1}{2})$
29. $y^2 - 3x + 2y + 4 = 0$, $P(\frac{4}{3}, 0)$
30. $(y - 2)^2 = -4(x + 3)$, $P(-4, 4)$
31. $x^2 - 2x + y = 0$, $P(-3, -15)$

32. Las dos torres de suspensión de un puente colgante distan entre sí 300 m y se extienden 80 m por encima de la calzada. Si el cable (que tiene la forma de una parábola) es tangente a la calzada en el centro del puente, determinar la altura del cable por encima de la pista a 50 m y también a 100 m del centro del puente. (Asuma que la pista es horizontal.)

33. Se traza una tangente en un punto P de una parábola. Esta recta interseca al eje de la parábola en un punto A . Si F representa el foco, demostrar que el triángulo APF es isósceles.

34. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto (no el vértice) de la parábola $y^2 = 2px$. Obtener la ecuación de la recta normal a la parábola en este punto. Demostrar que esta recta normal interseca al eje x en el punto $Q(x_1 + p, 0)$.

6. LA ELIPSE*

Continuando nuestra discusión de las curvas de segundo grado, nos ocuparemos ahora de la elipse.

Definiciones. Una elipse es la gráfica de todos los puntos tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Los dos puntos fijos se llaman focos.

* En el apéndice 1, sección 3, al final del libro, existe material adicional acerca de la elipse, y también otro conjunto de problemas.

Para que la definición tenga sentido, la constante (la suma de las distancias a los focos) debe ser mayor que la distancia entre los focos. Nótese que la definición es puramente geométrica, y que no habla acerca de coordenadas o de ecuaciones. Resultará que la ecuación de una elipse es de segundo grado.

Supóngase que la distancia entre los focos es $2c$ ($c > 0$). Llamemos F_1 y F_2 a los focos y coloquemoslos en puntos convenientes, digamos F_1 en $(c, 0)$ y F_2 en $(-c, 0)$. Sea $P(x, y)$ un punto de la elipse, y sean d_1 la distancia de P a F_1 y d_2 la distancia de P a F_2 (fig. 8-16). La condición establece que $d_1 + d_2$ es siempre constante. Como dijimos, la constante (que la denotaremos por $2a$) debe ser mayor que $2c$. Así, tenemos

$$d_1 + d_2 = 2a,$$

o, por la fórmula de la distancia,

$$\sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} = 2a.$$

Para simplificar, pasamos un radical a la derecha y elevamos al cuadrado:

$$(x - c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2.$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos, obtenemos

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x.$$

Elevando nuevamente al cuadrado

$$(x + c)^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Puesto que $a > c$, podemos introducir una nueva cantidad

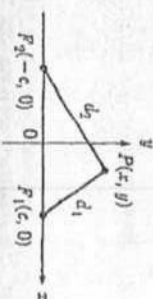
$$b = \sqrt{a^2 - c^2},$$

y así podemos escribir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esta es la ecuación de una elipse.

Figura 8-16



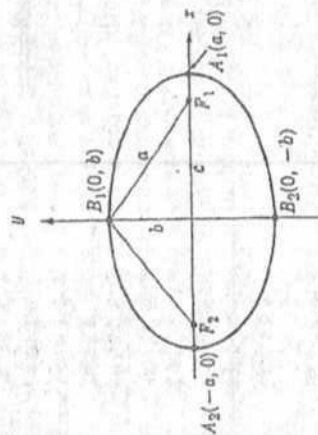


Figura 8-17

Hemos demostrado que todo punto de la gráfica satisface esta ecuación. Recíprocamente (invirtiendo los pasos*), se puede demostrar que todo punto que satisface esta ecuación está en la elipse. En la fig. 8-17 se muestra una gráfica de esta ecuación. Por la ecuación, vemos inmediatamente que la curva es simétrica respecto a los ejes x e y .

Definiciones. La recta que pasa por los focos F_1 y F_2 se llama eje mayor. El bisector perpendicular del segmento F_1F_2 se llama eje menor. La intersección de los ejes mayor y menor se llama centro.

La ecuación que hemos obtenido nos indica que la elipse interseca al eje x en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Estos puntos se llaman vértices de la elipse. La distancia entre ellos, $2a$, se llama longitud del eje mayor. (A veces se le llama simplemente eje mayor.) La elipse interseca al eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. La distancia entre estos puntos, $2b$, se llama longitud del eje menor. (A veces se le llama eje menor.)

La excentricidad e de una elipse se define por

$$e = c/a.$$

En razón de que $c < a$, la excentricidad está siempre comprendida entre 0 y 1. La excentricidad mide la «chatura» de una elipse. Si a se mantiene fijo y c es muy

* En el proceso de invertir los pasos, debemos verificar (por las operaciones de elevar al cuadrado) que

$$a + \frac{c}{a}x \geq 0 \quad \text{y} \quad 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \geq 0.$$

Sin embargo,

$$2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \left(a + \frac{c}{a}x\right) = a - \frac{c}{a}x.$$

La verificación se realiza al tomar en consideración que $-a \leq x \leq a$, para todo punto que satisface la ecuación, y que $c < a$.

«pequeño», entonces e es cercana a cero. Pero esto significa que los focos son muy cercanos entre sí, y la elipse es casi una circunferencia, tal como en la fig. 8-18. Por otra parte, si c tiene un valor cercano al de a , entonces e es cercana a 1, y la elipse es bastante chata, como la de la fig. 8-19. La posición límite de una elipse cuando $e \rightarrow 0$ es una circunferencia de radio a , y cuando $e \rightarrow 1$ esta posición es un segmento de longitud $2a$.

Al deducir la ecuación de la elipse, colocamos los focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. Si, en cambio, los ponemos en el eje y en $(0, c)$ y $(0, -c)$ y aplicamos el mismo razonamiento, entonces la ecuación de la elipse que obtenemos es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

El eje y es ahora el eje mayor, el eje x es el eje menor, y los vértices están en $(0, a)$ y $(0, -a)$. La cantidad $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ y la excentricidad $e = c/a$ se definen como antes. La fig. 8-20 muestra una elipse con los focos en el eje y .

Ejemplo 1: Dada la elipse de ecuación $9x^2 + 25y^2 = 225$, encontrar los ejes mayor y menor, la excentricidad, las coordenadas de los focos y los vértices. Dibujar la elipse.

Solución. Escribamos la ecuación en la «forma estándar» dividiéndola por 225. Así obtenemos

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

expresión que nos dice que $a = 5$, $b = 3$. Puesto que $a^2 = b^2 + c^2$, se tiene que $c = 4$. La excentricidad es $e = c/a = \frac{4}{5}$. El eje mayor está en el eje y , el eje menor está en el eje x , los vértices son $(\pm 5, 0)$ y los focos son $(\pm 4, 0)$. La elipse está dibujada en la fig. 8-21.

Ejemplo 2. Dada la elipse con ecuación $16x^2 + 9y^2 = 144$, hallar los ejes mayor y menor, la excentricidad, las coordenadas de los focos y de los vértices. Dibujar la elipse.

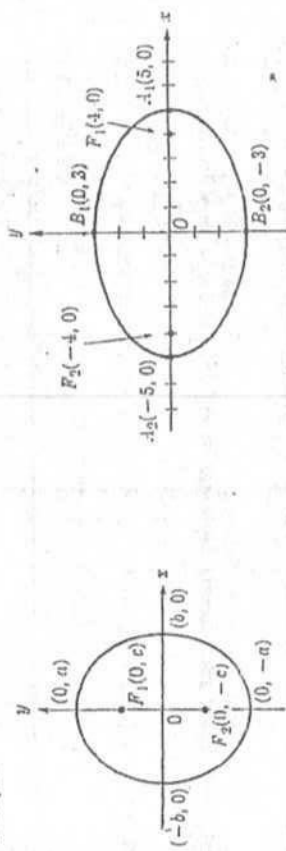


Figura 8-21

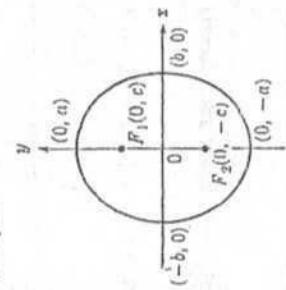


Figura 8-20

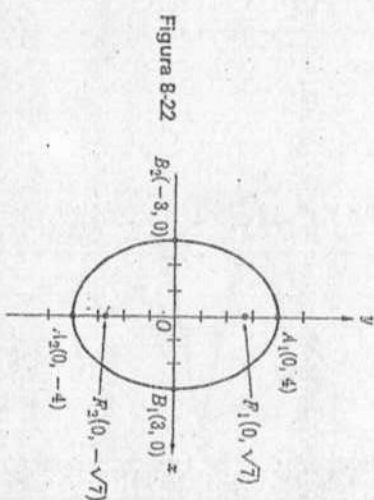


Figura 8-22

Solución. Dividiendo por 144, obtenemos

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Observamos que el denominador del término en y es mayor. Por lo tanto, $a = 4$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2$, y $c = \sqrt{7}$. La excentricidad es $e = \sqrt{7}/4$, el eje mayor está en el eje y , y el eje menor está en el eje x , los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$, y los vértices son $(0, \pm 4)$. La elipse está dibujada en la fig. 8-22.

Los ejemplos anteriores ilustran el hecho de que cuando tenemos una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la ecuación representa una elipse (o una circunferencia si los denominadores son iguales), y el denominador mayor determina si los focos, los vértices y el eje mayor están en el eje x o en el eje y .

Si $P(x_1, y_1)$ es un punto de la elipse, es fácil obtener la ecuación de la recta tangente a la elipse en P . De hecho, podemos desarrollar una fórmula sencilla para la ecuación de esta recta, cuando la elipse está dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La pendiente de la elipse se obtiene por derivación implícita:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

La ecuación de la recta tangente en $P(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \Leftrightarrow a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2.$$

Pero, $b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, porque (x_1, y_1) pertenece a la elipse. Por lo tanto,

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \quad (1)$$

es la ecuación de la recta tangente.

Ejemplo 3. Obtener la ecuación de la recta tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

en el punto $(2, -\frac{4}{3}\sqrt{5})$.

Solución. El punto $(2, -\frac{4}{3}\sqrt{5})$ está en la elipse y , aunque el eje mayor está en el eje y , es fácil ver que es válida la fórmula análoga a (1) para la recta tangente. Obtenemos

$$\frac{2x}{9} + \frac{-\frac{4}{3}\sqrt{5}y}{16} = 1 \Leftrightarrow 8x - 3\sqrt{5}y - 36 = 0.$$

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 10, hallar las longitudes de los ejes mayor y menor, las coordenadas de los focos y de los vértices, y la excentricidad. Dibujar la curva.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $25x^2 + 169y^2 = 4225$
3. $9x^2 + 16y^2 = 144$
4. $25x^2 + 16y^2 = 400$
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$
6. $3x^2 + 4y^2 = 12$
7. $5x^2 + 2y^2 = 10$
8. $5x^2 + 3y^2 = 15$
9. $2x^2 + 3y^2 = 11$
10. $5x^2 + 4y^2 = 17$

En los problemas 11 a 21, hallar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas.

11. Vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 4, 0)$
12. Vértices en $(0, \pm 5)$, focos en $(0, \pm 3)$
13. Vértices en $(0, +10)$, excentricidad $4/5$
14. Vértices en $(\pm 6, 0)$, excentricidad $2/3$
15. Focos en $(0, \pm 4)$, excentricidad $4/5$
16. Vértices en $(0, \pm 5)$, pasa por $(3, 3)$
17. Ejes en los ejes coordenados, pasa por $(4, 3)$ y $(-1, 4)$
18. Ejes en los ejes coordenados, pasa por $(-5, 2)$ y $(3, 7)$
19. Focos en $(\pm 3, 0)$, pasa por $(4, 1)$
20. Excentricidad $3/4$, focos en el eje x , centro en el origen, y pasa por $(6, 4)$
21. Excentricidad $3/4$, focos en el eje y , centro en el origen, y pasa por $(6, 4)$
22. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la suma de sus distancias a los puntos $(6, 0)$ y $(-6, 0)$ es 20.

23. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la suma de sus distancias a (3, 0) y (9, 0) es 12.
24. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que su distancia a (3, 0) es $\frac{1}{3}$ de su distancia a la recta $x = 27$.
25. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que su distancia a (0, 4) es $\frac{2}{3}$ de su distancia a la recta $y = 9$.
26. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que su distancia a (4, 0) es $\frac{1}{2}$ de su distancia a la recta $x = 6$. Ubicar los ejes mayor y menor.
27. Hallar la ecuación de la gráfica de todos los puntos cuyas distancias a (0, 5) son $\frac{3}{4}$ de sus distancias a la recta $y = 8$. Ubicar los ejes mayor y menor.
28. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- en el punto $P(1, -\frac{5}{3}\sqrt{2})$.
29. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse $4x^2 + 12y^2 = 1$, en el punto $P(1/4, 1/4)$.
30. Hallar la ecuación de la recta normal a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ en el punto $P(2, \frac{2}{3}\sqrt{5})$.
31. Hallar la ecuación de la recta normal a la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$, en el punto $P(-3, 16/5)$.
32. Hallar la ecuación de la recta normal a la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, que pasa por el punto $P(x_1, y_1)$ de la elipse.
33. La tangente a una elipse en el punto P_0 corta a la tangente en el vértice en el punto Q . Demostrar que la recta que une el otro vértice a P_0 es paralela a la recta que une el centro con Q .
34. Se inscribe un cuadrado en la elipse cuya ecuación es $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$. Hallar las coordenadas de los vértices de dicho cuadrado. Hallar también su perímetro y área.
35. La órbita que describe la Tierra alrededor del Sol es aproximadamente una elipse, con el Sol en uno de los focos. El eje mayor de la órbita elíptica es de 300,000 km, y la excentricidad es 0.017, aproximadamente. Hallar las distancias máxima y mínima de la Tierra al Sol.

7. LA HIPÉRBOLA*

Un estudio de la hipérbola completará nuestra discusión de las curvas de segundo grado en el plano.

Definiciones. La hipérbola es la gráfica de todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos es una constante positiva. Los dos puntos fijos se llaman focos.

En la fig. 8-23 se muestra una situación típica, donde los dos puntos fijos (focos) son F_1 y F_2 . Para que un punto P esté en la gráfica, es necesario que la

* En el apéndice 1, sección 4, al final del libro, existe material adicional acerca de la hipérbola, y también otro conjunto de problemas.

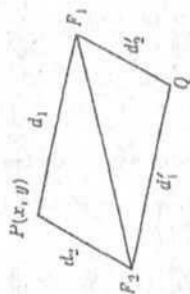


Figura 8-23

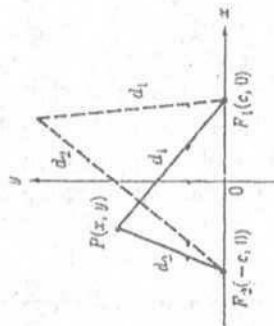


Figura 8-24

distancia $|PF_1|$ menos la distancia $|PF_2|$ sea igual a una constante positiva. También, un punto Q estará en la gráfica si la distancia $|QF_1|$ menos $|QF_2|$ es igual a la misma constante. Recalcamos el hecho de que la definición de hipérbola, lo mismo que la de parábola y elipse, es puramente geométrica, y no menciona sistemas coordenados. Las hipérbolas también son curvas de segundo grado.

Supongamos que la distancia entre los focos es $2c$ ($c > 0$). Coloquemos los focos en puntos adecuados, F_1 en $(c, 0)$ y F_2 en $(-c, 0)$, y sea $P(x, y)$ un punto de la hipérbola. Entonces, las condiciones de la gráfica expresan que $d_1 - d_2$ o $d_2 - d_1$ es siempre igual a una constante positiva que llamaremos $2a$ ($a > 0$) (fig. 8-24). Las condiciones de la gráfica son

$$d_1 - d_2 = 2a \quad \text{o} \quad d_2 - d_1 = 2a,$$

que pueden combinarse como

$$d_1 - d_2 = \pm 2a.$$

Usando la fórmula de la distancia, obtenemos

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Pasando un radical al segundo miembro y elevando al cuadrado ambos miembros, resulta

$$(x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 4a^2.$$

Cancelando algunos términos, se obtiene

$$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Dividiendo por $4a$ y elevando de nuevo al cuadrado, encontramos

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)x^2 - y^2 = c^2 - a^2.$$

Dividiendo ahora por $c^2 - a^2$, resulta

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2} - 1} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Demostremos que c debe ser mayor que a . Recordemos que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que la longitud del tercer lado. Con referencia a la fig. 8-24, observamos que

$$2c + d_2 > d_1 \quad y \quad 2c + d_1 > d_2.$$

Por lo tanto

$$2c > d_1 - d_2 \quad y \quad 2c > d_2 - d_1;$$

Combinando estas desigualdades se obtiene $2c > |d_1 - d_2|$. Pero $|d_1 - d_2| = 2a$, y así $c > a$.

Definimos el número positivo b por la relación

$$b = \sqrt{c^2 - a^2},$$

y escribimos la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Recíprocamente, haciendo ver que todos los pasos son reversibles, podríamos demostrar que todo punto que satisface la ecuación anterior pertenece a la gráfica. (No entraremos en los detalles de esta demostración.)

La ecuación de la hipérbola escrita en esta forma muestra de inmediato que la curva es simétrica respecto a los ejes x y y .

Definiciones. La recta que pasa por los focos F_1 y F_2 de una hipérbola se llama eje transversal. La mediatriz del segmento F_1F_2 se llama eje conjugado. La intersección de estos ejes se llama centro.

[Ver la fig. 8-25, en la cual los focos son $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, el eje transversal es el eje x , el eje conjugado es el eje y , y el centro es el origen.]

Los puntos de intersección de una hipérbola con el eje transversal se llaman vértices. En la fig. 8-25, correspondiente a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

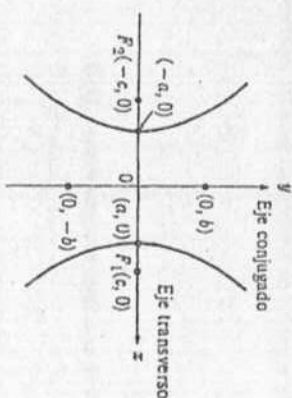


Figura 8-25

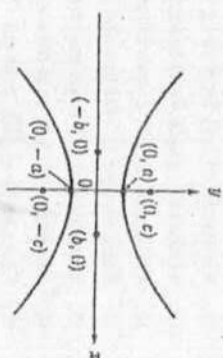


Figura 8-26

estos vértices están en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. La longitud $2a$ se llama longitud del eje transversal. Aun cuando los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ no están en la hipérbola, la longitud $2b$ es una magnitud útil, y se le llama longitud del eje conjugado. La excentricidad de una hipérbola se define como

$$e = c/a.$$

Obsérvese que siendo $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1. Si los focos de la hipérbola se colocan en el eje y , en los puntos $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación toma la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

donde, como antes,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

El aspecto de la curva es como el que se muestra en la fig. 8-26.

Al contrario de lo que sucede en la ecuación de la elipse, la ecuación de la hipérbola indica que los tamaños relativos de a y b no desempeñan ningún papel al determinarse dónde están los focos y los ejes. Una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{(\quad)^2} - \frac{y^2}{(\quad)^2} = 1$$

tiene siempre su eje transversal (y los focos) en el eje x , en tanto que una ecuación de la forma

$$\frac{y^2}{(\quad)^2} - \frac{x^2}{(\quad)^2} = 1$$

tiene siempre su eje transversal (y los focos) en el eje y . En el primer caso, el denominador del término en x^2 es a^2 , y el denominador del término en y^2 es b^2 . En el segundo caso, el denominador del término en y^2 es a^2 , y el denominador del término en x^2 es b^2 . En ambos casos se tiene que $c^2 = a^2 + b^2$.

Ejemplo 1. Dada la hipérbola con ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$, encontrar los ejes, las coordenadas de los vértices y de los focos, y la excentricidad. Dibujar la curva.

Solución. Dividiendo por 144, encontramos

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

y, por lo tanto,

$$a = 4, \quad b = 3, \quad c^2 = a^2 + b^2 = 25, \quad c = 5.$$

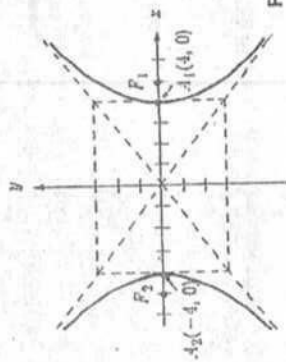


Figura 8-27

El eje transverso está en el eje x ; el eje conjugado está en el eje y ; los vértices están en $(\pm 4, 0)$; los focos están en $(\pm 5, 0)$; la excentricidad es $e = c/a = 5/4$. La curva está dibujada en la fig. 8-27, en la cual se ha construido un rectángulo trazando paralelas a los ejes por los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. A este rectángulo se le llama rectángulo central. Obsérvese que el segmento desde el origen a uno de los vértices del rectángulo tiene longitud c .

Ejemplo 2. Encontrar la ecuación de la hipérbola con vértices en $(0, \pm 6)$ y excentricidad $5/3$. Localizar los focos.

Solución. Como los vértices están en el eje y , la ecuación es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

con $a = 6$, $e = c/a = \frac{5}{3}$, y $c = (5 \cdot 6)/3 = 10$. Por lo tanto

$$b = \sqrt{100 - 36} = 8,$$

y la ecuación es

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1.$$

Los focos están en los puntos $(0, \pm 10)$.

Si $P(x_1, y_1)$ es un punto de la hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

podemos obtener la ecuación de la recta tangente a la hipérbola en P de un modo totalmente similar al caso de la recta tangente a la elipse. La pendiente de la hipérbola en un punto cualquiera, por derivación implícita, es

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

La ecuación de la recta tangente en $P(x_1, y_1)$ es

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2.$$

Pero, como P pertenece a la hipérbola, sabemos que $b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2$, de modo que

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

es la ecuación de la recta tangente.

Ejemplo 3. Encontrar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

en el punto $(5, -\frac{16}{3})$.

Solución. El punto $(5, -\frac{16}{3})$ pertenece a la hipérbola, de modo que la ecuación de la tangente es

$$\frac{5x}{9} + \frac{16y}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 5x + 3y - 9 = 0.$$

La normal tiene pendiente $\frac{3}{5}$, y su ecuación es

$$y + \frac{16}{3} = \frac{3}{5}(x - 5).$$

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 10, hallar las longitudes de los ejes transversos y conjugado, las coordenadas de los focos y de los vértices, y la excentricidad. Dibujar la curva.

- $16x^2 - 9y^2 = 144$
- $16x^2 - 9y^2 + 576 = 0$
- $25x^2 - 144y^2 + 3600 = 0$
- $25x^2 - 144y^2 - 900 = 0$
- $2x^2 - 3y^2 - 6 = 0$
- $2x^2 - 3y^2 + 6 = 0$
- $5x^2 - 2y^2 = 10$
- $5x^2 - 4y^2 + 13 = 0$
- $3x^2 - 2y^2 = 1$
- $2x^2 - 3y^2 = -1$

En cada uno de los problemas 11 a 20, hallar la ecuación de la hipérbola (o de las hipérbolas) que satisfacen las condiciones dadas.

- Vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 7, 0)$
- Vértices en $(\pm 4, 0)$, focos en $(\pm 6, 0)$
- Vértices en $(0, \pm 7)$, excentricidad $4/3$
- Focos en $(\pm 6, 0)$, excentricidad $3/2$
- Excentricidad $\sqrt{5}$, focos en el eje x , centro en el origen, pasa por el punto $(3, 2)$
- Vértices en $(0, \pm 4)$, pasa por $(-2, 5)$
- Focos en $(0, \pm \sqrt{10})$, pasa por $(2, 3)$
- Ejes en los ejes coordenados, pasa por $(4, 2)$ y $(-6, 7)$
- Ejes en los ejes coordenados, pasa por $(-3, 4)$ y $(5, 6)$

20. Focos en $(\pm 8, 0)$, longitud del eje conjugado 6.
21. Obtener la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $(4, 0)$ y $(-4, 0)$ sea siempre igual a 2.
22. Obtener la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $(0, 7)$ y $(0, -7)$ sea siempre igual a 3.
23. Obtener la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $(10, 0)$ y $(2, 0)$ sea siempre igual a 1.
24. Obtener la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que la diferencia de sus distancias a $(2, 0)$ y $(2, 12)$ sea siempre igual a 3.
25. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la hipérbola $(x^2/16) - (y^2/4) = 1$ en el punto $(-5, \frac{3}{2})$.
26. Hallar el punto de intersección de las rectas tangentes a la hipérbola $(y^2/36) - (x^2/9) = 1$ en los puntos $(1, -2\sqrt{10})$ y $(-4, 10)$.
27. Dada la hipérbola $(x^2/6) - (y^2/2) = 1$, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a ella, que pasan por el punto $(1, -1)$.
28. Obtener la ecuación de la gráfica de todos los puntos tales que sus distancias a $(5, 0)$ sean siempre $\frac{5}{3}$ veces sus distancias a la recta $x = 9/5$.
29. Un radio focal es el segmento de recta que une un punto de la hipérbola con uno de los focos. Los focos de una hipérbola son $(4, 0)$ y $(-4, 0)$. La diferencia de las longitudes de los radios focales de cualquier punto es siempre ± 6 . Hallar la ecuación de la hipérbola.
30. Una hipérbola tiene sus focos en $(c, 0)$ y $(-c, 0)$. El punto $P(2, 4)$ pertenece a la hipérbola, y los radios focales correspondientes a este punto (ver problema 29) son perpendiculares entre sí. Hallar la ecuación de la hipérbola.

8. TRASLACION DE EJES

En la definición de las curvas de segundo grado y en la descripción de las propiedades principales, no utilizamos sistemas de coordenadas. Sin embargo, estos sistemas resultan esenciales si queremos encontrar las ecuaciones de estas curvas y también si queremos utilizar los métodos de la geometría analítica.

Al utilizar los métodos de la geometría analítica, colocamos los ejes en una posición «conveniente» respecto a la curva que estamos considerando. En los ejemplos de elipses e hipérbolas que hemos estudiado, los focos estaban ubicados en uno de los ejes, simétricamente respecto al origen. Supongamos ahora que tenemos un problema en el cual la curva (hipérbola, parábola, elipse, etc.) no está situada en una posición tan conveniente respecto a los ejes. En este caso, desearíamos cambiar el sistema de coordenadas para tener la curva en una ubicación conveniente y familiar. El proceso de efectuar este cambio se llama transformación de coordenadas.

El primer tipo de transformación que consideramos es uno de los más simples, llamado traslación de ejes. En la fig. 8-28 se muestra el habitual sistema de coordenadas cartesianas xy . Agreguemos un sistema adicional de coordenadas con eje x' paralelo al eje x , a k unidades de él, y con eje y' paralelo a y , a h unidades

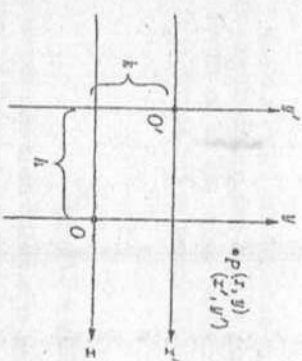
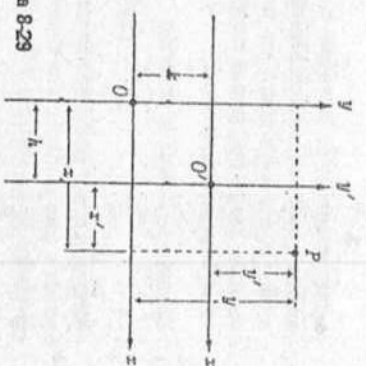


Figura 8-28

Figura 8-29



de él. Esto significa que el origen O' del nuevo sistema de coordenadas tiene coordenadas (h, k) , referidas al sistema original. Las direcciones positivas de x' e y' son las mismas que las de los ejes x e y . Si P es un punto cualquiera del plano, ¿cuáles serán sus coordenadas en cada uno de los sistemas? Supóngase que P tiene coordenadas (x, y) en el sistema original y (x', y') en el nuevo sistema, y supóngase que el nuevo origen tiene coordenadas (h, k) en el sistema original. Una inspección de la fig. 8-29 nos sugiere que si $x > h > 0$, y si $y > k > 0$, entonces

$$x = x' + h, \quad y = y' + k \quad (1)$$

o, en forma equivalente,

$$x' = x - h, \quad y' = y - k. \quad (2)$$

La demostración de estas fórmulas se efectúa fácilmente restando las apropiadas distancias dirigidas que se muestran en la fig. 8-29. Ver el problema 29 al final de esta sección.

Se dice que dos sistemas coordenados xy y $x'y'$ que satisfacen las ecuaciones (1), o, equivalentemente, las ecuaciones (2), están relacionadas por una traslación de ejes. La ecuación más general de segundo grado tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

donde A, B, C, D, E y F representan constantes. Además, supondremos que A, B y C no son todos iguales a cero, pues entonces la ecuación sería de primer grado. Observemos que las ecuaciones que hemos estado discutiendo son todas casos especiales de la ecuación anterior. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 16 = 0$ tiene $A = 1, B = 0, C = 1, D = E = 0, F = -16$. La elipse $(x^2/9) + (y^2/4) = 1$, tiene $A = \frac{1}{9}, B = 0, C = \frac{1}{4}, D = E = 0, F = -1$. Y, análogamente, vemos que las parábolas e hipérbolas tienen ecuaciones de la misma forma.

Un caso interesante ocurre cuando $A = 1, B = 0, C = -1, D = E = F = 0$. La ecuación resultante es $x^2 - y^2 = 0$, o bien $y = \pm x$, cuya gráfica consta de dos rectas que se cortan. Las curvas de segundo grado cuya gráfica se reduce a puntos o rectas frecuentemente se denominan degeneradas.

Ilustramos ahora la forma en que la traslación de ejes reduce una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

a otra ecuación de la misma forma, pero con nuevas letras (x', y') y con D y E ambos iguales a cero (con algunas excepciones). Aunque esté representada de otro modo, la ecuación podrá ser reconocida fácilmente como una de las curvas de segundo grado que hemos estudiado. El principal recurso en este proceso es el de «completar los cuadrados».

Ejemplo 1. Dada la ecuación

$$9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0,$$

determinar, por medio de una traslación de ejes, si la gráfica de la ecuación corresponde a una parábola, una elipse o una hipérbola. Determinar el foco (o los focos), el vértice (o los vértices) y la excentricidad. Trazar la curva.

Solución. Para completar los cuadrados en x e y , escribimos la ecuación en la forma,

$$9(x^2 + 2x) + 25(y^2 - 4y) = 116.$$

Sumamos 1 al paréntesis de la expresión en x , lo que significa sumar 9 al primer miembro; y sumamos 4 al paréntesis de la expresión en y , lo que significa sumar 100 al primer miembro. Así obtenemos

$$9(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 - 4y + 4) = 116 + 9 + 100$$

$$\Leftrightarrow 9(x + 1)^2 + 25(y - 2)^2 = 225.$$

Esto nos da la clave para la traslación de ejes. Definimos

$$x' = x + 1, \quad y' = y - 2.$$

Esto es, la traslación se efectúa con $h = -1$, $k = 2$. La ecuación se transforma en

$$9x'^2 + 25y'^2 = 225.$$

Dividiendo por 225, encontramos

$$\frac{x'^2}{25} + \frac{y'^2}{9} = 1,$$

que reconocemos como una elipse con $a = 5$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2 = 16$, $c = 4$, $e = \frac{4}{5}$. En el sistema x', y' , tenemos: centro en $(0, 0)$, vértices en $(\pm 5, 0)$, focos en $(\pm 4, 0)$.

En el sistema xy , usamos las relaciones $x = x' - 1$, $y = y' + 2$, para obtener: centro en $(-1, 2)$; vértices en $(4, 2)$ y en $(-6, 2)$; focos en $(3, 2)$ y en $(-5, 2)$. La curva está dibujada en la fig. 8-30.

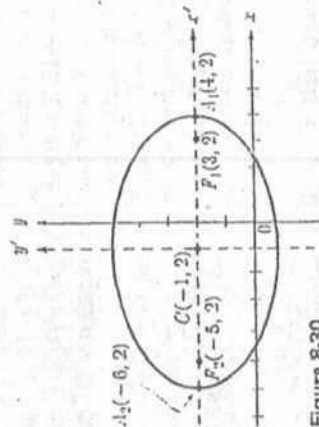


Figura 8-30

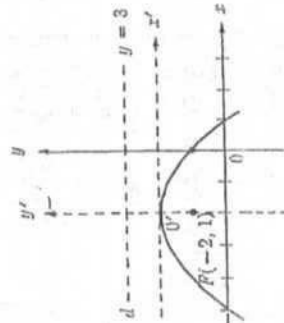


Figura 8-31

Ejemplo 2. Discutir las propiedades de la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 4x + 4y - 4 = 0.$$

Solución. Aquí tenemos $A = 1$, $C = 0$, $D = 4$, $E = 4$, $F = -4$. Hay solamente un término de segundo grado. Completando cuadrados, obtenemos

$$(x^2 + 4x + 4) = -4y + 4 + 4 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = -4(y - 2).$$

En esta expresión vemos que la adecuada traslación de ejes es

$$x' = x + 2, \quad y' = y - 2,$$

y tenemos

$$x'^2 = -4y',$$

que reconocemos como una parábola. En el sistema $x'y'$, el vértice es $(0, 0)$, el foco es $(0, -1)$ (porque $p = 2$); la directriz es $y' = 1$. En el sistema xy (porque $h = -2$ y $k = 2$), resulta que el vértice es $(-2, 2)$, el foco es $(-2, 1)$ y la directriz es la recta $y = 3$. La curva está dibujada en la fig. 8-31.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la elipse con excentricidad $1/2$, y focos en $(4, 2)$ y en $(2, 2)$.

Solución. El centro de la elipse es el punto medio del segmento que une los focos F , por lo tanto, es el punto $(3, 2)$. El eje mayor de la elipse está en la recta $y = 2$. Para llevar el origen al centro de la elipse, mediante una traslación, hacemos

$$x' = x - 3, \quad y' = y - 2.$$

En este sistema, los focos son $(\pm 1, 0)$; $e = c/a = \frac{1}{2}$; y , puesto que $c = 1$, tenemos que $a = 2$. También, de $c^2 = a^2 - b^2$ se obtiene $b^2 = 3$. En el sistema $x'y'$, la ecuación es

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{3} = 1.$$

En el sistema xy , la ecuación es

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{3} = 1,$$

o

$$3(x - 3)^2 + 4(y - 2)^2 = 12 \Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 - 18x - 16y + 31 = 0.$$

Ahora estamos en condiciones de discutir todas las curvas que la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede representar, mediante el siguiente teorema:

Teorema 2. (a) Si A y C son ambos positivos, o ambos negativos, la gráfica es una elipse, una circunferencia (si $A = C$), un punto o nada. (b) Si A y C son de signo opuesto, la gráfica es una hipérbola o dos rectas que se cortan. (c) Si una de las constantes A o C es cero, la gráfica es una parábola, dos rectas paralelas, una recta o nada.

No demostraremos este teorema, pero ilustraremos algunas de sus aplicaciones por medio de ejemplos.

La ecuación $3x^2 + y^2 + 5 = 0$ no tiene gráfica, porque la suma de cantidades positivas nunca puede ser igual a cero. Esto nos muestra el último caso de (a) en el teorema 2. En (c), la ecuación $x^2 - 2x = 0$ ($A = 1, C = 0, D = -2, E = 0, F = 0$) es un ejemplo de dos rectas paralelas; en tanto que $x^2 - 2x + 1 = 0$ ($A = 1, C = 0, D = -2, E = 0, F = 1$) es un ejemplo de una recta.

La demostración de este teorema está al alcance de cualquier estudiante interesado.

PROBLEMAS

1. Un sistema de coordenadas cartesianas es trasladado a un nuevo sistema $x'y'$, cuyo origen es $(-3, 4)$. Los puntos P, Q, R y S tienen coordenadas $(4, 3), (-2, 7), (-6, 3/2)$ y $(-5, -2)$, respectivamente, en el sistema original. Hallar las coordenadas de estos puntos en el nuevo sistema.
2. Una traslación de coordenadas lleva el origen al punto de intersección de las rectas $2x + 3y - 4 = 0, x + 4y - 1 = 0$. Determinar la traslación de coordenadas y las ecuaciones de estas rectas en el nuevo sistema.
3. Una traslación de coordenadas lleva el origen al punto de intersección de las rectas $3x - 7y + 1 = 0, 2x - 3y - 6 = 0$. Hallar las ecuaciones de estas rectas en el nuevo sistema de coordenadas.

En los problemas 4 a 17, trasladar las coordenadas de modo que se eliminen los términos de primer grado (o un término de primer grado en el caso de las parábolas). Describir las propiedades principales (como en los ejemplos 1 y 2) y dibujar las curvas.

- | | |
|--|--|
| 4. $y^2 + 8x - 6y + 1 = 0$ | 5. $25x^2 + 16y^2 + 50x - 64y - 311 = 0$ |
| 6. $9x^2 + 16y^2 - 36x - 32y - 92 = 0$ | 7. $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y + 29 = 0$ |
| 8. $x^2 - 4x + 6y + 16 = 0$ | 9. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$ |
| 10. $y^2 - 4x + 10y + 5 = 0$ | 11. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 8y + 4 = 0$ |
| 12. $4x^2 - 9y^2 + 8x + 18y + 4 = 0$ | 13. $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$ |
| 14. $x^2 + 6x - 8y + 1 = 0$ | 15. $3x^2 - 2y^2 + 6x - 8y - 17 = 0$ |
| 16. $2x^2 + 3y^2 - 8x - 6y + 11 = 0$ | 17. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 8 = 0$ |

En los problemas 18 a 23, hallar la ecuación de la gráfica indicada. Dibujar la curva.

18. Parábola: vértice en $(2, 1)$; directriz $y = 3$
19. Elipse: vértices en $(2, -3)$ y $(2, 5)$; focos en $(2, -2)$ y $(2, 4)$
20. Elipse: focos en $(-2, 3)$ y $(4, 3)$; longitud del eje mayor 10
21. Hipérbola: vértices en $(-3, 1)$ y $(5, 1)$; pasa por $(-5, 3)$
22. Hipérbola: vértices en $(2, -5)$ y $(2, 7)$; focos en $(2, -6)$ y $(2, 8)$
23. Parábola: eje $y = -1$; directriz $x = 2$; foco en $(5, -1)$

En los problemas 24 a 28, hallar la ecuación de la gráfica indicada, identificar la curva.

24. La gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(4, 3)$ son iguales a sus distancias a la recta $x = 6$
25. La gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(2, 1)$ son iguales a la mitad de sus distancias a la recta $y = -2$

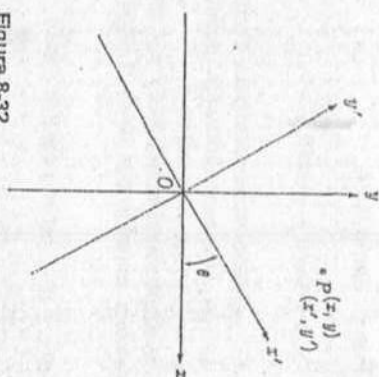


Figura 8-32

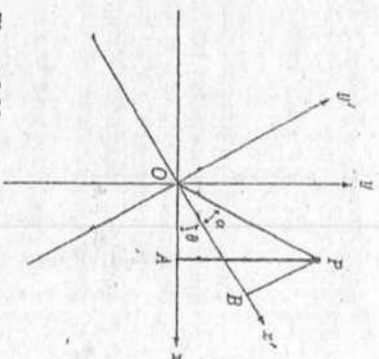


Figura 8-33

26. La gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(-1, 2)$ son iguales al doble de sus distancias a la recta $x = -4$
27. La gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(2, -3)$ son iguales al doble de sus distancias a $(-4, 3)$
28. La gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(1, 2)$ son iguales a sus distancias a la recta $3x - 4y - 5 = 0$
29. Con referencia a la fig. 8-29, establecer las fórmulas (1) de la página 275. Use distancias dirigidas, y verifique que el resultado es el mismo si P , en la fig. 8-29, está ubicado en el segundo, tercero o cuarto cuadrante.
30. Demostrar el teorema 2.

9. ROTACION DE EJES. LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Supóngase que efectuamos una transformación de coordenadas de un sistema xy a otro $x'y'$, de la siguiente manera: mantenemos fijo el origen, y obtenemos los ejes x' e y' rotando los ejes x e y un ángulo θ , en sentido antihorario, como lo ilustra la fig. 8-32. Cada punto P tendrá coordenadas (x, y) en el sistema original, (x', y') en el nuevo sistema. Determinaremos la relación entre (x, y) y (x', y') . Tracemos las rectas OP, AP y BP , como se muestra en la fig. 8-33, y notemos que $x = OA, y = AP, x' = OB, y' = BP$. Tenemos

$$x = OA = OP \cos(\theta + \alpha), \quad y = AP = OP \sin(\theta + \alpha).$$

Recordando de la trigonometría la fórmula para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= OP \cos \theta \cos \alpha - OP \sin \theta \sin \alpha, \\ y &= OP \sin \theta \cos \alpha + OP \cos \theta \sin \alpha. \end{aligned}$$

Pero, $\overline{OP} \cos \alpha = \overline{OB} = x'$ y $\overline{OP} \sin \alpha = \overline{BP} = y'$. Por lo tanto,

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta.$$

Cuando dos sistemas coordenados, xy y $x'y'$, satisfacen estas ecuaciones, decimos que están relacionados por una rotación de ejes. Más específicamente, podemos decir que los ejes x' e y' se obtienen al rotar los ejes x e y un ángulo θ .

Para expresar x' e y' en términos de x e y , simplemente despejamos x' e y' en las anteriores ecuaciones. Multiplicando la primera ecuación por $\cos \theta$, la segunda por $\sin \theta$, y sumando, obtenemos

$$x \cos \theta + y \sin \theta = x' (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad \text{o} \quad x' = x \cos \theta + y \sin \theta.$$

Análogamente, hallamos

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta.$$

Ejemplo 1. Un sistema de coordenadas cartesianas se rota en 60° . Hallar las coordenadas del punto $P(3, -1)$ en el nuevo sistema. ¿Cuál es la ecuación de la recta $2x - 3y + 1 = 0$ en el sistema rotado?

Solución. Tenemos que $\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Las ecuaciones que relacionan los sistemas xy y $x'y'$ son

$$x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}y, \quad y' = -\frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y.$$

Las coordenadas de P son $x' = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $y' = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}$. Las relaciones que dan el sistema xy en términos del sistema $x'y'$ son

$$x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\sqrt{3}y', \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y';$$

y así, la ecuación de la recta en el nuevo sistema es

$$2\left(\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}\sqrt{3}y'\right) - 3\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x' + \frac{1}{2}y'\right) + 1 = 0, \\ \Leftrightarrow (1 - \frac{3}{2}\sqrt{3})x' - (\frac{3}{2} + \sqrt{3})y' + 1 = 0.$$

Recordemos que la ecuación más general de segundo grado tiene la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, B, C \text{ no simultáneamente nulos}).$$

En la sección 8 mostramos (cuando $B = 0$) cómo podían trasladarse los ejes de modo que en el nuevo sistema $D = E = 0$ (excepto en el caso de las parábolas, en el cual sólo podríamos hacer cero uno de ellos).

Demostraremos ahora que *siempre es posible rotar los ejes de modo que en el nuevo sistema no haya término en $x'y'$* . Para esto, tomamos las ecuaciones

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta,$$

y reemplazamos en la ecuación general de segundo grado. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} Ax^2 &= A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2, \\ Bxy &= B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta), \\ Cy^2 &= C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2, \\ Dx &= D(x' \cos \theta - y' \sin \theta), \\ Ey &= E(x' \sin \theta + y' \cos \theta), \\ F &= F. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones, obtenemos (después de desarrollar el segundo miembro)

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\ = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0, \end{aligned}$$

donde A' , B' , C' , D' , E' , y F' son abreviaturas de

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta, \\ B' &= 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ C' &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta, \\ E' &= -D \sin \theta + E \cos \theta, \\ F' &= F. \end{aligned}$$

Nuestro propósito es escoger θ de modo que el término en $x'y'$ no aparezca, para que B' sea cero. Igualmente B' a cero, y veamos qué ocurre:

$$2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

Recordemos de la trigonometría las fórmulas del ángulo doble

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta,$$

y escribimos

$$(C - A) \sin 2\theta + B \cos 2\theta = 0$$

o bien

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}.$$

En otras palabras, si elegimos θ de modo que $\cot 2\theta = (A - C)/B$, obtendremos $B' = 0$. Siempre existe un ángulo 2θ entre 0 y π que satisface esta ecuación.

El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

Ejemplo 2. Se da la ecuación $8x^2 - 4xy + 5y^2 = 36$. Elegir nuevos ejes, por rotación, de modo que se elimine el término en $x'y'$. Dibujar la curva y determinar los elementos principales.

Solución. Tenemos $A = 8$, $B = -4$, $C = 5$, $D = E = 0$, $F = -36$. Elegimos $\cos 2\theta = (A - C)/B = (8 - 5)/(-4) = -\frac{3}{4}$. Esto significa que 2θ está en el segundo cuadrante y que $\cos 2\theta = -\frac{3}{4}$.

Recordemos de la trigonometría las fórmulas del ángulo mitad

$$\sin \theta = \sqrt{(1 - \cos 2\theta)/2}, \quad \cos \theta = \sqrt{(1 + \cos 2\theta)/2}.$$

usándolas, obtenemos

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

con lo que hallamos las fórmulas de la rotación

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{x' - 2y'}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = \frac{2x' + y'}{\sqrt{5}}.$$

Sustituyendo en la ecuación dada, obtenemos

$$\frac{8}{5}(x' - 2y')^2 - \frac{4}{5}(x' - 2y')(2x' + y') + \frac{5}{5}(2x' + y')^2 = 36;$$

y, desarrollando, encontramos que

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

La gráfica es una elipse, dibujada en la fig. 8-34. Las coordenadas x', y' de los vértices son $(\pm 3, 0)$, y las de los focos son $(\pm \sqrt{5}, 0)$. La excentricidad es $\sqrt{5}/3$. En el sistema original, los vértices son

$$(3/\sqrt{5}, 6/\sqrt{5}), (-3/\sqrt{5}, -6/\sqrt{5}).$$

Los focos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$.

En el ejemplo 2, los coeficientes D y E son iguales a cero. Cuando se presenta un problema con B , D y E todos diferentes de cero, podemos eliminarlos efectuando sucesivamente una rotación (para eliminar B) y una traslación (para eliminar D y E). Aquí tenemos un ejemplo de la forma en que se desarrollan los procesos en la matemática: se construye una estructura complicada combinando elementos simples. La técnica de efectuar varias transformaciones sucesivas se utiliza frecuentemente en los problemas matemáticos.

Ejemplo 3. Dada la ecuación

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 52x + 26y + 81 = 0,$$

reducirla a su forma estándar, eliminando B , D y E . Identificar la curva y determinar sus principales características.

Solución. Primero rotamos, y escogemos θ de modo que

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B} = \frac{4 - 9}{-12} = \frac{5}{12}.$$

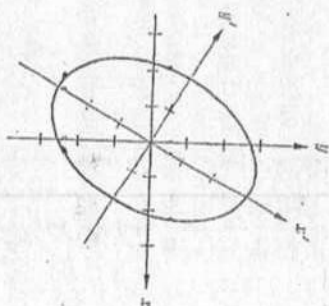


Figura 8-34

Entonces, 2θ está en el primer cuadrante y $\cos 2\theta = \frac{5}{13}$. Por las fórmulas del ángulo-mitad (como en el ejemplo 2),

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{5}{13}}, \quad \sin \theta = \sqrt{\frac{8}{13}}.$$

La rotación de ejes deseada, queda definida por

$$x = \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y').$$

Sustituyendo en la ecuación dada, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4}{13}(9x'^2 - 12x'y' + 4y'^2) - \frac{12}{13}(6x'^2 + 5x'y' - 6y'^2) \\ + \frac{16}{13}(4x'^2 + 12x'y' + 9y'^2) - 4\sqrt{13}(3x' - 2y') \\ + 2\sqrt{13}(2x' + 3y') + 81 = 0, \end{aligned}$$

y, después de simplificar,

$$13y'^2 - 8\sqrt{13}x' + 14\sqrt{13}y' + 81 = 0.$$

Obsérvese que en el proceso de eliminar el término en $x'y'$, también hemos eliminado el término en x'^2 . Ahora nos damos cuenta de que la curva debe ser una parábola. Para hacer una adecuada traslación de ejes, completamos los cuadrados de los términos en y' . Esto nos da

$$\begin{aligned} 13(y'^2 + \frac{14}{13}\sqrt{13}y') &= 8\sqrt{13}x' - 81 \\ \Leftrightarrow 13\left(y' + \frac{7}{\sqrt{13}}\right)^2 &= 8\sqrt{13}\left(x' - \frac{4}{\sqrt{13}}\right). \end{aligned}$$

La traslación de ejes,

$$x'' = x' - \frac{4}{\sqrt{13}}, \quad y'' = y' + \frac{7}{\sqrt{13}},$$

convierte a la ecuación en

$$y''^2 = \frac{8}{\sqrt{13}}x''.$$

En el sistema $x''y''$, $p = 4/\sqrt{13}$, el vértice está en el origen, el foco está en $(2/\sqrt{13}, 0)$, la directriz es la recta $x'' = -2/\sqrt{13}$, y el eje de la parábola es el eje x'' . En el sistema $x'y'$, el foco está en $(6/\sqrt{13}, -7/\sqrt{13})$ y la directriz es la recta $x' = 2/\sqrt{13}$. En el sistema original xy , encontramos que el foco está en $(\frac{12}{13}, -\frac{1}{13})$, y que la directriz es la recta $3x + 2y = 2$. La parábola y todos los conjuntos de ejes están dibujados en la fig. 8-35. Los puntos $(3, 2)$ y $(5, 1)$, que aparecen en el dibujo, son simples ayudas para graficar los ejes.

En una rotación de ejes, la ecuación general de segundo grado

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

se transforma en la ecuación

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

con

$$A' = A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta,$$

$$B' = 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta),$$

$$C' = A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta.$$

Al calcular $A' + C'$ se obtiene

$$A' + C' = A(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + C(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = A + C.$$

En otras palabras, aunque A se convierte en A' y C en C' cuando se rota cualquier ángulo θ , la cantidad $A + C$ permanece invariable. Por eso decimos que $A + C$ es invariante bajo una rotación de ejes.

Si calculamos la expresión $B'^2 - 4A'C'$ (lo que es muy tedioso) y aplicamos algo de trigonometría, hallamos que

$$B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC.$$

En otras palabras, $B^2 - 4AC$ también es un invariante bajo la rotación de ejes.

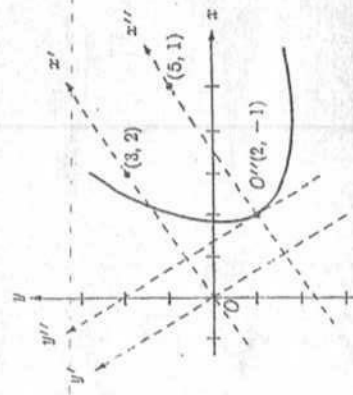


Figura 8-35

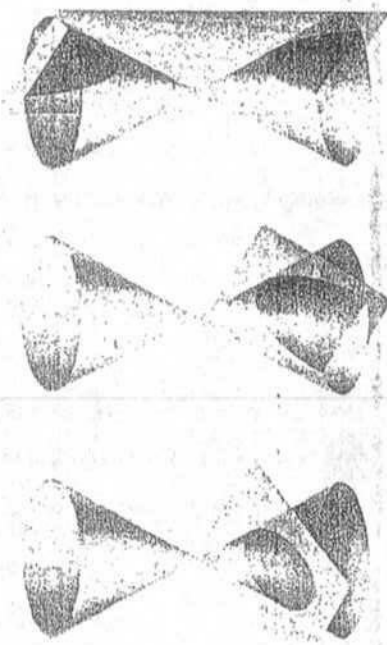


Figura 8-36

(a) Elipse

(b) Parábola

(c) Hipérbola

Se puede verificar fácilmente que $A + C$ y $B^2 - 4AC$ son también invariantes bajo la traslación de ejes. Por tanto, podemos formular el siguiente teorema para las ecuaciones generales de segundo grado.

Teorema 3. (a) Si $B^2 - 4AC < 0$, la curva es una *elipse*, una *circunferencia*, un *punto* o *bien no hay curva*. (b) Si $B^2 - 4AC > 0$, la curva es una *hipérbola* o *dos rectas que se cortan*. (c) Si $B^2 - 4AC = 0$, la curva es una *parábola*, *dos rectas paralelas*, una *recta*, o *bien no hay curva*.

A la circunferencia, elipse, parábola e hipérbola se les llama frecuentemente secciones cónicas, porque todas ellas pueden obtenerse como secciones de un cono recto circular al ser cortado por planos. Se considera que el cono se extiende indefinidamente a ambos lados de su vértice. La parte del cono situada a un lado del vértice se denomina *hoja* del cono.

Si el plano corta solamente una hoja, como en la fig. 8-36(a), la curva de la intersección es una *elipse*. (La circunferencia es un caso especial de la elipse, y resulta cuando el plano es perpendicular al eje del cono.) Si el plano es paralelo a una de las generatrices del cono, la intersección es una *parábola*, como se muestra en la fig. 8-36(b). Si el plano corta ambas hojas, la curva es una *hipérbola*, con una rama en cada hoja, como en la fig. 8-36(c).

También ocurren ciertos casos degenerados. Cuando el plano interseca las dos hojas y pasa por el vértice, la gráfica consta de dos rectas que se cortan. Si el plano contiene a una de las generatrices, la gráfica de la intersección es una línea recta. Finalmente, la gráfica se reduce a un punto si el plano pasa por el vértice y no corta a ninguna de las dos hojas del cono. El caso degenerado de dos rectas paralelas no puede obtenerse como sección plana de un cono.

PROBLEMAS

En cada uno de los problemas 1 a 12, pasar del sistema xy a un sistema $x'y'$, de modo que no exista término en $x'y'$. Para las elipses y las hipérbolas, hallar las coordenadas de los

APENDICE 1

SECCIONES CONICAS. SUPERFICIES CUADRATICAS

1. LA CIRCUNFERENCIA

Consideremos la ecuación general

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde D, E, F son números cualesquiera. Completando el cuadrado, obtenemos

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} = -F + \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4},$$

o

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(D^2 + E^2 - 4F).$$

Llegamos a la conclusión de que tal ecuación representa una circunferencia con centro en $(-D/2, -E/2)$ y radio $1/2\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$. Pero existe un problema: si la cantidad bajo el radical es negativa, no existe circunferencia y, por lo tanto, no hay gráfica. Si es igual a cero, la circunferencia se reduce a un punto. La ecuación representa una circunferencia de radio $1/2\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ si $D^2 + E^2 > 4F$, y solamente en ese caso.

Una circunferencia queda determinada cuando se dan los números D, E y F . Esto significa que, en general, tres condiciones determinan una circunferencia. Todos sabemos que hay una circunferencia única que pasa por tres puntos (que no son colineales). En el siguiente ejemplo se muestra la forma de obtener la ecuación cuando los tres puntos están dados.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-3, 4)$, $(4, 5)$ y $(1, -4)$. Localizar el centro y determinar el radio.

Solución. Si la ecuación de la circunferencia buscada es

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

entonces las coordenadas de todo punto de la circunferencia deben satisfacer esta ecuación. Sustituyendo, obtenemos

$$(-3, 4): -3D + 4E + F = -25;$$

$$(4, 5): 4D + 5E + F = -41;$$

$$(1, -4): D - 4E + F = -17.$$

Restando la segunda ecuación de la primera y la tercera de la segunda, elimi-

namos F y obtenemos

$$7D + E = -16, \quad 3D + 9E = -24.$$

Resolviendo este sistema, encontramos que $D = -2, E = -2$. Sustituyendo estos valores en cualquiera de las ecuaciones originales, hallamos que $F = -23$. La ecuación de la circunferencia es

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0.$$

Se obtiene el centro y el radio completando el cuadrado. Escribimos

$$(x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) = 23 \quad y \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25.$$

El centro es $(1, 1)$ y el radio es 5.

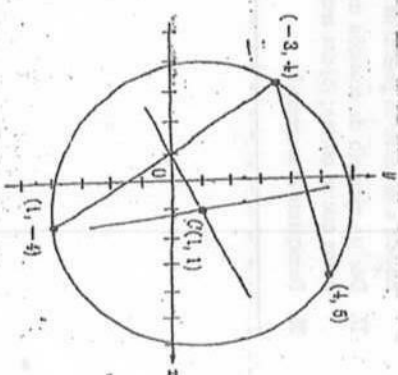
El problema del ejemplo 1 podría ser resuelto en otra forma. (1) Hallar la mediatriz del segmento que une los dos primeros puntos. (2) Hacer lo mismo con los puntos primero y tercero (o segundo y tercero). (3) El punto de intersección de las dos mediatrices es el centro de la circunferencia. (4) El radio se obtiene hallando la distancia del centro a cualquiera de los puntos dados. (5) Conociendo el centro y el radio, escribimos la ecuación de la circunferencia. (Ver la fig. A-1.)

La ecuación

$$x^2 + (y - k)^2 = 25$$

representa una familia de circunferencias. Todas las circunferencias de esta familia tienen radio 5 y, además, sus centros están en el eje y . Puesto que una recta queda determinada por dos condiciones, en tanto que una circunferencia queda determinada por tres condiciones, las familias de circunferencias son más extensas que las familias de rectas, desde algunos puntos de vista. Por ejemplo, todas las circunferencias de radio 3 constituyen un conjunto «más grande» que el de todas las rectas de pendiente 7. Esto debe entenderse en el siguiente sentido: considerando cualquier punto del plano, solamente un miembro de la anterior familia de rectas pasa por dicho punto, en tanto que hay un número infinito de circunferencias de radio 3 que pasan por ese mismo punto. La familia de rectas de pendiente 7, viene a ser una familia con un parámetro. La ecuación $y = 7x + k$

Figura A-1



vértices. Para cada parábola, hallar las coordenadas xy del foco y la ecuación xy de la directriz. Si la gráfica consta de rectas, encontrar las ecuaciones de éstas en el sistema xy .

1. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 9$
2. $7x^2 - 4xy + 4y^2 = 240$
3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 25$
4. $7x^2 - 6xy - y^2 = 0$
5. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$
6. $x^2 + 4xy + y^2 + 32 = 0$
7. $8x^2 + 12xy + 13y^2 = 884$
8. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 40x - 20y = 0$
9. $x^2 - 2xy = 10$
10. $xy = 4$
11. $2xy - 3y^2 = 5$
12. $xy = -3$

En cada uno de los problemas 13 a 22, rotar los ejes a un sistema $x'y'$ de modo que no aparezca el término en xy . Trasladar en seguida los ejes de modo que se eliminen los términos de primer grado. Dibujar las gráficas e identificar sus principales características.

13. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 5 = 0$
14. $4x^2 - 8xy - 2y^2 + 20x - 4y + 15 = 0$
15. $4x^2 + 4xy + y^2 - 24x + 38y - 139 = 0$
16. $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 56x - 42y + 49 = 0$
17. $12x^2 + 24xy + 19y^2 - 12x - 40y + 31 = 0$
18. $4x^2 - 4\sqrt{5}xy + 5y^2 + 8x - 4\sqrt{5}y - 21 = 0$
19. $31x^2 + 10\sqrt{3}xy + 21y^2 - (124 - 40\sqrt{3})x + (168 - 20\sqrt{3})y + 316 - 80\sqrt{3} = 0$
20. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
21. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2\sqrt{3}x - 3y - 3 = 0$
22. $3xy - 4y^2 + x - 2y + 1 = 0$

23. Demostrar que una ecuación de segundo grado con término en xy no puede representar a una circunferencia.

24. Demostrar que una ecuación de segundo grado sin D ni E (o sea sin términos en x e y) no puede representar a una parábola.

25. Demostrar que $B^2 - 4AC$ es invariante bajo la rotación y la traslación de ejes.

26. Sea la transformación de coordenadas

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy,$$

donde a, b, c, d son números tales que $ad - bc$ es positivo. Si se aplica esta transformación a la ecuación general de segundo grado, ¿qué se puede decir acerca de $B'^2 - 4A'C'$?

27. Dar un ejemplo de ecuación de segundo grado tal que la gráfica degenera en (a) dos rectas que se cortan; (b) dos rectas paralelas; (c) una recta; (d) un punto.

28. Demostrar el teorema 3.

tiene una constante k que puede tomar cualquier valor real. La ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = 9$$

es una familia de circunferencias con dos parámetros. Los números h y k pueden tomar independientemente cualquier valor numérico.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en la recta $y = x$ y radio 7.

Solución. El centro $C(h, h)$ al estar en la recta $y = x$, debe tener $h = k$. La ecuación buscada es

$$(x - h)^2 + (y - h)^2 = 49.$$

Esta es una familia de circunferencias con un parámetro.

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en $(3, -2)$.

Solución. La ecuación es

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = r^2$$

Esta es una familia de circunferencias concéntricas con un parámetro.

Las dos circunferencias

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + Dx + Ey + F &= 0, \\ x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' &= 0, \end{aligned}$$

pueden o no intersectarse. Si restamos una de estas ecuaciones de la otra, obtenemos

$$(D - D')x + (E - E')y + (F - F') = 0,$$

que es la ecuación de una recta, a menos que $D' = D$ y $E' = E$. Esta recta tiene pendiente $-(D - D')/(E - E')$ (si $E \neq E'$). Los centros de las circunferencias son $(-D/2, -E/2)$ y $(-D'/2, -E'/2)$, respectivamente. La pendiente de la recta que pasa por los centros es

$$\frac{(-E'/2) + (E/2)}{(-D'/2) + (D/2)} = \frac{E - E'}{D - D'},$$

que es la inversa con signo cambiado de $-(D - D')/(E - E')$. La ecuación de la recta obtenida, restando las ecuaciones de dos circunferencias se llama eje radical, y es perpendicular a la recta que une los centros de las circunferencias. Además, si las circunferencias se intersectan, los puntos de intersección deben satisfacer las ecuaciones de ambas circunferencias. Estos puntos deben estar, por lo tanto, en el eje radical.

Ejemplo 4. Hallar los puntos de intersección de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0, \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y - 8 = 0.$$

Solución. Sustrayendo, obtenemos

$$4x - 2y + 4 = 0,$$

y debemos resolver esta ecuación simultáneamente con la de cualquiera de las circunferencias. Sustituyendo, encontramos que

$$5x^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{o} \quad x = \frac{1}{5} \pm \frac{1}{5}\sqrt{41}.$$

Los puntos de intersección son

$$\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\sqrt{41}, \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{41}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\sqrt{41}, \frac{1}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{41}\right).$$

PROBLEMAS

1. Demostrar que cuando $D = E$ la gráfica de $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es siempre una circunferencia si $F < D^2/2$. Obsérvese que si $F < 0$ la gráfica es siempre una circunferencia, sin importar las magnitudes de D y E .

En los problemas 2 a 5, hallar en cada caso la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos dados, mediante el método utilizado en el ejemplo 1. Hallar el centro y el radio.

2. $(-5, 2), (-3, 4), (1, 2)$ 3. $(-3, 1), (-2, 2), (6, -2)$
4. $(7, -2), (3, -4), (0, -3)$ 5. $(1, -1), (0, 1), (-3, -3)$

En los problemas 6 y 7, hallar las ecuaciones de las circunferencias mediante los métodos descritos después del ejemplo 1.

6. $(-2, -4), (2, -6), (4, 2)$ 7. $(-2, -1), (0, 2), (4, 1)$
8. Determinar si los puntos $(2, 0), (0, 4), (2, 2)$ y $(1, 1)$ están en una circunferencia.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia, o de las circunferencias, con centro en el eje y , que pasan por $(-2, 3)$ y $(4, 1)$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en la recta $x + y - 1 = 0$, y que pasa por los puntos $(0, 5)$ y $(2, 1)$.

En los problemas 11 a 16, escribir, en cada caso, la ecuación de la familia de circunferencias con las propiedades dadas.

11. Centro en el eje y ; radio 4.
12. Centro en la recta $x + y - 6 = 0$, radio 1.
13. Centro en el eje x ; tangente al eje y .
14. Centro en la recta $y = x$, tangente a los dos ejes coordenados.
15. Centro en la recta $y = 3x$, tangente a la recta $x + 3y + 4 = 0$.
16. Centro en la recta $x + 2y - 7 = 0$, tangente a la recta $2x + 3y - 1 = 0$.
17. Dar una definición razonable para el hecho de que dos circunferencias se corten en ángulos rectos. Satisfacen su definición las circunferencias $x^2 + y^2 - 6y = 0$ y $x^2 + y^2 - 6x = 0$ en sus puntos de intersección?

En los problemas 18 a 21, hallar los puntos de intersección de las dos circunferencias. Si las circunferencias no se intersectan, trazar una gráfica en que se muestre la ubicación del eje radical.

18. $x^2 + y^2 + 6x - 9y = 0, x^2 + y^2 - 2x + 3y - 7 = 0$
19. $x^2 + y^2 + x - 3y + 1 = 0, x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$
20. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0, x^2 + y^2 - 8y - 7 = 0$
21. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 2y - 1 = 0, 3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 2 = 0$

22. Sean las circunferencias $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ y $x^2 + y^2 - x - y - 2 = 0$. ¿Qué propiedad geométrica tiene la familia de circunferencias

$$(x^2 + y^2 - x - y - 2) + k(x^2 + y^2 + 2x - 4) = 0?$$

Dibujar algunos miembros de la familia.

23. Hallar la gráfica de todos los puntos $P(x, y)$ tales que su distancia a $(3, 2)$ sea siempre el doble que su distancia a $(4, 1)$. Describir la gráfica.

24. Hallar la gráfica de todos los puntos $P(x, y)$ tales que su distancia a $(1, -4)$ sea siempre igual a $2/3$ de su distancia a $(2, 1)$. Describir la gráfica.

25. Dadas las tres circunferencias

$$x^2 + y^2 - x - y = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2x - y - 3 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + x - 2y - 4 = 0,$$

demostrar que los tres ejes radicales, correspondientes a cada par de circunferencias, son concurrentes (o sea, que las tres rectas se cortan en un punto).

26. Desarrollar nuevamente el problema 25 para las circunferencias

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$$x^2 + y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

$$x^2 + y^2 + D''x + E''y + F'' = 0.$$

¿Cuáles son las condiciones necesarias para obtener el resultado? [Significancia: ¿Puede usted imaginar un par de circunferencias que no tengan eje radical?]

2. LA PARÁBOLA (Continuación)

Consideremos una parábola y un punto (x_1, y_1) en ella. Indicaremos la manera de obtener una fórmula que nos dé la ecuación de la recta tangente a la parábola en (x_1, y_1) . Si, por ejemplo, la parábola tiene la ecuación

$$y^2 = 2px,$$

entonces la pendiente en cualquier punto está dada (por derivación implícita) como

$$2y \frac{dy}{dx} = 2p \quad y \quad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

La ecuación de cualquier recta que pasa por (x_1, y_1) es

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Si la pendiente es p/y_1 , la ecuación se convierte en

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1).$$

Es posible simplificar esta fórmula. Como (x_1, y_1) está en la parábola, tenemos que $y_1^2 = 2px_1$. Por lo tanto, la ecuación anterior se puede escribir como

$$y_1 y - y_1^2 = px - px_1.$$

$$y_1 y - 2px_1 = px - px_1 \Leftrightarrow y_1 y = p(x + x_1).$$

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la recta tangente a $y^2 = 20x$ en el punto $(3, 2\sqrt{15})$.

Solución. En este caso $x_1 = 3$, $y_1 = 2\sqrt{15}$, $p = 10$, y la ecuación es

$$2\sqrt{15}y = 10(x + 3).$$

Un problema algo más difícil es el de encontrar la recta tangente a una parábola cuando el punto dado (x_1, y_1) no está en la parábola. Este problema tendrá dos soluciones o ninguna, como se muestra en la fig. A-2. Sea $x^2 = 2py$ la ecuación de la parábola, y supongamos que la ecuación de la recta buscada es $y - y_1 = m(x - x_1)$. La pendiente de la parábola en cualquier punto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}.$$

Sea (x_0, y_0) un punto de tangencia. Puesto que este punto pertenece tanto a la parábola como a la recta, tenemos $x_0^2 = 2py_0$ e $y_0 - y_1 = (x_0/p)(x_0 - x_1)$. Tenemos dos ecuaciones donde las incógnitas son x_0 e y_0 . Al obtener la solución del sistema, el problema queda resuelto, pues se puede sustituir el valor x_0/p en la ecuación de la recta. El siguiente ejemplo ilustra el método en un caso particular.

Ejemplo 2. Hallar las ecuaciones de las rectas que son tangentes a la parábola $y^2 - y - 2x + 4 = 0$ y que pasan por el punto $(-5, 2)$.

Solución. Toda recta que pasa por $(-5, 2)$ tiene por ecuación

$$y - 2 = m(x + 5)$$

y la pendiente de la curva en cualquier punto de la parábola está dada por

$$2y \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} - 2 = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y - 1}.$$

Si (x_0, y_0) es el punto de tangencia, entonces $m = 2/(2y_0 - 1)$. Tenemos las ecuaciones

$$y_0^2 - y_0 - 2x_0 + 4 = 0 \quad y \quad y_0 - 2 = \frac{2}{2y_0 - 1}(x_0 + 5).$$

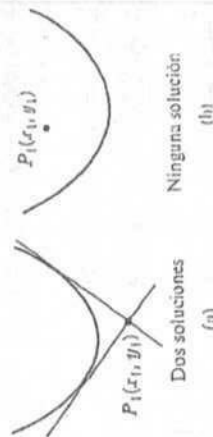


Figura A-2

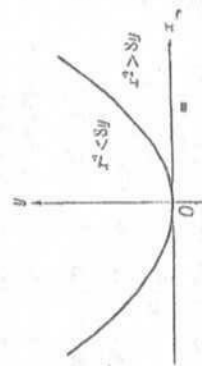


Figura A-3

Se pueden resolver simultáneamente estas ecuaciones eliminando x_0 . y se obtienen las soluciones $x_0 = 17$, $y_0 = 6$ y $x_0 = 5$, $y_0 = -2$, a las cuales les corresponden las pendientes $m_0 = 2/11$, $-2/5$. Las ecuaciones de las rectas buscadas son

$$y - 2 = \frac{2}{11}(x + 5) \quad y \quad y - 2 = -\frac{2}{5}(x + 5).$$

Si las raíces de la ecuación de segundo grado en y_0 fueran números complejos, ello nos indicaría que no hay solución. Este hecho también puede ser determinado en otra forma. Como sabemos, una parábola tal como $x^2 = 8y$ divide al plano en dos regiones: una en la que $x^2 > 8y$ y otra en la que $x^2 < 8y$. Desde cualquier punto (x_1, y_1) tal que $x_1^2 > 8y_1$ se pueden trazar dos tangentes a la parábola (fig. A-3). Si $x_1^2 < 8y_1$, no se puede trazar ninguna tangente. Con mayor generalidad, si la ecuación de la parábola es

$$(x - h)^2 = 2p(y - k),$$

entonces se pueden trazar dos tangentes si $(x_1 - h)^2 > 2p(y_1 - k)$, y no se puede trazar ninguna si $(x_1 - h)^2 < 2p(y_1 - k)$.

Ejemplo 3. Dada la parábola $-2x^2 + 3y - 2x + 1 = 0$ y los puntos $P(1, -2)$, $Q(2, 9)$, decidir si es posible trazar tangentes a la parábola desde P y Q .

Solución. Completando el cuadrado, obtenemos

$$(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}(y + \frac{1}{2}).$$

Sustituyendo las coordenadas de $P(1, -2)$ en la ecuación, hallamos que

$$(\frac{3}{2})^2 > -\frac{3}{2},$$

de modo que se pueden trazar dos tangentes. El resultado para el punto $Q(2, 9)$ es

$$\frac{25}{4} < \frac{57}{2},$$

lo cual indica que no se puede construir ninguna tangente.

La parábola tiene muchas propiedades geométricas interesantes que la hacen adecuada para las aplicaciones prácticas. Probablemente la aplicación más familiar es el uso de las formas parabólicas en los faros de automóviles, linternas, etc. Si se hace rotar una parábola en torno al eje x , se genera una superficie llamada *paraboloide*. Estas superficies se utilizan en linternas, telescopios ópticos y radio telescopios, radar, etc., debido a la siguiente propiedad geométrica. Si se coloca una fuente de luz (o sonido u otro tipo de onda) en el foco de una parábola, y si la parábola es una superficie reflectora, entonces la onda se reflejará según una recta paralela al eje de la parábola (fig. A-4). Esto crea un haz de luz sin dispersión. (En la práctica existirá alguna dispersión, porque la fuente de luz no puede ocupar solamente un punto.) Está claro que lo recíproco también es verdadero. Si llega una serie de ondas paralelas al eje del reflector parabólico, la señal resultante se concentrará en el foco (donde, por lo tanto, se coloca el equipo receptor).

Estableceremos la propiedad de la reflexión para la parábola $y^2 = 2px$. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto de la parábola (diferente del origen), y tracemos el segmento de recta de P al foco (fig. A-5). Construyamos una recta L que pase por P y que

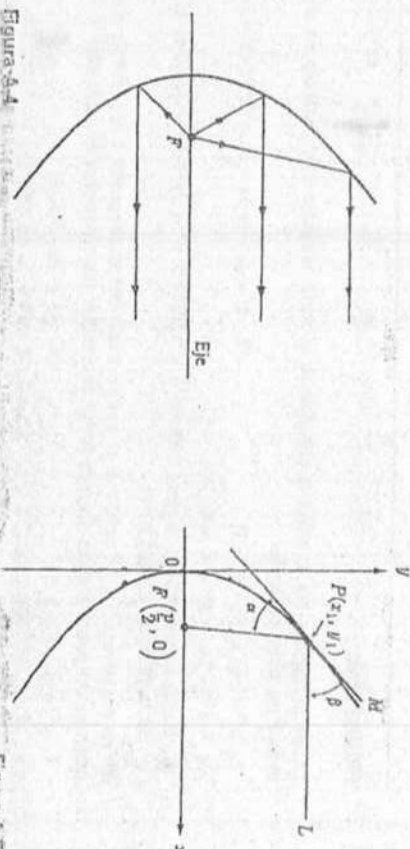


Figura A-4

Figura A-5

sea paralela al eje x , y la recta M tangente a la parábola en P . La ley de reflexión de la parábola establece que el ángulo formado por M y PF (α en el dibujo) debe ser igual al ángulo formado por L y M (β en el dibujo). La pendiente de la recta M es $\tan \beta$, que es también la pendiente de la parábola en (x_1, y_1) . El resultado es

$$2y \frac{dy}{dx} = 2p \quad y \quad \tan \beta = \frac{p}{y_1}.$$

Ahora hallamos $\tan \alpha$ mediante la fórmula para el ángulo entre dos rectas. La pendiente de PF es

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - \frac{p}{2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{\frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} - \frac{p}{y_1}}{1 + \frac{y_1}{x_1 - \frac{p}{2}} \cdot \frac{p}{y_1}} \quad \Leftrightarrow \quad \tan \alpha = \frac{y_1^2 - px_1 + \frac{1}{2}p^2}{x_1 y_1 - \frac{1}{2}p y_1 + p y_1} \end{aligned}$$

Puesto que $y_1^2 = 2px_1$, esta expresión se simplifica y se convierte en

$$\tan \alpha = \frac{p}{y_1},$$

con lo cual el resultado queda establecido.

Los cables principales de suspensión de los puentes tienen forma parabólica porque, según se puede demostrar, si el peso total de un puente se distribuye uniformemente en toda su longitud, entonces un cable tendido en la forma de una parábola soporta la carga uniformemente. Es digno de notar el hecho de que este resultado no se puede obtener con ninguna otra forma.

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 3, hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto dado P de dicha parábola.

- $y^2 = -3x$, $P(-3, -3)$
- $x^2 - 2y + 3x - 4 = 0$, $P(4, -2)$
- $-x^2 - 2y + 2x + 4 = 0$, $P(4, -2)$
- Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 - 3y + 4x - 8 = 0$ en el punto de la parábola en que $x = 1$.

En los problemas 5 a 14, decidir si es posible trazar rectas tangentes a la parábola dada que pasen por el punto P dado. Cuando lo sea, determinar las ecuaciones de las rectas.

- $y^2 = 8x$, $P(-3, 1)$
- $y^2 = -4x$, $P(1, -5)$
- $x^2 = 12y$, $P(-1, -3)$
- $2y^2 - 3y + x - 4 = 0$, $P(1, -1)$
- $x^2 - 4x + 2y - 1 = 0$, $P(1, -8)$
- $x + 2y - 2x^2 + 1 = 0$, $P(1, 3)$
- $x + 2y - 2x^2 + 1 = 0$, $P(1, -3)$
- Establecer la «propiedad óptica» para la parábola $x^2 = 2py$. Esto es, si (x_1, y_1) es un punto de la parábola y si M es la recta tangente en (x_1, y_1) , demostrar que el ángulo formado entre M y la recta que pasa por (x_1, y_1) y por el foco, es igual al ángulo que forma M con la recta que pasa por (x_1, y_1) y que es paralela al eje x .

16. Una recta que pasa por el foco de la parábola $x^2 = -12y$ interseca a la parábola en el punto $(5, -25/12)$. Hallar el otro punto de intersección de esta recta con la parábola.

17. Un arco tiene forma de parábola con vértice en la parte superior y con eje vertical. Si su ancho en la base es de 45 m y su altura es de 18 m en el centro, ¿cuál es su ancho a 10 m por encima de la base?

18. La recta que pasa por el foco de una parábola y que es paralela a la directriz se llama *recta del latus rectum*. La parte de esta recta cortada por la parábola se llama *latus rectum*. Demostrar que para la parábola $y^2 = 2px$ la longitud del latus rectum es $2p$. ¿Es esto verdad para cualquier parábola donde la distancia del foco a la directriz es de p unidades?

19. Hallar la gráfica de todos los puntos cuyas distancias a $(4, 0)$ son 1 unidad menores que sus distancias a la recta $x = -6$. Describir la curva.

3. LA ELIPSE (Continuación)

A partir de los hechos dados en la definición, se puede obtener un procedimiento para construir una elipse, tal como se muestra en la fig. A-6. Tomemos un trozo de cuerda de longitud $2a$, fijemos sus extremos en los focos, insertemos un lápiz de modo que la cuerda quede tensa y describamos un arco. La curva obtenida será una elipse.

La elipse tiene muchas propiedades geométricas interesantes. Las órbitas de los planetas en torno al Sol y las de los satélites artificiales en torno a la Tierra son aproximadamente elípticas; las «galerías del murmullo» son de forma elipsoidal (una elipse rotada en torno a su eje mayor). Si una señal (de luz, sonido u otro

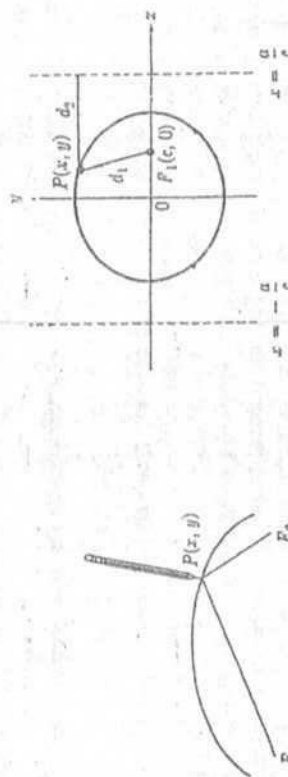


Figura A-6

tipo de onda) tiene su fuente en uno de los focos de la elipse, todas las ondas reflejadas pasarán por el otro foco.

Hemos visto que una parábola tiene un foco y una directriz. La elipse tiene dos focos y dos directrices. Si la elipse tiene sus focos en $(\pm c, 0)$ y sus vértices en $(\pm a, 0)$, entonces las directrices son las rectas

$$x = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e} \quad y \quad x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{a}{e}.$$

Para establecer una analogía con la parábola, podemos demostrar que tal elipse es la gráfica de todos los puntos cuya distancia a un punto fijo (F_1) es igual a e ($0 < e < 1$) veces su distancia a una recta fija ($x = a/e$). Como lo indica la fig. A-7, las condiciones de la gráfica son

$$d_1 = ed_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{a}{e} \right|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, que sabemos es la ecuación de una elipse. La misma situación es válida si se utilizan el foco $F_2(-c, 0)$ y la directriz $x = -a/e$.

Ejemplo 1. Encontrar la ecuación de la elipse con focos en $(\pm 5, 0)$ y tal que una de sus directrices es la recta $x = 36/5$.

Solución. Tenemos $c = 5$, $a/e = 36/5$. Puesto que $e = c/a$, obtenemos $a^2/c = 36/5$, de donde $a = 6$. Entonces $b = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$, y la ecuación es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

El ejemplo anterior nos muestra que si están especificados los focos y una directriz, entonces la ecuación de la elipse está determinada. El siguiente ejemplo nos muestra que si están especificados los ejes de la elipse, entonces se pueden utilizar dos puntos adicionales de la elipse para hallar su ecuación.

Ejemplo 2. Hallar la ecuación de la elipse cuyos ejes están en los ejes x e y , y que pasa por los puntos $P(6, 2)$ y $Q(-4, 3)$.

Solución. La ecuación será de la forma

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1;$$

y no sabemos si A es mayor o menor que B . Puesto que los puntos P y Q están en la elipse, tenemos

$$36\left(\frac{1}{A^2}\right) + 4\left(\frac{1}{B^2}\right) = 1, \quad 16\left(\frac{1}{A^2}\right) + 9\left(\frac{1}{B^2}\right) = 1,$$

que es un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas $1/A^2$ y $1/B^2$. Resolviéndolo, obtenemos que

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{52}, \quad \frac{1}{B^2} = \frac{1}{13},$$

y la elipse resultante es

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

El eje mayor está en el eje x .

La propiedad de reflexión de ondas de la elipse queda en evidencia por el siguiente procedimiento. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto de la elipse (no un vértice), como se muestra en la fig. A-8. Construyamos una recta tangente M en este punto. Entonces, el ángulo entre M y la recta PF_1 (α en la figura) es igual al ángulo entre M y la recta PF_2 (β en la figura). Se puede establecer este resultado determinando las fórmulas para $\tan \alpha$ y $\tan \beta$ y haciendo ver que ellas son iguales.

Una elipse divide al plano en dos regiones, una interior y la otra exterior a la curva. Todo punto interior a la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ satisface la desigualdad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1.$$

Desde un punto exterior a la elipse se pueden trazar dos tangentes; y, evidentemente, no se pueden trazar tangentes a la elipse desde un punto interior a ella.

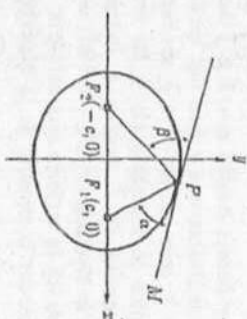


Figura A-8

Ejemplo 3. Sea la elipse $(x^2/25) + (y^2/9) = 1$, y los puntos $P(1, 2)$, $Q(0, 6)$ y $R(3, 2)$. Para cada punto, determinar si desde él se pueden trazar tangentes a la elipse. En caso afirmativo, encontrar las ecuaciones de estas tangentes.

Solución. Para el punto P , tenemos

$$\frac{1^2}{25} + \frac{2^2}{9} < 1,$$

y no existen tangentes. Análogamente, para el punto R tenemos que $(9/25) + (4/9) < 1$. El punto Q está fuera de la elipse porque $(0^2/25) + (6^2/9) > 1$, y procedemos a encontrar las rectas tangentes que pasan por Q . Toda recta que pasa por Q tiene la ecuación

$$y - 6 = m(x - 0).$$

La pendiente de la elipse en un punto cualquiera es, por derivación implícita,

$$\frac{2x}{25} + \frac{2y}{9} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{9}{25} \frac{x}{y}.$$

Supongamos que $P_1(x_1, y_1)$ es un punto de tangencia. Tenemos que $m = -9x_1/25y_1$, y

$$\frac{x_1^2}{25} + \frac{y_1^2}{9} = 1, \quad y_1 - 6 = -\frac{9}{25} \frac{x_1}{y_1} x_1.$$

Resolviendo el sistema, obtenemos

$$\left(\frac{5}{3}\sqrt{3}, \frac{5}{3}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{5}{3}\sqrt{3}, \frac{5}{3}\right)$$

como puntos de tangencia. Las ecuaciones de las rectas son

$$y - 6 = -\frac{9}{25} \cdot \frac{5}{3} \sqrt{3} x, \quad y - 6 = -\frac{9}{25} \cdot \frac{-5}{3} \sqrt{3} x,$$

y, simplificando, encontramos

$$3\sqrt{3}x + 5y - 30 = 0, \quad 3\sqrt{3}x - 5y + 30 = 0.$$

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 6, hallar la ecuación de la elipse que satisface las condiciones dadas.

1. Focos en $(\pm 4, 0)$, directrices $x = \pm 6$
2. Excentricidad $\frac{1}{2}$, directrices $x = \pm 8$
3. Focos en $(0, \pm 4)$, directrices $y = \pm 7$
4. Vértices en $(\pm 6, 0)$, directrices $x = \pm 9$
5. Vértices en $(0, \pm 7)$, directrices $y = \pm 12$
6. Excentricidad $\frac{3}{5}$, directrices $y = \pm 9$
7. Demostrar la propiedad de reflexión de ondas de la elipse, según fue descrita en la presente sección.

8. Demostrar que el segmento de una tangente a una elipse, comprendido entre el punto de contacto y una directriz, se ve bajo un ángulo recto desde el foco correspondiente.
9. Una recta que pasa por un foco y es paralela a una directriz se llama *latus rectum*. La longitud del segmento de esta recta cortado por la elipse se llama *longitud del lado recto*. Demostrar que la longitud del lado recto de

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es $2b^2/a$.

10. Demostrar que la recta que une un punto P_0 de la elipse con el centro y la recta trazada por un foco perpendicularmente a la tangente en P_0 se cortan en la directriz correspondiente.
11. La tangente a una elipse en un punto P_0 encuentra a la tangente en un vértice en un punto Q . Demostrar que la recta que une el otro vértice con P_0 es paralela a la recta que une el centro con Q .
12. Sea la elipse $(x^2/4) + (y^2/2) = 1$. Determinar si los puntos $P(1, 1/2)$, $Q(1, 4)$ y $R(0, 1)$ son, o no, exteriores a la elipse. Trazar las tangentes que pasan por esos puntos cuando ello sea posible.
13. Sea la elipse $(x^2/1) + (y^2/9) = 1$. Desarrollar el problema 12 para los puntos $P(1/3, 1)$, $Q(2/3)$ y $R(5/9)$.

4. LA HIPÉRBOLA (Continuación)

La hipérbola, como la elipse, tiene dos directrices. Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{las directrices son las rectas} \quad x = \pm \frac{a}{e},$$

y para la hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \text{las directrices son las rectas} \quad y = \pm \frac{a}{e}.$$

Una hipérbola tiene la propiedad de ser la gráfica de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia a un punto fijo (F_1) es igual a e ($e > 1$) veces su distancia a una recta fija (digamos $x = a/e$). Como lo indica la fig. A-9, las condiciones de la gráfica son

$$d_1 = ed_2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = e \left| x - \frac{a}{e} \right|.$$

Elevando al cuadrado y simplificando, obtenemos $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. La misma situación es válida si comenzamos con $F_2(-c, 0)$ y la recta $x = -a/e$.

Ejemplo 1. Hallar la ecuación de la hipérbola, si los focos están en los puntos $(\pm 6, 0)$ y una directriz es la recta $x = 3$.

Solución. Tenemos $c = 6$ y $a/e = 3$. Puesto que $e = c/a$, podemos también escribir $a^2/c = 3$ y $a^2 = 18$, $a = \sqrt{18}$. Además, $c^2 = a^2 + b^2$, de donde obtenemos $b^2 = 18$. La ecuación es

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{18} = 1.$$

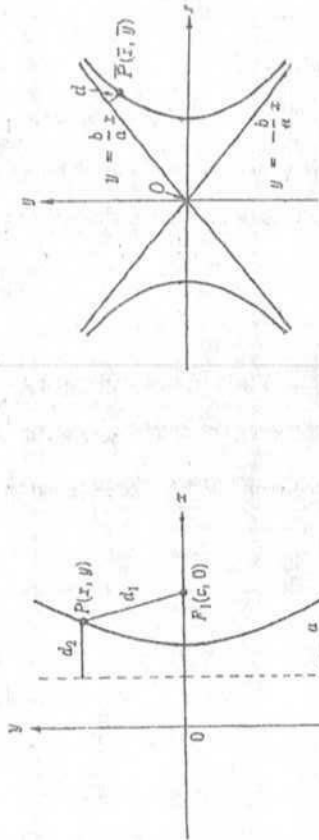


Figura A-9

Figura A-10

Ai estudiar la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

demostraremos que las rectas

$$y = \frac{b}{a}x \quad y \quad y = -\frac{b}{a}x$$

son de especial interés. Para este propósito, consideremos un punto $P(\bar{x}, \bar{y})$ en la hipérbola (1) y calculemos la distancia de P a la recta $y = bx/a$. Por la fórmula de la distancia de un punto a una recta (ver la sección 1 del capítulo 8), tenemos que

$$d = \frac{|b\bar{x} - a\bar{y}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Supongamos que el punto elegido P tiene sus coordenadas positivas, como se muestra en la fig. A-10. Como P es un punto de la hipérbola, sus coordenadas satisfacen la ecuación $b^2\bar{x}^2 - a^2\bar{y}^2 = a^2b^2$, que podemos escribir

$$(b\bar{x} - a\bar{y})(b\bar{x} + a\bar{y}) = a^2b^2 \Leftrightarrow b\bar{x} - a\bar{y} = a^2b^2/(b\bar{x} + a\bar{y}).$$

Sustituyendo esta última relación en la expresión anterior para d , obtenemos

$$d = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}(b\bar{x} + a\bar{y})}.$$

Ahora bien, a y b son números positivos fijos y hemos elegido que $\bar{x}$ y $\bar{y}$ sean positivos. Cuando P se mueve en la hipérbola alejándose más y más del vértice, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ crecen sin límite. Por lo tanto, d tiende a cero cuando $\bar{x}$ y $\bar{y}$ se hacen más y más grandes. Esto es, la distancia entre la hipérbola (1) y la recta $y = bx/a$ se acerca a cero cuando las coordenadas de P tienden a infinito. Definimos la recta $y = bx/a$ como una asíntota de la hipérbola ($x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$). Análogamente, la recta $y = -bx/a$ (ver la fig. A-10) es también una asíntota de la misma hipérbola. Solamente tenemos que recordar la simetría de la hipérbola para verificar lo dicho.

Ahora veremos uno de los usos del rectángulo central. Las asíntotas son las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo central. En forma análoga, la hipérbola $(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$ tiene las asíntotas

$$y = (a/b)x \quad y \quad y = -(a/b)x.$$

Estas rectas contienen a las diagonales del rectángulo central adecuadamente construido.

Ejemplo 2. Dada la hipérbola $25x^2 - 9y^2 = 225$, hallar los focos, vértices, excentricidad, directrices y asíntotas. Dibujar la curva.

Solución. Dividiendo por 225, obtenemos $(x^2/9) - (y^2/25) = 1$, de donde $a = 3$, $b = 5$, $c^2 = 9 + 25$, $c = \sqrt{34}$. Los focos están en $(\pm\sqrt{34}, 0)$, los vértices en $(\pm 3, 0)$, la excentricidad es $e = c/a = \sqrt{34}/3$. Y las directrices son las rectas $x = \pm a/e = \pm 9/\sqrt{34}$. Para hallar las asíntotas, simplemente escribimos $y = \pm (b/a)x = \pm \frac{5}{3}x$. Puesto que las asíntotas son muy útiles para dibujar la curva, las trazamos primero (fig. A-11). Conociendo los vértices y uno o dos puntos adicionales, podemos obtener una gráfica bastante precisa.

Una manera sencilla de recordar las ecuaciones de las asíntotas es observar que si la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{las asíntotas son} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

y si la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad \text{las asíntotas son} \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 0.$$

Una hipérbola divide al plano en tres regiones. Por ejemplo, la hipérbola

$$S = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \right\}$$

divide al plano en las regiones

$$S_1 = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} < 1 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} > 1 \quad y \quad x > 2 \right\},$$

$$S_3 = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} > 1 \quad y \quad x < -2 \right\}.$$

Desde cualquier punto P de la primera de estas regiones se pueden trazar tangentes a la hipérbola, en tanto que no se puede trazar ninguna desde un punto (tal como Q) de las otras dos regiones (fig. A-12).

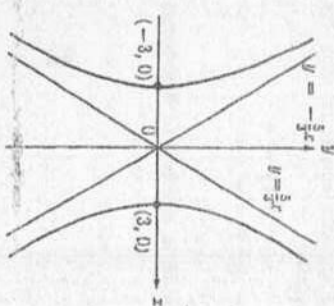


Figura A-11

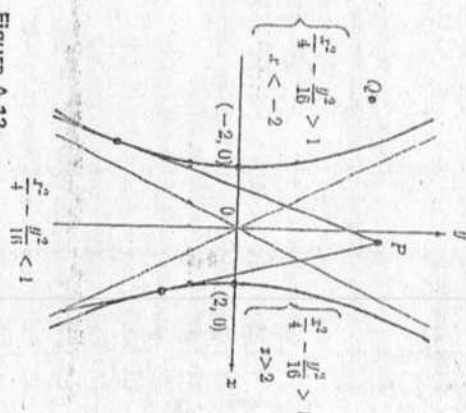


Figura A-12

Ejemplo 3. Sea la hipérbola $(x^2/4) - (y^2/3) = 1$. Determinar si se pueden trazar tangentes a la hipérbola que pasen por cualquiera de los puntos $P(3, 1)$, $Q(-4, 2)$, $R(1, 3)$. Cuando sea posible, hallar las ecuaciones de las rectas tangentes.

Solución. Para el punto P tenemos $(3^2/4) - (1^2/3) > 1$, y no se pueden trazar tangentes. Tampoco se pueden trazar tangentes que pasen por Q , porque $((-4)^2/4) - (2^2/3) > 1$. El punto R satisface la desigualdad $(1^2/4) - (3^2/3) < 1$, y podemos hallar las rectas tangentes. Toda recta que pasa por R tiene la ecuación

$$y - 3 = m(x - 1),$$

y la pendiente de la hipérbola en cualquier punto es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4y}.$$

Si (x_0, y_0) es un punto de tangencia, entonces $m = \frac{3x_0}{4y_0}$ y son válidas las dos ecuaciones

$$\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{3} = 1, \quad y_0 - 3 = \frac{3x_0}{4y_0}(x_0 - 1)$$

Las resolvemos simultáneamente y obtenemos

$$\left(\frac{-4 + 12\sqrt{5}}{11}, \frac{-12 + 3\sqrt{5}}{11} \right), \quad \left(\frac{-4 - 12\sqrt{5}}{11}, \frac{-12 - 3\sqrt{5}}{11} \right).$$

Las ecuaciones de las rectas son

$$(1 - 3\sqrt{5})x + (-4 + \sqrt{5})y + 11 = 0, \\ (1 + 3\sqrt{5})x - (4 + \sqrt{5})y + 11 = 0.$$

PROBLEMAS

En los problemas 1 a 8, hallar los vértices, focos, excentricidad, ecuaciones de las asíntotas y directrices. Construir el rectángulo central y dibujar la hipérbola.

1. $4x^2 - 9y^2 = 36$
2. $9x^2 - 4y^2 = 36$
3. $x^2 - 4y^2 = 4$
4. $9x^2 - y^2 = -9$
5. $x^2 - y^2 = 1$
6. $x^2 - y^2 = -1$
7. $25x^2 - 8y^2 = -200$
8. $2x^2 - 3y^2 = 8$

En los problemas 9 a 17, hallar en cada caso la ecuación de la hipérbola (o hipérbolas) que satisface las condiciones dadas.

9. Asíntotas $y = \pm 2x$, vértices $(\pm 6, 0)$
10. Asíntotas $y = \pm 2x$, vértices $(0, \pm 4)$
11. Excentricidad $\frac{5}{4}$, directrices $x = \pm 2$
12. Focos en $(\pm 6, 0)$, directrices $x = \pm 4$
13. Asíntotas $3y = \pm 4x$, focos en $(\pm 6, 0)$
14. Directrices $y = \pm 4$, asíntotas $y = \pm \frac{3}{2}x$
15. Asíntotas $2y = \pm 3x$, pasa por $(5, 3)$
16. Directrices $x = \pm 1$, pasa por $(-4, 6)$, centro en el origen.
17. Directrices $y = \pm 1$, pasa por $(1, \sqrt{3})$, centro en el origen
18. Demostrar que las rectas $y = \pm (a/b)x$ son asíntotas de la hipérbola

$$(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1.$$

19. Una recta que pasa por el foco de una hipérbola y que es paralela a la directriz se llama *latus rectum*. La longitud del segmento cortado por la hipérbola se llama *longitud del latus rectum*. Demostrar que para la hipérbola

$$(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$$

la longitud del latus rectum es $2b^2/a$.

20. Hallar la gráfica de todos los puntos cuya distancia al punto $(0, \sqrt{41})$ sea igual a $\sqrt{41}/5$ veces su distancia a la recta $y = 25/\sqrt{41}$.
21. Hallar la gráfica de todos los puntos cuya distancia al punto $(8, 0)$ sea igual a 3 veces su distancia a la recta $x = 1$.
22. Demostrar que una asíntota, una directriz y la recta trazada por el foco correspondiente y perpendicular a la asíntota concurren en un punto.
23. Dada la hipérbola $(y^2/4) - (x^2/6) = 1$, determinar si pueden trazarse tangentes a esta curva desde los puntos $P(0, 8)$, $Q(1, 5)$, $R(4, 0)$ y $S(-8, -9)$. Encontrar las ecuaciones de las tangentes cuando ello sea posible.

5. SUPERFICIES CUADRÁTICAS

En el plano, cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es la ecuación de una curva. En forma más específica, hemos encontrado que

HIPÉRBOLA

❖ **Actividad 8:**

- Comienza con la lectura de la Sección 7. La Hipérbola, abarcando:
 - las definiciones de *hipérbola* y *focos*
 - la deducción de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
 - las definiciones de *eje transverso o focal*, *eje conjugado* y *centro*.
- Explica:
 - ¿Por qué la gráfica de la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ es simétrica respecto de los ejes coordenados?
 - ¿Por qué $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son las coordenadas de los vértices?

❖ **Actividad 9:**

- Lee atentamente la definición de *asíntotas de una hipérbola* (páginas 781-782).
- Retorna a la página 271 para completar la lectura con:
 - la definición de *excentricidad*
 - la forma de la ecuación de la hipérbola cuando los focos se encuentran en $(0, -c)$ y $(0, c)$
 - los *ejemplos 1 y 2*, omitiendo lo relativo a la obtención de la recta tangente.
- Resuelve los problemas 1, 3, 11, 13, 15, 17, 19, 20 y 21.

En todos los casos debes graficar también las rectas asíntotas y obtener sus ecuaciones.

TRASLACIÓN DE EJES

❖ **Actividad 10:**

(Referida a la Sección 8.)

Es muy importante que logres comprender las relaciones (1) y (2) marcadas en gris (página 275).

- Presta especial atención al Teorema 2. Él sintetiza que una ecuación de segundo grado también puede representar:
 - un par de rectas que se cortan (recuerda por ejemplo que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ representa la ecuación de las rectas asíntotas de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)

- un par de rectas paralelas (por ejemplo $x^2 = 4 \quad \forall y$, en cuyo caso $x = 2 \quad \forall y$; $x = -2 \quad \forall y$)
 - un único punto (por ejemplo $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1, y = -1$)
 - ningún lugar geométrico (por ejemplo $4x^2 + 5y^2 + 10 = 0$).
- Resuelve los problemas 1, 2, 5, 7, 9, 11, 15, 17, 19, 21, 23 y 27.

❖ **Ecuaciones paramétricas de una elipse**

- Las ecuaciones paramétricas de una elipse con centro en (x_0, y_0) y semieje mayor "a" son:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos t \\ y = y_0 + b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$

- Elimina el parámetro t para obtener la ecuación cartesiana.

❖ **Actividad 11:**

- Para finalizar este primer estudio de las cónicas realiza la lectura de los siguientes párrafos:
- "La parábola tiene propiedades geométricas..." (página 774; a continuación del ejemplo 3)
 - "Los cables principales de suspensión..." (página 775; último párrafo)
 - "3. La Elipse (Continuación)". (página 776; hasta el 2do. renglón de la página 777)

ROTACIÓN DE EJES. LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

En esta sección aprenderás a reconocer y graficar cualquier ecuación de la forma

$$A.x^2 + B.x.y + C.y^2 + D.x + E.y + F = 0 \quad (1),$$

donde A, B y C no son todos simultáneamente cero.

Las ecuaciones obtenidas en las secciones anteriores son de la forma

$$A.x^2 + C.y^2 + D.x + E.y + F = 0 \quad (2) \text{ y constituyen casos particulares de (1).}$$

Verás cómo a través de una conveniente rotación de ejes se puede transformar una ecuación de la forma (1) en la forma (2)

❖ **Actividad 12:**

- Inicia la lectura de la Sección 9.

- la deducción de la ecuación de una parábola con foco en $F(\frac{p}{2}, 0)$ y directriz

$$x + \frac{p}{2} = 0 \quad \forall y$$

- las diferentes formas que toma la ecuación al considerar otras posiciones del foco y de la directriz.

- Resuelve los problemas del 1 al 9 (página 261).

❖ **Actividad 6:**

- Continúa con la lectura del *ejemplo 2* (página 258) donde se deduce la ecuación de una parábola con foco en $F(2, 3)$ y directriz $x = -4 \quad \forall y$.
- Presta particular atención a las ecuaciones de una parábola con vértice en el punto $V(a, b)$ y recta directriz paralela a un eje coordenado.
- Lee el *ejemplo 3*. (La lectura de los *ejemplos 4 y 5* puede ser omitida)
- Resuelve los problemas del 11 al 14, y luego 17, 19 y 21.

¿Qué particularidad tiene la ecuación que se obtiene en el problema 21?

ELIPSE

❖ **Actividad 7:**

(Referida a la Sección 6)

- Lee la definición de *elipse* y la deducción de la ecuación cuando los focos están ubicados sobre el eje X y simétricamente respecto del origen de coordenadas.

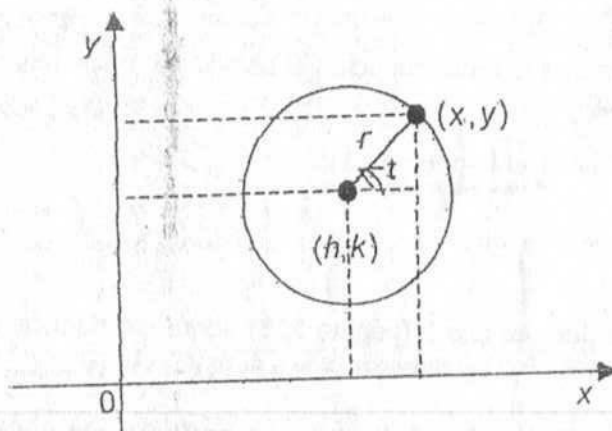
¿Qué particularidad tienen la ecuación obtenida y su correspondiente gráfica?

- Avanza con las definiciones de: *eje mayor*, *eje menor*, *centro*, *vértices* y *excentricidad* de una elipse. Presta atención a la ecuación de una elipse cuando los focos están ubicados sobre el eje Y en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$.
- Lee los *ejemplos 1 y 2*, omitiendo lo relativo a recta tangente a una elipse en un punto.
- Resuelve los problemas 1, 4, 7, 11, 12, 13, 16, 17, 19, 21 y 22 (página 267).

Para el problema 13:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \text{ no implica que } c = 4 \text{ y } a = 5.$$

- Resuelve el problema 23 y una vez obtenida la ecuación determina las coordenadas del centro, de los focos y de los vértices de la elipse.



- Señala en la gráfica los puntos que se obtienen para $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3}{2}\pi$ y $t = 2\pi$.

En las ecuaciones $\begin{cases} x = h + r \cdot \cos t \\ y = k + r \cdot \sin t \end{cases}$ con t variando en el intervalo $[0, 2\pi)$

se describen todos los puntos de la circunferencia, que es recorrida una vez en el sentido contrario a las agujas del reloj, desde el punto $A(h + r, k)$ hasta volver a coincidir con dicho punto cuando $t = 2\pi$.

$$\begin{cases} x = h + r \cdot \cos t \\ y = k + r \cdot \sin t \end{cases} \text{ con } t \in [0, 2\pi)$$

son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r .

- ¿Cómo podrías eliminar el parámetro entre las dos ecuaciones para obtener la ecuación general cartesiana $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$?

PARÁBOLA

❖ Actividad 5:

- Realiza una lectura de la Sección 5. La Parábola hasta el ejemplo 1 inclusive, asegurándote de comprender correctamente:
 - la definición de parábola

❖ **Actividad 2:**

- Comienza con la lectura de la Sección 4. *La Circunferencia*. Avanza hasta el ejemplo 1 inclusive.

La lectura del párrafo correspondiente a recta tangente a una circunferencia es optativa. En dicho párrafo se obtiene la ecuación de la recta tangente a una circunferencia en un punto utilizando el recurso de la derivada (objeto de estudio en la asignatura Análisis Matemático).

- Resuelve los problemas 1, 5, 7, 8, 9 y 11 (página 254).

Para el problema 11:

- Considera que el radio de la circunferencia puede ser determinado calculando la distancia de la recta tangente al centro.
 - Encuentra gráfica y analíticamente las coordenadas del punto de intersección entre la recta tangente y la perpendicular a la misma que contiene al centro de la circunferencia. ¿A qué punto corresponden dichas coordenadas?
- Halla la ecuación de la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 13 = 0$ (*) en el punto $A(1,2)$.

Te ayudamos:

- Verifica que el punto de coordenadas $(1,2)$ satisface la ecuación (*).
- Determina el centro de la circunferencia (completando cuadrados).
- Halla la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,2)$ y es perpendicular al vector con origen en A y extremo en el centro de la circunferencia.
- Compara la ecuación con la que se obtiene en el texto utilizando la derivada y reflexiona sobre los pasos seguidos.

❖ **Actividad 3:**

- Lee los ejemplos 1, 2 y 4 del Apéndice 1 (página 768).
- Resuelve los problemas 15 y 17.

❖ **Actividad 4:**

- Verifica que no existen puntos del plano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0$.

En ese caso escribimos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 = 0\} = \emptyset$$

❖ **Ecuaciones paramétricas de una circunferencia**

- Observa la figura siguiente y explica por qué
$$\begin{cases} x = h + r \cdot \cos t \\ y = k + r \cdot \sin t \end{cases}$$

GUIA DE ESTUDIO Nº 5:

"CÓNICAS"

"ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO EN DOS VARIABLES"

Esta guía tiene la intención de ayudarte en el aprendizaje de los contenidos desarrollados en el texto "Cálculo con Geometría Analítica" (autores: M. Protter y C. Morrey). Tales contenidos corresponden a las Unidades 7 y 8 del Programa Analítico de la Asignatura.

UNIDAD 7 "Cónicas: Estudio de las Formas Reducidas"

- 7.1. Lugar geométrico. Ecuación del lugar geométrico.
- 7.2. Circunferencia. Su ecuación. Propiedades. Condición para que una ecuación general de segundo grado en dos variables sea una circunferencia. Intersecciones con una recta y con otra circunferencia.
- 7.3. Elipse. Definición. Ecuación y propiedades.
- 7.4. Hipérbola. Definición. Ecuación y propiedades.
- 7.5. Parábola. Definición. Ecuación y propiedades.

UNIDAD 8 "Ecuación General de Segundo Grado en dos Variables"

- 8.1. Los cambios de sistemas de referencia. Traslación y rotación. Rototraslación.
- 8.2. Estudio de la ecuación de segundo grado en dos variables. Discusión y reducción de cónicas con y sin centro. Cónicas propiamente dichas y degeneradas.

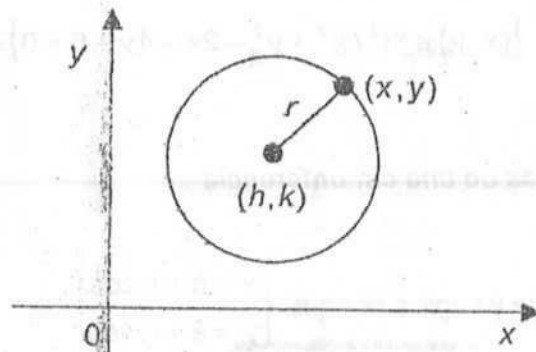
CIRCUNFERENCIA

En la bibliografía de referencia se define:

La circunferencia como el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas (x, y) que están a una distancia r de un punto fijo de coordenadas (h, k) .

❖ Actividad 1:

Para hallar la ecuación del lugar geométrico te proponemos que observes la siguiente gráfica y respondas a las preguntas.



- a) ¿Cuáles son las componentes del vector con origen en (h, k) y extremo en (x, y) ?
- b) ¿Cuál es el módulo de dicho vector?

Encontrarás en primera instancia las ecuaciones que relacionan las coordenadas de un punto P en un sistema xy con las coordenadas del mismo punto P en otro sistema $x'y'$, que se obtiene del anterior rotando los ejes x e y en un ángulo θ .

- Continúa con la lectura del ejemplo 1.
(No es necesario que verifiques los resultados de las operaciones que se indican).

Recuerda:

El ángulo θ de rotación está comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$, y se determina a partir de la relación $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B}$.

❖ **Actividad 13:**

- Lee atentamente el ejemplo 2.

Observaciones:

- a) Aparecen allí relaciones trigonométricas entre el seno y el coseno de un ángulo y el coseno de su doble, ellas se obtienen a partir de las identidades:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & (i) \text{ (relación Pitagórica)} \\ \cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & (ii) \text{ (coseno del ángulo doble)} \end{aligned}$$

- Restando miembro a miembro (i) y (ii) resulta:

$$1 - \cos 2\theta = 2 \cdot \sin^2 \theta$$

de donde: $\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$

y como θ es un ángulo del primer cuadrante se tiene que:

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

- Sumando miembro a miembro (i) y (ii) resulta:

$$1 + \cos 2\theta = 2 \cdot \cos^2 \theta$$

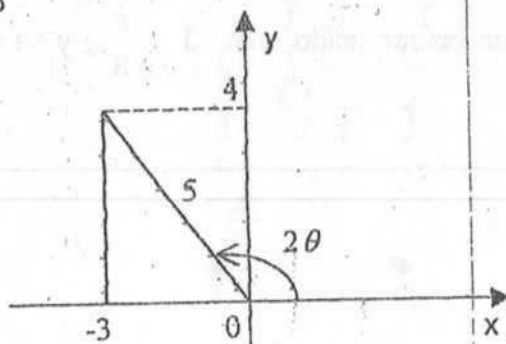
de donde: $\cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$

y como θ es un ángulo del primer cuadrante se tiene que:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$$

b) Si observas la siguiente gráfica comprenderás por qué $\cot 2\theta = -\frac{3}{4}$ implica que

$$\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$$



- Lee ahora el ejemplo 3 y realiza una gráfica que permita explicar que:

$$\cot 2\theta = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{5}{13}$$

❖ Actividad 13:

- Realiza una lectura cuidadosa del Teorema 3.

Su aplicación te permitirá reconocer a priori el tipo de lugar geométrico que representa la ecuación $Ax^2 + Bx.y + Cy^2 + D.x + E.y + F = 0$.

Recuerda:

Es muy importante verificar la concordancia entre el reconocimiento a priori y el resultado que se obtiene al reducir la ecuación general.

- Resuelve los problemas 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17 y 27 (página 286).

Capítulo 8

Sección 8-1 (pág. 243-244)

1. $\sqrt{5}$
3. $\frac{14}{9}\sqrt{2}$
5. $\frac{16}{13}\sqrt{13}$
7. 2
9. 2
11. $\sqrt{61/61}$
13. $\frac{9}{\sqrt{3}}$
15. $\frac{11}{\sqrt{3}}$
17. $(\frac{16}{3}, 0), (-\frac{4}{3}, 0)$
19. $(64, -44), (4, -4)$
21. $x - 2y + 1 \pm 3\sqrt{5} = 0$
23. $(1, 1)$
25. $x - 3y + 6 = 0; 3x + y = 0$

Sección 8-2 (pág. 246-247)

1. $2x + 3y + k = 0$
3. $y = mx + 5$
5. $y + 3 = m(x - 2)$
7. $(x/a) + y/(10 - a) = 1$
9. $3x + 5y - 10 = 0$
11. $4x - y + 5 = 0$
13. $8x + y + 3 = 0$
15. $(17 \pm \sqrt{65})x + (25 \pm \sqrt{65})y - 6 \pm 12\sqrt{65} = 0$
17. $x + 17y + k = 0$
19. $2x + 3y = 4$

Sección 8-3 (pág. 250-251)

1. $\tan \phi = \frac{10}{11}$
3. $\tan \phi = \frac{1}{17}$
5. $\tan \phi = -\frac{1}{17}$
7. $\tan \phi = -\frac{1}{17}$
9. $\tan \angle CAB = 8; \tan \angle ABC = \frac{1}{5}; \tan \angle BCA = 2$
11. $\tan \angle CAB = 1; \tan \angle ABC = 2; \tan \angle BCA = 3$
13. $3x + 4y - 5 = 0; x = -1$
15. $(\sqrt{3} - 1)x + (\sqrt{3} + 1)y + 3\sqrt{3} + 1 = 0;$
 $(\sqrt{3} + 1)x + (\sqrt{3} - 1)y + 3\sqrt{3} - 1 = 0$
17. $-6; \text{no}$
19. $2x + y = 0; x - 2y = 0$
21. $\frac{1}{13}$
23. $4x - 7y = 0; 7x + 4y = 0$
25. $x - 3 = \sqrt{10}y + 10 + 3\sqrt{10} = 0$
27. $x - 7y + 5 = 0$
29. $x - (3 + \sqrt{10})y + 10 + 3\sqrt{10} = 0$
31. $y = 3x + b; y = -\frac{1}{3}x + b$

Sección 8-4 (pág. 254-255) *Círculo*

1. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 = 0$
7. $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$
9. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$
11. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$
13. $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 36 = 0$
15. Circunferencia: centro $(-3, 4)$, radio 5
17. Punto $(2, -1)$
19. Circunferencia: centro $(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, radio $\frac{5}{2}$
21. Circunferencia: centro $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, radio $\frac{5}{2}$
23. $2x + y - 5 = 0$
25. $9x - 8y - 26 = 0$
27. $x + 2y + 4 = 0$
29. $5x + 8y - 38 = 0$
31. $3x + 5y - 13 = 0; 5x - 3y + 35 = 0$
33. No hay rectas tangentes porque $P(3, 0)$ es interior a la circunferencia

Sección 8-5 (pág. 261-262) *Parábola*

1. Foco: $(2, 0)$; directriz: $x = -2$
3. Foco: $(-3, 0)$; directriz: $x = 3$
5. $y^2 = -16x$
7. $x^2 = -8y$
9. $2y^2 = 9x$
11. Vértice: $(1, 2)$; foco: $(1, \frac{5}{2})$; directriz: $y = \frac{3}{2}$; eje: $x = 1$
13. Vértice: $(\frac{1}{2}, \frac{9}{2})$; foco: $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$; directriz: $y = \frac{7}{2}$; eje: $x = \frac{1}{2}$
15. Vértice: $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$; foco: $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$; directriz: $y = -\frac{5}{2}$; eje: $x = \frac{1}{2}$
17. $y^2 = 12x - 36$
19. $x^2 = 32 - 8y$
21. $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 32y + 16 = 0$
23. $(2 \pm 6\sqrt{3})x - y - 5 = 0$
25. $3x - 2y - 4 = 0$
27. $3x - 2y + 3 = 0$
31. $8x - y + 9 = 0$

Sección 8-6 (pág. 267-268) *Elipse*

a	b	c	e	focos	vértices
1. 5	4	3	$\frac{3}{5}$	$(\pm 3, 0)$	$(\pm 5, 0)$
3. 4	3	$\sqrt{7}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$(\pm \sqrt{7}, 0)$	$(\pm 4, 0)$
5. $\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(0, \pm 1)$	$(0, \pm \sqrt{3})$
7. $\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(0, \pm \sqrt{3})$	$(0, \pm \sqrt{3})$
9. $\sqrt{11/2}$	$\sqrt{11/3}$	$\sqrt{11/6}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\pm \sqrt{11/6}, 0)$	$(\pm \sqrt{11/2}, 0)$

11. $9x^2 + 25y^2 = 225$
13. $100x^2 + 36y^2 = 3600$
15. $25x^2 + 9y^2 = 225$
17. $7x^2 + 15y^2 = 247$
19. $x^2 + 2y^2 = 18$
21. $16x^2 + 7y^2 = 688$
23. $3x^2 + 4y^2 - 36x = 0$
25. $9x^2 + 5y^2 = 180$
27. $16x^2 + 7y^2 - 16y = 176$, eje mayor: $x = 0$; eje menor: $y = \frac{8}{7}$
29. $x + 3y = 1$
31. $25x + 15y + 27 = 0$
33. $\max \approx 152.580; \min \approx 147.450$

Sección 8-7 (pág. 273-274) *Hipérbola*

a	b	c	e	focos	vértices
1. 3	4	5	$\frac{5}{3}$	$(\pm 5, 0)$	$(\pm 3, 0)$
3. 5	12	13	$\frac{13}{5}$	$(0, \pm 13)$	$(0, \pm 5)$
5. $\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$(\pm \sqrt{5}, 0)$	$(\pm \sqrt{3}, 0)$
7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$(\pm \sqrt{5}, 0)$	$(\pm \sqrt{3}, 0)$
9. $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}}{6}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$(\pm \sqrt{5/6}, 0)$	$(\pm \sqrt{3/6}, 0)$

11. $24x^2 - 25y^2 = 600$
13. $9x^2 - 7y^2 + 343 = 0$
15. $4x^2 - y^2 = 32$
17. $y^2 - x^2 = 5$
19. $4y^2 - 5x^2 = 19$
21. $15x^2 - y^2 = 15$
23. $2521x^2 - 6y^2 - 4y^2 = 63$
25. Tangente: $5x + 6y + 16 = 0$; recta normal: $12x - 10y + 75 = 0$
27. Las tangentes son $x - y - 2 = 0, 3x + 5y + 2 = 0$
29. $7x^2 - 9y^2 = 63$

Sección 8-8 (pág. 278-279) *Conicadas*

1. $(7, -1), (1, 3), (-3, -\frac{1}{3}), (-2, -6)$
3. $3x' - 7y' = 0, 2x' - 5y' = 0$
5. Elipse: centro $(-1, 2)$; vértices $(-1, 2 \pm 5)$; focos $(-1, 2 \pm 3)$; $e = \frac{3}{5}$; directrices: $y = 2 \pm \frac{25}{3}$
7. Hipérbola: centro $(-1, 2)$; vértices $(-1, 2 \pm 3)$; focos $(-1, 2 \pm \sqrt{13})$; $e = \sqrt{13/3}$; directrices: $y = 2 \pm 9/\sqrt{13}$; asíntotas $(y - 2) = \pm \frac{3}{2}(x + 1)$
9. Elipse: centro $(-1, 2)$; vértices $(-1 \pm 3, 2)$; focos $(-1 \pm \sqrt{5}, 2)$; $e = \sqrt{5/3}$; directrices: $x = -1 \pm (9/\sqrt{5})$
11. Elipse: centro $(1, -1)$; vértices $(1, -1 \pm \frac{3}{2})$; focos $(1, -1 \pm (\sqrt{5}/2))$; $e = \sqrt{5/3}$; directrices: $y = -1 \pm (9/\sqrt{3})$
13. Elipse: centro $(2, -1)$; vértices $(2 \pm 2, -1)$; $e = \frac{1}{2}$; focos $(2 \pm 1, -1)$; directrices: $x = 2 \pm 4$
15. Hipérbola: centro $(-1, -2)$; vértices $(-1 \pm 2, -2)$; $e = \sqrt{10/2}$; focos $(-1 \pm (\sqrt{10}/2), -2)$; directrices: $x = -1 \pm (2/5)\sqrt{10}$; asíntotas: $(y + 2) = \pm \sqrt{6/2}(x + 1)$
17. Dos rectas que se cortan: $y - 2 = \pm (2/\sqrt{3})(x + 1)$
19. $16x^2 + 7y^2 - 64x - 14y - 41 = 0$

21. $x^2 - 5y^2 - 2x + 10y - 20 = 0$ 23. $y^2 - 6x + 2y + 22 = 0$
 25. Elipse: $4x^2 + 3y^2 - 16x - 12y + 16 = 0$
 27. Circunferencia: $x^2 + y^2 + 12x - 10y + 29 = 0$

Sección 8-9 (pág. 285-286) *rotación*

- ① $5(x')^2 = 9$; dos rectas $x + 2y = \pm 3$
 ③ $(x')^2 - (y')^2 = 10$; hipérbola; vértices $(3, 1)$, $(-3, -1)$
 ⑤ $x'^2 = -4\sqrt{2}y'$; parábola; foco $(1, -1)$; directriz $x - y + 2 = 0$
 ⑦ $17x'^2 + 4y'^2 = 884$; elipse; vértices $(\pm 3\sqrt{17}, \pm 2\sqrt{17})$
 ⑨ $y'^2(1 + \sqrt{5}) - x'^2(-1 + \sqrt{5}) = 20$; hipérbola; vértices $(\pm(2\sqrt{5})^{1/2}, \pm(3\sqrt{5} - 5)^{1/2})$
 ⑪ $(\sqrt{13} - 3)x'^2 - (\sqrt{13} + 3)y'^2 = 10$; hipérbola;

vértices $\left(\pm \frac{\sqrt{13} + 3}{2}, \pm \frac{\sqrt{13} - 3}{2}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{5\sqrt{13}}{13}\right)^{1/2}$

- ⑬ $4x'^2 - y'^2 = 0$; dos rectas: $3x + y - 5 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$
 ⑮ $x'^2 = -4\sqrt{5}y'$; parábola; foco $(0, 1)$; vértice $(-1, 3)$; directriz: $x - 2y + 12 = 0$
 ⑰ $28x'^2 + 3y'^2 = 0$; la gráfica consta de un solo punto $(-\frac{1}{3}, 2)$
 ⑲ $9x'^2 + 4y'^2 = 36$; elipse; centro $(2, -4)$
 21. $3y'^2 - x'^2 = 12$; hipérbola; centro $(-\sqrt{3}, 0)$; vértices $(-2\sqrt{3}, 1)$, $(0, -1)$
 23. (a) $x'^2 - y'^2 = 0$; (b) $x^2 - 3x + 2 = 0$; (c) $x^2 - 2x + 1 = 0$; (d) $x^2 + y^2 = 0$

Capítulo 9

Sección 9-2 (pág. 292-293)

1. 5 3. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{1}{8}$ 7. 1 9. 0 11. $\frac{1}{6}$
 13. $3 \sec^2 3x$ 15. $25 \sec(x^2) \tan(x^2)$
 17. $-\csc^2 \frac{1}{3}y \cot \frac{1}{3}y$ 19. $-2 \cot^2 2x + 2$
 21. $\sec^2 2x \sqrt{\tan 2x}$ 23. $x \tan^2 x \sec^2 \frac{1}{3}x + 2 \tan \frac{1}{3}x$
 25. $2 \sec 2x \tan^3 2x$ 27. $2(x \cos 2x - \sin 2x)/x^3$
 29. $-2 \cos 3x(1 + x^2)^{-2}(x \cos 3x + 3(1 + x^2) \sin 3x)$
 31. $-6 \cos 3x \csc^3 2x (\sin 3x + \cos 3x \cot 2x)$
 33. $-2 \cot ax[(1 + x^2)^{1/2} \csc^2 ax + x \cot ax]/(1 + x^2)^{1/2}$
 35. $\sin 4x(1 + \sin^2 2x)^{-1/2}$ 37. $-\sin x \cos(\cos x)$
 39. $-[x(1 + \cos^2 3x) + (1 + x^2) \sin 6x]/(1 + x^2)^{3/2}(1 + \cos^2 3x)^{3/2}$
 45. Máx. rel. en $x = \frac{1}{3}\pi + 2n\pi$; mín. rel. en $x = \frac{2}{3}\pi + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$
 47. Máx. rel. en $x = \frac{3}{4}\pi + 2n\pi$; mín. rel. en $x = -\frac{1}{4}\pi + 2n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$
 49. $f'' > 0$ para $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$

51. Sea x_0 la solución en el intervalo $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ de la ecuación $\tan x_0 = x_0$. Los máx. rel. y mín. rel. se presentan alternadamente en los puntos $x = 1/\left(\frac{1}{\pi}x_0 + n\right)$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

Sección 9-3 (pág. 295-296)

1. $-\frac{1}{4} \cos 6x + C$ 3. $-\frac{1}{3} \cot(2x + 1/3) + C$ 5. $\frac{1}{6} \sec^2 3x + C$
 7. $-\frac{1}{7} \cot(2x - 6) - x + C$ 9. $-\cos x(1 - \frac{1}{3} \cos^2 x + \frac{1}{3} \cos^4 x) + C$
 11. $-\frac{1}{4} \cos(x^2) + C$ 13. $\frac{1}{4} \sec^4 x + C$ 15. $\frac{1}{6} \tan^6 x + C$
 17. $-\frac{1}{8} \tan^3(3 - 2x) + C$ 19. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{7}, \sin 6x + C$
 21. $\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$ 23. 1 25. $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$
 27. $(24 - 9\sqrt{3})/24$