CAPÍTULO 10 – EL PLANO COMPLEJO. FORMA TRIGONOMETRÍCA Y POLAR DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

En este capítulo se verá cómo se pueden representar geométricamente los números complejos, así como también otras formas de presentarlos que entre otras cosas nos servirán para calcular raíces de índice mayor que dos.

EL PLANO COMPLEJO

Otra forma de presentar los números complejos

Los números complejos pueden ser definidos como el conjunto de pares ordenados (a,b) de números reales donde a es la parte o componente real y b es la parte o componente imaginaria. Con ellos se definen:

- **Igualdad**: $(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$
- **Suma**: $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- **Producto**: $(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Según esta definición se establece una correspondencia biunívoca entre los pares $(a,0)$ y los números reales a. Entonces **R** se identifica con un subconjunto $\mathbf{C}^*$ de **C** y esta correspondencia se establece también, entre sumas en **R** y sumas en $\mathbf{C}^*$ y entre productos en **R** y productos en $\mathbf{C}^*$.

$$(a,0)+(c,0)=(a+c,0) \qquad (a,0)\times(c,0)=(ac,0)$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \qquad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$a \;+\; c \;=\; a+c \qquad a \;\times\; c \;=\; a\times c$$

La unidad imaginaria se define por: $i=(0,1)$, que verifica

$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

Por otra parte: $(b,0)\times(0,1)=(0,b)=bi$

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)$$

$$\boxed{(a,b)=a+bi}$$

Esta última igualdad muestra la equivalencia entre las dos formas de expresión de un número complejo, como **par ordenado**: (a,b) y en **forma binómica**: $a+bi$.

↳ OBSERVACIÓN:

Todavía no hemos definido ninguna relación de la forma $z<w$ con $z,w\in\mathbf{C}$, ya que es **imposible** dar una relación de orden para los números complejos a diferencia de los números reales como lo hicimos en el capítulo 6.

Para justificar esto, supongamos que fuese posible definir una relación "<" como lo hicimos con los números reales. Como $i\neq 0$, entonces $i<0$ ó $0<i$.

Supongamos que $0<i$, entonces $0\cdot i<i\cdot i$, es decir $0<i^2=-1$ lo cual es un absurdo. Análogamente, si suponemos $i<0$.

Por lo tanto, el cuerpo de los números complejos **C** no puede ser ordenado.

Representación geométrica de los números complejos

Sabemos que fijado un sistema de ejes cartesianos ortogonales en el plano, se establece naturalmente una correspondencia biunívoca entre puntos del plano y pares ordenados de números reales.

Esta correspondencia es adecuada para representar los números complejos, atendiendo a que cada $z=a+bi$ es un par ordenado de números reales. Entonces cada z se corresponde con un punto P del plano y recíprocamente

$$\boxed{P\leftrightarrow z=a+bi}$$

P recibe el nombre de **afijo** de z.

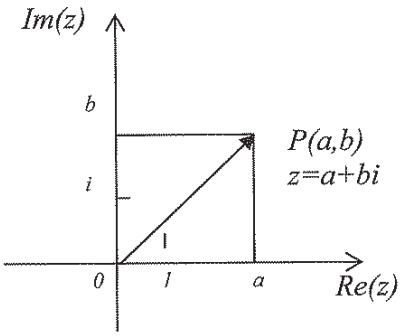
En virtud de esta correspondencia biunívoca entre puntos y números complejos se identifica **C** con el plano que por este motivo se llama ***plano complejo.***

En este plano:

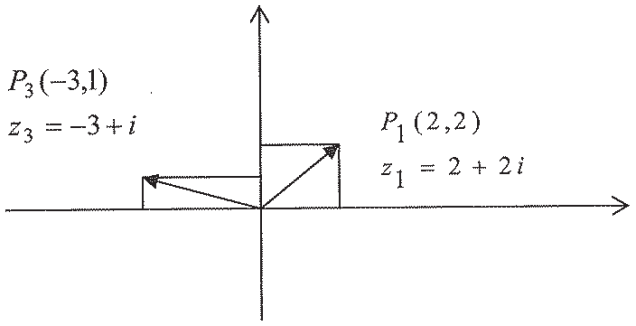
- El eje de abscisas se llama **eje real** ($Re(z)$) y en él se presentan todos los números reales, es decir los complejos $z=a+0i=(a,0)$

- El eje de ordenadas se llama **eje imaginario** (*Im(z)*) y sus puntos representan los números imaginarios puros $z = 0 + bi = (0,b)$. Además a cada complejo z le corresponde un vector $\overrightarrow{0P}$ de origen 0 y extremo el afijo P de z, de modo que:

$$z = a + bi \leftrightarrow P \leftrightarrow \overrightarrow{0P}.$$



Ejemplo:



➲ EJERCICIOS:

1- Represente los afijos y vectores correspondientes a los complejos:

$(1,3)$; $\quad -2-4i$; $\quad i^7$; $\quad -5i$

2- Indique a que cuadrante pertenece cada uno de los siguientes complejos:

$z_1 = 3-2i$; $\quad z_2 = -2\sqrt{3} - 5i^2 + i$; $\quad z_3 = (1-2i).(i-\sqrt{5})$

3- Para $z_1 = 4-i$; $\ z_2 = 2+3i$ represente gráficamente:

a) $z_1 + z_2$ $\qquad$ c) $\overline{z_2}$

b) $-z_1$ $\qquad$ d) $z_1 - z_2$

4- Represente los siguientes conjuntos del plano complejo

a) $A = \{z / |\text{Re}(z)| \leq 2 ; |\text{Im}(z)| \leq 3\}$

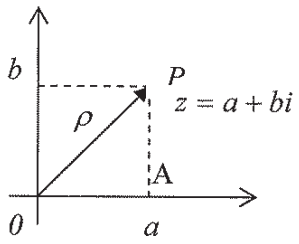
b) $B = \{z / 1 \leq \text{Re}(z) \leq 4 ; \text{Im}\, z = 2\}$

c) Determine si $z_1 = \sqrt{2} - \frac{7}{5}i \in A$ y si $z_2 = \left(\frac{5}{2} - 2i\right)^2 \in B$. Justifique.

Módulo y argumento de un número complejo

Se llama **módulo** del complejo $z = a + bi$ al número real no negativo, igual a la longitud del vector $\overline{0P}$ asociado a z.

Para indicar módulo de z se usará $|z|$ o bien se empleará la letra griega ρ.



De la observación del triángulo $0PA$ es sencillo comprobar, utilizando el teorema de Pitágoras, que: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ejemplo:

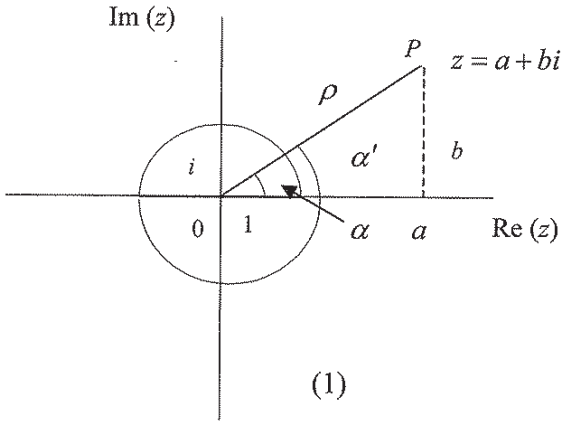
Si $z = 2 + 5i$ entonces $|z| = \sqrt{29}$

➲ EJERCICIO:

5- a) Dado $z = a + bi$ represente: z ; $-z$; $\bar{z}$; $-\bar{z}$; y verifique: $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$

b) Pruebe: $|z|^2 = z.\bar{z}$

Se llama **argumento** del número complejo z al ángulo α que forma la dirección positiva del eje *Re(z)* con el vector asociado a z.



(1)

➧ OBSERVACIONES:

- El argumento de un complejo $z \neq 0$ no está unívocamente determinado, ya que puede variar en un múltiplo de 2π radianes.
- El complejo nulo $z = 0$ no posee argumento.

Si α y α' son dos argumentos de z, entonces $\alpha - \alpha' = 2\pi k$; $k \in \mathbf{Z}_0$;

$$\boxed{\alpha' = \alpha + 2\pi k \ ; \ k \in Z}$$

En lo que sigue se adoptará, salvo mención en contrario, el llamado **argumento principal** de z que se define como el ángulo α tal que $0 \leq \alpha < 2\pi$.

$$\boxed{\alpha = \arg z \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < 2\pi}$$

La razón $tg\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ (siempre que $a \neq 0$), permite calcular α

Si $a = 0$ y $b > 0$, entonces $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

Si $a = 0$ y $b < 0$, entonces $\alpha = \dfrac{3}{2}\pi$

En el triángulo de la figura (1) se puede notar que:

$a = \rho.\cos\,\alpha$ $\quad$ $b = \rho.\text{sen}\,\alpha$ $\quad$ y por lo tanto

$$\boxed{z = \rho(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}$$

Ésta expresión recibe el nombre de **forma trigonométrica** del complejo z.

Ejemplos:

Para escribir la forma trigonométrica de

1) $z = -2 + 2i$ calculamos $\rho = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ y su argumento α por la relación

$tg\ \alpha = \dfrac{-2}{2} = -1$ de modo que $\alpha = 135°$.

Así: $z = 2\sqrt{2}$ (cos 135° + i sen 135°)

2) $z = -2i$, como su módulo es 2 y su argumento es $\alpha = 270°$ resulta

$z = 2$ (cos 270° + i sen 270°)

Para el complejo $z = a + bi = \rho(\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$, se puede adoptar también otra expresión llamada **forma polar** de z que se indica:

$$\boxed{z = \rho_\alpha}$$

ρ y α se llaman las **coordenadas polares** de z.

Ejemplos:

a) La forma polar de $z = -2 + 2i$ es $z = 2\sqrt{2}_{135°}$

b) La forma polar de $z = -3$ es $z = 3_\pi$

Hemos visto como determinar la forma polar de z cuando éste está expresado en forma binómica. Interesa el caso recíproco, esto es, hallar la forma binómica de z cuando éste está expresado en forma polar.

Por ejemplo si $z = 2_{\frac{\pi}{4}}$, dado que $\rho = 2$ y $\arg z = \frac{\pi}{4}$; se tiene

$a = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}$; $b = 2\ \text{sen}\ \frac{\pi}{4} = 2\frac{\sqrt{2}}{2}$; luego $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

En el cuadro siguiente se muestran las **formas de pasaje** de una a otra forma.

$z = a + bi$	$z = \rho_\alpha$
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$	$a = \rho\cos\alpha$
$tg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad a \neq 0$	$b = \rho\ \text{sen}\,\alpha$
$\therefore z = \rho_\alpha$	$\therefore z = \rho\ (\cos\ \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$

➲ EJERCICIOS:

6- Escriba en forma polar los complejos z:

$1 + i$; $\quad 5$; $\quad -2$; $\quad -i$

7- Escriba en forma binómica los complejos $3_{\frac{\pi}{6}}$; $\quad 1_{\frac{\pi}{2}}$; $\quad \left(2_{\frac{\pi}{2}}\right)^2$

8- Represente los conjuntos del plano complejo:

$A = \{z / 1 < |z| \leq 2\}$

$B = \{z / \arg z = 45°\}$

$C = \left\{ z / 1 \leq |z| < 2;\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

9- Represente:

$z_1 = 3(\cos 45° + i\ \text{sen}\, 45°)$

$z_2 = 3(\cos 405° + i\ \text{sen}\, 405°)$

¿cómo son los afijos de z_1 y z_2?

Igualdad de complejos expresados en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1\alpha_1}$ y $z_2 = \rho_{2\alpha_2}$ se define:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1 = \rho_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi, k \in Z \end{cases}$$

Producto y cociente de complejos en forma polar

Dados $z_1 = \rho_{1\alpha_1}$ y $z_2 = \rho_{2\alpha_2}$ se define:

1) $z_1 . z_2 = \rho_1 . \rho_2{}_{(\alpha_1 + \alpha_2)}$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\alpha_1 - \alpha_2}$

Ejemplo:

Sean $z_1 = 2_{\frac{\pi}{2}}$ y $z_2 = 5_{\frac{\pi}{4}}$, entonces:

a) $z_1 . z_2 = 10_{\frac{3}{4}\pi}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{2}{5}\right)_{\frac{\pi}{4}}$

Potencia entera de un número complejo

Dado $z = \rho_\alpha$ y $n \in \mathbf{Z}$ se puede demostrar que

$$z^n = \rho^n{}_{n\alpha}$$

Esta expresión de la potencia se conoce con el nombre de fórmula de De Moivre (matemático inglés 1667-1754)

Ejemplo:

Si $z = 1_{\frac{\pi}{6}}$ entonces, $z^9 = 1_{9.\frac{\pi}{6}} = 1_{\frac{3}{2}\pi}$

➲ EJERCICIO:

10- Para $z_1 = 1+i$; $z_2 = \sqrt{3}+i$; $z_3 = 2_{\frac{\pi}{4}}$; $z_4 = 2_{60°}$, calcule en forma polar:

a) $(z_1.z_2)z_3$ b) $\frac{z_2}{z_4}$ c) z_3^{-1} d) z_1^8

Raíces enésimas de un número complejo

Dado un complejo $z = a+bi$, se llama **raíz de índice *n*** (enésima) a toda solución de la ecuación $x^n = a+bi$. Se indica $x = \sqrt[n]{a+bi}$.

Expresado z en su forma polar $z = \rho_\alpha$ es posible obtener las soluciones de manera simple.

Antes de dar una expresión general, veamos un ejemplo:

Dado $z = 8_{60°}$, queremos hallar $x = \sqrt[3]{8_{60°}}$.

Suponemos: $x = \gamma_\theta$, entonces debe verificar: $\gamma_{3\theta}^3 = 8_{60°}$

Pero: $\gamma_{3\theta}^3 = 8_{60°} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma^3 = 8 \\ 3\theta = 60° + k.360° \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \sqrt[3]{8} \\ \theta = \dfrac{60° + k.360°}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 2 \\ \theta = 20° + k.120° \end{cases}$

Entonces: $x = 2_{20°+k.120°}$ donde $k \in \mathbf{Z}$

Se podría pensar que para cada valor de *k* hay una solución distinta. Sin embargo, se puede observar que variando *k* en los enteros se obtienen tres argumentos distintos entre 0° y 360°, siendo los restantes congruentes con ellos. De modo que es suficiente tomar tres valores sucesivos para *k* (resulta conveniente tomar para *k* los valores 0; 1 y 2) para obtener las tres soluciones distintas de $x^3 = 8_{60°}$.

$k = 0 \longrightarrow x_0 = 2_{20°}$

$k = 1 \longrightarrow x_1 = 2_{140°}$

$k = 2 \longrightarrow x_2 = 2_{260°}$

$k = 3 \longrightarrow x_3 = 2_{380°} = x_0$

$k = 4 \longrightarrow x_4 = 2_{500°} = x_1$

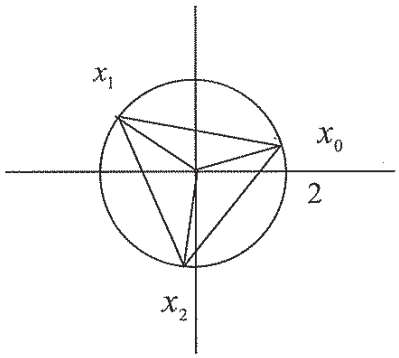
$k = 5 \longrightarrow x_5 = 2_{620°} = x_2$

$k = -1 \longrightarrow x_{-1} = 2_{-100°} = x_2$

Podríamos seguir asignando valores a k, pero siempre obtendremos complejos x de módulo 2 y argumentos congruentes con $\alpha = 20°$ o con $\alpha = 140°$ o con $\alpha = 260°$

↳ OBSERVACIÓN:

La representación de los afijos de x_0, x_1 y x_2, muestra que son los vértices de un triángulo equilátero inscripto en una circunferencia con centro en el origen y radio 2.



Todo lo expuesto para el ejemplo proporciona los lineamientos para probar el siguiente **teorema**, que generaliza el resultado, y cuya demostración se deja como ejercicio.

Todo complejo $z = |z|_{\alpha}$ tiene exactamente n raíces enésimas dadas por la fórmula:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}_{\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}k} \quad ; \quad k = 0,1,.....,n-1 \quad (*)$$

↳ OBSERVACIÓN:

Todas las raíces enésimas tienen igual módulo: $\sqrt[n]{|z|}$ y sus argumentos difieren en $\frac{2\pi}{n}$ radianes, por lo tanto, los afijos de estas raíces son los vértices de un polígono regular de n lados inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

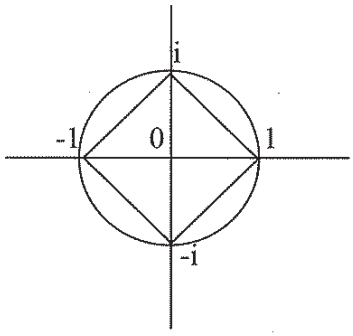
A continuación se verá otro ejemplo:

Calcule las raíces cuartas de la unidad.

Se trata de hallar $\sqrt[4]{1_{0^\circ}}$.

La aplicación de (*) da:

$$\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{2\pi}{4}k} = 1_{\frac{\pi}{2}k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$



entonces para:

$k = 0 \longrightarrow x_0 = 1$

$k = 1 \longrightarrow x_1 = 1_{\frac{\pi}{2}} = i$

$k = 2 \longrightarrow x_2 = 1_{\pi} = -1$

$k = 3 \longrightarrow x_3 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i$

➲ EJERCICIOS:

11- Calcule:

a) $\sqrt[3]{i}$ d) $\sqrt[3]{64_{120^\circ}}$

b) $\sqrt[3]{27}$ e) $\sqrt{-9}$

c) $\sqrt[4]{-16}$ f) $\sqrt[5]{1+i}$

12- Resuelve las ecuaciones:

a) $x^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 0$

b) $x^2 - (2+i)x + (1+i) = 0$

c) $x^2 + x(4+3i) + (1+5i) = 0$

13- Calcule las raíces cúbicas de 1. Sean éstas: $x_0 = 1$, x_1 y x_2. Pruebe que x_1 y x_2 son conjugadas y verifican, la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$

AUTOEVALUACIÓN N°10

1. Calcule z^{-5} para $z = 1 - i$
2. Represente gráficamente los siguientes números complejos

   a) $z_1 = \dfrac{1+i}{1-i}$

   b) $z_2 = 2.(1+i) + 3.(2-i)$

   c) $z_3 = 6.i^{10}$

3. Sabiendo que una de las raíces quintas de un número $z \in \mathbf{C}$ es $1 - \sqrt{3}i$, halle las restantes raíces quintas. ¿Cuál es z ?
4. Resuelva la ecuación $z^5 + 32i = 0$
5. Sea $z = (1+\sqrt{3}i)^n$ con $n \in \mathbf{N}$. Encuentre $n \in \mathbf{N}$ tal que $z \in \mathbf{R}^+$.
6. ¿Puede un número complejo no real tener alguna raíz enésima real? Justifique.
7. Pruebe que el producto, el cociente y potencia entera de raíces enésimas de la unidad son también raíces enésimas de la unidad.
8. a) Represente gráficamente los siguientes conjuntos:

   $A = \{z \in C / 2 \le |\mathrm{Re}(z)| \le 5 \ , \ -4 \le \mathrm{Im}(z) \le 3\}$

   $B = \{z \in C / \ |\mathrm{Re}(z)| \le 2; -4 \le \mathrm{Im}(z) \le 3\}$

   $C = \left\{ z \in C / 2 \le |z| \le 5, 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{6} \right\}$

   $D = \left\{ z \in \mathrm{C} : \mathrm{Im}(z) \le 2, |z| > 1, \dfrac{\pi}{4} \le \arg(z) \le \pi \right\}$

   Dé en cada uno de los casos un elemento que pertenezca y uno que no pertenezca al conjunto indicado.

b) ¿$z = \dfrac{(2-i)^2}{1+i} \in A$?, y ¿$z \in B$?