

CAPÍTULO 3: NÚMEROS COMPLEJOS

Seguimos ampliando el campo numérico...

Tal como surgió con los números reales, los números complejos surgieron por el interés (y necesidad) de dar solución a un problema dado. Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ carece de solución real, ya que el cuadrado de un número real es siempre positivo o cero; es decir que no existe un número x real tal que $x^2 = -1$.

Fue necesario, entonces, ampliar el concepto de número para incluir aquellos que verificaran esta ecuación particular. La idea fue definir un nuevo número que verificara $x^2 + 1 = 0$.

Tal fue “ i ” definido de modo que $i^2 = -1$

Esta creación, genialidad de la mente humana, permitió llenar ciertos baches, pudiendo determinar ahora soluciones, por ejemplo, a toda ecuación polinómica. Su existencia ha simplificado diversos campos matemáticos (por ejemplo la geometría).

El sistema de números resultante de adjuntar i y sus combinaciones al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$) es el sistema de los números complejos, cuyo estudio es el objeto de este capítulo.

Forma binómica de un número complejo:

Un número complejo es toda expresión

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales, e i se define por la relación $i^2 = -1$.

- Al número a se lo llama parte o componente real de z y se representa mediante $\text{Re}(z)$
- Al número b es la parte o componente imaginaria de z y se representa por $\text{Im}(z)$

$$\underbrace{a}_{\text{Parte real}} + \underbrace{bi}_{\text{Parte imaginaria}}$$

La unidad imaginaria

El número i , recibe el nombre de unidad imaginaria, aceptándose que i se comporta como un número real, respetando las leyes conmutativa, asociativa y distributiva. Son válidas también las propiedades de la potencia:

$$a) i^r \cdot i^s = i^{r+s}$$

$$b) (i^r)^s = i^{r \cdot s} \text{ con } r, s \in \mathbb{Z}$$

Comentario:

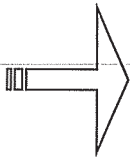
El número i (del latín *imaginarius*) fue llamado así por el matemático Euler (1707-1783). Los nombres de imaginarios, complejos que hoy se emplean aparecen en el horizonte matemático hacia el siglo XVI y hacen referencia a las raíces cuadradas de números negativos como números imposibles o imaginarios o como “fantasmas de los números reales”.

Si bien los números complejos nacieron en una atmósfera de misterio y desconfianza, cuestionándose la validez de las operaciones, es en el siglo XIX cuando, a través de los trabajos de los matemáticos Wessell (1745-1818), Argand (1768-1822) y Gauss (1777-1855) sobre la interpretación geométrica de los números complejos, se lograron sentar las bases matemáticas sólidas para el nuevo sistema de números.

- Es claro que la introducción de i permite resolver las raíces cuadradas de los números negativos. Así, por ejemplo:

i y $-i$ son raíces cuadradas de -1 pues $i^2 = -1$ y $(-i)^2 = -1$

$2i$ es una de las dos raíces cuadradas de -4



- Se puede comprobar, también fácilmente, que las sucesivas potencias de i se repiten periódicamente en grupos de 4.

$$i^0 = 1$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

$$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$$

A partir de este reconocimiento, en donde se nota que el resultado va a depender directamente del resto de la división entera del exponente por cuatro, es posible calcular cualquier **potencia de i** . Por ejemplo, para calcular:

a) i^{21} como $21 = 4 \times 5 + 1$, se tiene $i^{21} = (i^4)^5 i^1 = 1^5 i^1 = i$

b) i^{-112} como $112 = 28 \times 4$ resto 0, resulta

$$i^{-112} = \frac{1}{i^{112}} = \frac{1}{(i^4)^{28}} = \frac{1}{1^{28}} = 1$$

Estamos en condiciones de generalizar lo observado en el siguiente teorema:

Para todo $n \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$i^n = i^r$$

donde r es el resto de la división de n por 4, por lo que r puede asumir los valores 0, 1, 2 o 3.

Demostración:

Al dividir n por 4 obtenemos un resto r , un cociente c y se puede verificar que $n = c \times 4 + r$, entonces:

$$i^n = i^{c \times 4 + r} = i^{c \times 4} \cdot i^r = (i^4)^c \cdot i^r = 1^c \cdot i^r = i^r$$



Ejemplos:

1) $i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} = 0$

El resto de dividir 12 por 4 es 0, el resto de dividir 13 por 4 es 1, el resto de dividir 14 por 4 es 2 y el resto de dividir 15 por 4 es 3, entonces:

$$\begin{aligned} i^{12} + i^{13} + i^{14} + i^{15} &= \\ = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 &= \\ = 1 + i - 1 - i &= 0 \end{aligned}$$

2) $i^{-14} + i^{-16} = 0$

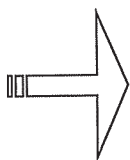
El resto de dividir 14 por 4 es 2 y el resto de dividir 16 por 4 es 0, entonces:

$$\begin{aligned} i^{-14} + i^{-16} &= \\ \frac{1}{i^{14}} + \frac{1}{i^{16}} &= \\ \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^0} = \frac{1}{-1} + \frac{1}{1} &= 0 \end{aligned}$$

El conjunto de los números complejos

Lo simbolizaremos con la letra C , y está formado por todos los números de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ e i es la unidad imaginaria, es decir que $i^2 = -1$. Resumiendo:

$$C = \{z = a + bi / a, b \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$



- Los números reales son complejos ($\mathbb{R} \subset C$), ya que si

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x = x + 0i$$

- A los números complejos de la forma bi , es decir aquellos que su parte real es nula, se los denomina **imaginarios puros**.

Igualdad de números complejos

Dos números $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$ son iguales si y sólo si sus partes reales e imaginarias son respectivamente iguales, en símbolos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$$

Opuesto de un número complejo

Si $z = a + bi$, entonces el opuesto de z es $-z = (-a) + (-b)i$

Suma y resta de números complejos

Debido a que hemos introducido a los números complejos anunciando que iban a respetar las propiedades: asociativa, conmutativa y distributiva, entre otras cosas. Podemos ir resolviendo algunos ejemplos

1.

$$\begin{aligned}(2+5i) + (3+8i) &= 2+5i+3+8i = 2+3+5i+8i = \\ &= (2+3) + (5i+8i) = 5 + (5+8)i = \\ &= 5+13i\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(2+5i) - (3+8i) &= (2+5i) + [-(3+8i)] = (2+5i) + [(-3) + (-8)i] = \\ &= [2+(-3)] + [5+(-8)]i = \\ &= -1 + (-3)i = -1-3i\end{aligned}$$

En general:

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, se tiene:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$



Multipliación de números complejos

1.

$$\begin{aligned}(2+3i) \cdot (5+6i) &= (2+3i) \cdot 5 + (2+3i) \cdot 6i = 2 \cdot 5 + 3i \cdot 5 + 2 \cdot 6i + 3i \cdot 6i = \\ &= 10 + (3 \cdot 5)i + (2 \cdot 6)i + (3 \cdot 6) \cdot (i \cdot i) = \\ &= 10 + 15i + 12i + 18 \cdot i^2 = 10 + 15i + 12i + 18 \cdot (-1) = \\ &= 10 + (-18) + (15+12)i = -8 + 27i\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(3-5i) \cdot (1+2i) &= 3-5i+6i-10i^2 = 3-5i+6i-10 \cdot (-1) = \\ &= 3+10+6i-5i = 13+i\end{aligned}$$

En general:

Si $z_1 = a_1 + b_1i$ y $z_2 = a_2 + b_2i$, se tiene:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2)i$$





Práctica:

1. Resuelve las siguientes operaciones con números complejos:

a. $(5+7i) \cdot (2+i) + (1+3i)$ c. $5i + (1-i)^3$ e. $2 \cdot i^{129} + 3i(3-i)$

b. $(2+3i)^2$ d. $(1+i)^2 - (2+3i)$ f. $(5-i)^2 - (2-2i)$

2. Obtenga los valores de x e y reales tales que los números $z = x + 2yi$ y $w = 3 \cdot (5-i) + 2 + 3i$ sean iguales.

3. Encuentre el valor del número real k de forma que $z = (k+5i) \cdot (2+i) + 3i$ sea:

a. un número real

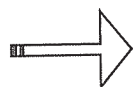
b. un imaginario puro

4. Muestre que los números $1-i$ y $1+i$ verifican la ecuación $x^2 - 2x + 2 = 0$

5. Calcula los números reales x e y para que se verifique la igualdad

$$(3+xi) - (y+6i) = 8-3i$$

Conjugado de un número complejo



El conjugado de un número complejo $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$



Ejemplos

1) $\overline{3+5i} = 3-5i$

2) $\overline{7-2i} = 7+2i$

3) $\overline{3i} = \overline{0+3i} = 0-3i = -3i$

4) $\overline{8} = \overline{8+0i} = 8-0i = 8$

Propiedades $z=a+bi$

➤ $z = \bar{\bar{z}}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$

➤ $z + \bar{z} = 2a$

➤ $z - \bar{z} = 2bi$

➤ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2$

➤ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

➤ $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

➤ $-\bar{z} = \overline{-z}$

Al final del capítulo puedes consultar algunas demostraciones

División de números complejos

Queremos dividir el número complejo $10+5i$ con el complejo $1+2i$, es decir queremos efectuar

$$\frac{10+5i}{1+2i}$$

Con "resolver" nos referirémos a llegar a la forma $a+bi$

$$\frac{10+5i}{1+2i} = \frac{10+5i}{1+2i} \cdot 1 = \frac{10+5i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{(10+5i) \cdot (1-2i)}{1^2 + (-2)^2} = \frac{20-15i}{5} = 4-3i$$

Multiplico denominador y numerador por el conjugado del denominador

Por prop. de la multiplicación de conjugados

En general:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd) + (bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$



Práctica:

6. Resuelve:

a. $\frac{2+6i}{1+\sqrt{3}i}$

d. $\frac{3+i}{1+i} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)$

g. $\frac{i^{12} \cdot i^{-121} + i^{100}}{i^{10}}$

b. $\frac{10+5i}{2-i}$

e. $\frac{(14+11i) - 13i}{i}$

h. $\left(\frac{1}{3}i \right) \div (2i)$

c. $\left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2$

f. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^4$

i. $\frac{(2+5i)(-3+i)}{2-5i}$

7. Calcule el número real a tal que $\frac{4+ai}{1+i}$ resulte ser un número real.

Recíproco de un número complejo no nulo.

Definimos el recíproco de $z \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$ como aquel número complejo w tal que

$$z \times w = 1; \text{ y lo simbolizamos } z^{-1} = \frac{1}{z}$$

¿Cómo lo obtenemos?

Por ejemplo si $z = 3+i$, tendremos que su recíproco es:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{1}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{3-i}{9+1} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

Así podemos definir también el cociente entre complejos como una multiplicación, en efecto:

$$\frac{z}{w} = z \times w^{-1}$$

Con lo que podemos ampliar las propiedades de los conjugados.

$$\triangleright \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad (z_2 \neq 0)$$

$$\triangleright \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \quad (z \neq 0)$$

$\triangleright$ Si con $R(z_1, z_2, \dots, z_r)$ se indica una operación efectuada combinando los complejos $z_1, z_2, \dots, z_r$ en sumas, productos, potencias y cocientes, entonces

$$\overline{R(z_1, z_2, \dots, z_r)} = R(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_r})$$



Práctica:

8. Encuentre el número z cuyo inverso es $3 + 4i$.

9. Encuentre los números complejos $z = a + bi$ tales que:

a) $\frac{1}{z} = \overline{z}$

Queremos que $\frac{1}{a + bi} = a - bi$, esto es lo mismo que pedir que $(a - bi)(a + bi) = 1$, con lo

que tenemos: $\boxed{a^2 + b^2 = 1}$

b) $z = -\overline{z}$

c) $z = \overline{z}$

10. Encuentre los números reales x e y que satisfacen:

a) $(x + yi)(3 - 2i) = 4 + i$

b) $(x + iy)(1 + i) = 3 - i$

c) $(x + iy)4i = 14i$

11. Escribe un número complejo tal que:

a) Su parte real sea el triple de su parte imaginaria

b) Sea un imaginario puro que al elevarlo a la 3 su parte imaginaria sea 8

12. La suma de un número complejo con su conjugado es 18 y el producto entre ambos es 85. Escribe todas las soluciones posibles.

Algunas demostraciones:

▪ $z - \bar{z} = 2bi$, en efecto:

$$\begin{aligned} z - \bar{z} &= a + bi - (a - bi) = \\ &= a + bi - a + bi = \\ &= 2bi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = \\ &= a^2 - b^2 \cdot i^2 = a^2 - (-1)b^2 = \\ &= a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 \end{aligned}$$

▪ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = \operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2$,

en efecto:

▪ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, en efecto:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{a_1 + b_1i + a_2 + b_2i} = \\ &= \overline{a_1 + a_2 + b_1i + b_2i} = \\ &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN N° 3

1. Resuelve las siguientes operaciones:

a. $-1 + i - \overline{(-3i + 2)} + \frac{1}{2}i^5 =$

b. $\frac{i^{151} - i}{3 - 2i} + \sqrt{-16} =$

2. Hallar el valor de “a” para que z sea real : $z = \frac{a + 3i}{2 - 5i}$

3. ¿Cuánto ha de valer x, real, para que $(2 + xi)^2$ sea imaginario puro?

4. Calcule x e y en la siguiente expresión:

$$2x - 4yi = \frac{(3 + 2i) \cdot (2 - i)}{1 + i}$$

5. Siendo $z_1 = 1 + i$; $z_2 = 4 - 3i$ y $z_3 = -1 - 2i$ Calcular:

a. $\frac{z_1}{z_2 + z_3}$

b. $\frac{z_1^2}{-z_3}$

c. $(z_2 - z_1)^2 + \frac{z_3}{2}$