

Introducción a la Física Nuclear 2024

Rodolfo M. Id Betan (Rolo)
idbetan@ifir-conicet.gov.ar
Edificio Ifir, Of. 235 (Esmeralda y Ocampo)

Álgebra de momentos angulares

Contenido: Definición de momento angular. Deducción de las matrices de Pauli. Acople de dos momentos angulares. Coeficientes de Clebsch-Gordan. Ejemplo de acoples. Acople de tres y cuatro momentos angulares. Cambio de acoples y símbolo de Wigner $6j$ y $9j$. Ejemplo de acople de cuatro momentos angulares.

Lectura recomendada: Capítulo 1 del libro From Nucleons to Nucleus. Concepts of Microscopic Nuclear Theory. J. Suhonen. Springer. 2007.

Aplicaciones

- Momento angular total de una partícula con spin: acople ls
- Momento angular de dos partículas: acople jj o LS
- Momento angular de isospin: acople de dos nucleones

Partícula con espín: Función de onda no acoplada

Función de onda de una partícula

$$\phi_{nlj}(r) \quad Y_{lm_l}(\theta, \phi) \quad \chi_{sm_s}$$

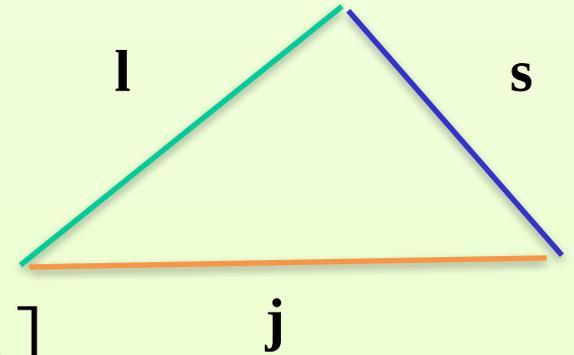
s: momento intrínseco de espín **l**: momento angular orbital

l y s desacoplados

$$\psi_{nljm}(r, s) = \phi_{nlj}(r) \chi_{sm_s} Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

Clebsch-Gordan

l y s acoplados



$$\psi_{nljm}(r, s) = \phi_{nlj}(r) [\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

Coeficientes de Clebsch-Gordan

$$[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm} = \sum_{m_s, m_l} \langle s m_s l m_l | j m \rangle \chi_{s m_s} Y_{l m_l}(\theta, \phi)$$

Función de onda de dos partículas

Contexto: Sistema Many-Body Finito

**Función de onda de dos partículas en acople sl
(ver aplicaciones al final)**

$$\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 | l_a l_b SL, JM \rangle = \phi_a(r_1) \phi_b(r_2) \left[[\chi_{s_1}(1) \chi_{s_2}(2)]_S [Y_{l_a}(\hat{r}_1) Y_{l_b}(\hat{r}_2)]_L \right]_{JM}$$

**Función de onda de dos partículas en acople jj
(ver aplicaciones al final)**

$$\langle \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 | j_a j_b, JM \rangle = \phi_a(r_1) \phi_b(r_2) \left[[\chi_{s_1}(1) Y_{l_a}(\hat{r}_1)]_{j_a} [\chi_{s_2}(2) Y_{l_b}(\hat{r}_2)]_{j_b} \right]_{JM}$$

Definición de momento angular

Definición

Relaciones de conmutación

$$J = (J_1, J_2, J_3)$$

$$J^\dagger = J$$

$$[J_1, J_2] = J_1 J_2 - J_2 J_1 = i\hbar J_3$$

$$[J_2, J_3] = i\hbar J_1$$

$$[J_3, J_1] = i\hbar J_2$$

Verificar que
tiene
unidades de
impulso
angular

$$[J_i, J_j] = i\hbar \sum_k \epsilon_{ijk} J_k$$

Coeficientes de Levi-Civita

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

$$\epsilon_{121} = \epsilon_{112} = \epsilon_{212} = \dots = 0$$

Ejemplo

$$[J_1, J_2] = i\hbar \sum_{k=1}^3 \epsilon_{12k} J_k \quad [J_1, J_2] = i\hbar J_3$$

Autovectores

Operadores

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$$

Autovectores

$$||j m \rangle$$

Autovalores de

$$J^2 ||j m \rangle = \hbar^2 j(j+1) ||j m \rangle$$

j : entero o semi-entero

Autovalores de

$$J_z ||j m \rangle = \hbar m ||j m \rangle$$

$$m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

Base

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

Autovectores

$$|j m\rangle$$

Base

$$|f\rangle \longrightarrow |f\rangle = I|f\rangle$$

Ortonormalidad

$$\langle j m | j' m' \rangle = \delta_{j j'} \delta_{m m'}$$

Completitud

$$I = \sum_{j m} |j m\rangle \langle j m|$$

Coeficientes $\langle l m_l | f \rangle$

$$|f\rangle = \sum_{l m_l} |l m_l\rangle \langle l m_l | f \rangle = \sum_{l m_l} f_{l m_l} |l m_l\rangle$$

Armónicos esféricos

Ejemplo: Momento angular orbital

Representación abstracta

$$l = (l_x, l_y, l_z)$$

Autovectores

$$l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$$

$$l^2 ||l m_l \rangle = \hbar^2 l(l+1) ||l m_l \rangle$$

$$l_z ||l m_l \rangle = \hbar m_l ||l m_l \rangle$$

Autovalores

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$m_l = -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l$$

Ortonormalidad

$$\langle l m | l' m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Completitud

$$I = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l ||l m \rangle \langle l m ||$$

Armónicos esféricos

Representación coordenadas

Armónicos esféricos (AE)

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta \phi | l m \rangle \rightarrow || l m \rangle \\ \rightarrow || \theta \phi \rangle$$

$$\bar{Y}_{lm}(\theta, \phi) = \langle l m | \theta \phi \rangle$$

$$l^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$$l_z Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Base para el espacio angular

$$\langle \theta \phi | \theta' \phi' \rangle = \frac{\delta(\theta - \theta')}{\sin \theta} \delta(\phi - \phi')$$

$$I = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi || \theta \phi \rangle \langle \theta \phi ||$$

Ejemplo: sgte. transparencia

Ortogonalidad de los armónicos esféricos

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta \phi | l m \rangle$$

A partir de la ortogonalidad ...

$$\bar{Y}_{lm}(\theta, \phi) = \langle l m | \theta \phi \rangle$$

$$\delta_{ll'} \delta_{mm'} = \langle l m | l' m' \rangle = \langle l m | I | l' m' \rangle$$

$$I = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi || \theta \phi \rangle \langle \theta \phi ||$$

$$. = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \langle l m | \theta \phi \rangle \langle \theta \phi | l' m' \rangle$$

$$. = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \bar{Y}_{lm}(\theta \phi) Y_{l'm'}(\theta \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Expansión en armónicos esféricos

Representación coordenadas

$$||l m_l\rangle \longrightarrow \langle \theta \phi | l m_l \rangle = Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

Expansión

$$||f\rangle = \sum_{lm_l} ||l m_l\rangle \langle l m_l | f \rangle = \sum_{lm_l} f_{lm_l} ||l m_l\rangle$$

$$\rightarrow \langle \theta \phi | f \rangle = \sum_{lm_l} f_{lm_l} \langle \theta \phi | l m_l \rangle = \sum_{lm_l} f_{lm_l} Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

Notar que los coeficientes son los mismos

$$f_{lm} = \langle l m_l | f \rangle$$

Expresarlos como integral y ver que los coeficientes de Fourier

$$\Rightarrow f(\theta, \phi) = \sum_{lm_l} f_{lm_l} Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

Operadores de crecimiento

Operador de crecimiento

$$J = (J_1, J_2, J_3)$$

$$(|j m\rangle)$$

Raising and lowering operators

$$J_+ = J_1 + iJ_2$$

$$J_- = J_1 - iJ_2$$

Relación de conmutación

$$[J_1, J_2] = i\hbar J_3$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3$$

Veamos... $[J_+, J_-] = [J_1 + iJ_2, J_1 - iJ_2] =$
 $= [J_1, J_1] - i[J_1, J_2] + i[J_2, J_1] - i^2[J_2, J_2] =$
 $= 0 - i(i\hbar J_3) + i(-i\hbar J_3) - 0 =$
 $= -2i^2\hbar J_3 = 2\hbar J_3$

Operador de crecimiento

$$J = (J_1, J_2, J_3)$$

$$(|j m\rangle)$$

Raising and lowering operators

$$J_+ = J_1 + iJ_2$$

$$J_- = J_1 - iJ_2$$

Relación de conmutación

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_3$$

$$[J_+, J_3] = -\hbar J_+$$

$$[J_-, J_3] = \hbar J_-$$

$$[J_+, J^2] = 0$$

$$[J_-, J^2] = 0$$

Asignado
como TP

Como ejemplo de aplicación, vamos a usar estas identidades en la siguiente transparencia

Uso de los operadores de crecimiento

$$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

$$\mathbf{J}^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$$

$$J_+ = J_x + iJ_y$$

$$J_- = J_x - iJ_y$$

Generación del autovector (j,m+1):

Veamos... consideremos el vector $J_+ |jm\rangle$ y veamos que es autovector de \mathbf{J}^2 y J_z

$$\mathbf{J}^2(J_+ |jm\rangle) = \hbar^2 j(j+1)(J_+ |jm\rangle) \quad \longleftarrow \quad [J_{\pm}, \mathbf{J}^2] = 0$$

$$J_z(J_+ |jm\rangle) = \hbar(m+1)(J_+ |jm\rangle) \quad \longleftarrow \quad [J_+, J_z] = -\hbar J_+$$

Propiedades de \mathbf{J}

$$\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$$

$$J^2 |jm\rangle = \hbar^2 j(j+1) |jm\rangle$$

$$J_+ = J_x + iJ_y$$

$$J_- = J_x - iJ_y$$

Generación del autovector $(j, m+1)$:

Condon-Shortley phase convention assumed (ver más adelante)

$$J_+ |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |jm+1\rangle$$

$$J_- |jm\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |jm-1\rangle$$

Aplicación de los operadores J_{\pm} : Matrices de Pauli

Deducción de las matrices de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

Espín

$$S = (S_x, S_y, S_z)$$

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

Autovectores

$$S^2 ||s m_s \rangle = \hbar^2 s(s+1) ||s m_s \rangle$$

$$S_z ||s m_s \rangle = \hbar m_s ||s m_s \rangle$$

$$s = \frac{1}{2}$$

$$m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Cálculo de la realización de S_x

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

$$S = (S_x, S_y, S_z) \quad \text{Matrices de Pauli}$$

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S^2 ||s m_s\rangle = \frac{3}{4} \hbar^2 ||s m_s\rangle$$

$$S_z ||s m_s\rangle = \hbar m_s ||s m_s\rangle$$

Podemos omitir el primer factor $\frac{1}{2}$ en todos bracket

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle s m_s | s' m'_s \rangle = \delta_{s s'} \delta_{m_s m'_s}$$

$$\begin{aligned} S_+ &= S_x + i S_y \\ S_- &= S_x - i S_y \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S_{\pm} |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

Cálculo de la realización de S_x

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad S = (S_x, S_y, S_z) \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_x | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} \quad S_{\pm} |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

$$\begin{aligned} S_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= 0 & S_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \hbar \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ S_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \hbar \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle & S_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= 0 \end{aligned}$$

Expresiones de las Matrices S_+ y S_- .

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad S = (S_x, S_y, S_z) \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_+ | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_+ | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$S_- = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_- | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_- | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2}$$

$$S_+ \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

$$S_- \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$S_+ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \hbar \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$S_- \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

Cálculo de la realización de S_x

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma \quad S = (S_x, S_y, S_z) \quad \sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \hbar & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{S_+ + S_-}{2} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_x$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz S_z

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

$$S = (S_x, S_y, S_z)$$

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_z | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_z | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$S_z = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_z$$



$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S_z |s m_s\rangle = \hbar m_s |s m_s\rangle$$

$$\langle s m_s | s' m'_s \rangle = \delta_{s s'} \delta_{m_s m'_s}$$

Matriz S_y

$$S = \frac{\hbar}{2} \sigma$$

$$S = (S_x, S_y, S_z)$$

$$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$S_y = \begin{pmatrix} \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_y | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} | S_y | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \\ \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_y | \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle & \langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | S_y | \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} S_+ &= S_x + iS_y \\ S_- &= S_x - iS_y \end{aligned}$$



$$S_y = \frac{S_+ - S_-}{2i}$$

$$S_{\pm} |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s \pm 1)} |s, m_s \pm 1\rangle$$

$$S_y = -i \begin{pmatrix} 0 & \frac{\hbar}{2} \\ -\frac{\hbar}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \sigma_y \quad \longrightarrow \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Bibliografía: Angular Momentum.
D.M. Brink and G.R. Satchler.
Oxford Science Publication

Sobre Simetrías, Leyes de Conservación y Momento Angular

Sobre Simetrías

Transformación de Simetría (TS):

Una TS de un sistema dinámico es una transformación que aplicada a cualquier estado de movimiento del sistema lo lleva a otro estado de movimiento.

- Ejemplo: Consideremos la solución de un problema clásico que involucra la posición de dos partículas como función del tiempo. Si las partículas son intrínsecamente idénticas, entonces el intercambio de ellas da otra solución del problema. Luego, la operación de *intercambiarlas* es una TS.
- En cuántica, una TS es dada por un operador lineal que, actuando sobre una función de onda, da otra función de onda que satisface el mismo Hamiltoniano que aquella.
- Una TS preserva la ortogonidad y normalización de la función de onda, luego el operador que la describe es unitario.
- El operador que describe la TS conmuta con el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{d\psi}{dt} &= H\psi \\i\hbar \frac{dU\psi}{dt} &= HU\psi \\i\hbar \frac{d\psi}{dt} &= U^{-1}HU\psi = H\psi \\ \Rightarrow UH &= HU \Rightarrow [H, U] = 0\end{aligned}$$

Grupo:

Un grupo abstracto es definido como el conjunto de elementos a, b, \dots con una *ley de multiplicación* que satisface:

- $a(bc) = (ab)c$

- Existe 1 tal que $a1 = 1a = a$

- Existe a^{-1} tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$

- Ejemplo: Conjunto de todas las matrices cuadradas no singulares de orden n con la regla de multiplicación de matrices, y se lo denomina *grupo lineal completo de orden n* .

- El conjunto de las matrices unitarias $A^{-1} = A^{+i}$ de orden n se denomina *grupo unitario de orden n* . Donde A^{+i} es la matriz adjunta.

- El grupo unitario es un sub grupo del grupo completo.

Grupo de Simetría (GS):

- La aplicación de dos TS sucesivas produce una nueva TS.

- Se puede mostrar que el *conjunto de todas las TS* con la ley de ítem anterior forma un grupo, denominado *grupo de simetría* del sistema.

- Para un sistema cuántico las TS son representadas por operadores unitarios, y la aplicación sucesiva de dos transformaciones A y B es representada por el operador BA .

- Dado que cada TS conmuta con H , implica que el conjunto de la TS de un sistema cuántico está contenido en el conjunto de todos los operadores unitarios que conmutan con el operador Hamiltonian H del sistema.

Grupo de Simetría (GS): (Cont.)

El conjunto de todas las TS forma un grupo denominado *grupo de simetría*.

Simetrías Geométricas (SG):

Un sub-grupo importante de TS tienen un origen geométrico.

Ejemplo:

El espacio de la física clásica es descrito por una geometría Euclídeana, esto es, todos los puntos y todas las direcciones son equivalentes.

Luego, las operaciones de traslación y rotación aplicadas a un sistema físico en un espacio Euclídeano pertenecen al GS del sistema.

También podemos decir que las simetrías físicas determinan la geometría del espacio.

Ejemplo:

La transformación de Lorentz y reflexión espacial son otros ejemplos

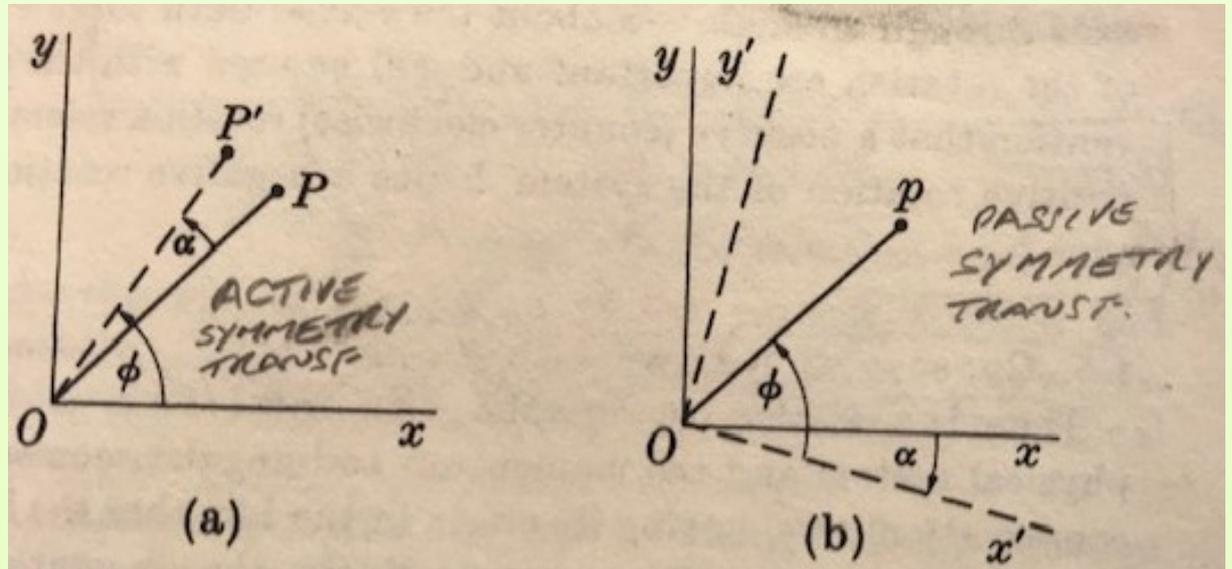
Transformaciones activas (TA) o pasivas (TP):

(a) En la TA, la operación de simetría transforma el estado del sistema en otro.

(b) En la TP, se interpreta la operación de simetría como una transformación de coordenadas.

Ejemplo:

Rotación de un sistema cuántico de una partícula alrededor del eje z en un ángulo α



$$\psi \Rightarrow \psi' = D_\alpha \psi$$

$$\psi'(r, \theta, \phi + \alpha) = \psi(r, \theta, \phi)$$

$$\psi'(r, \theta, \phi) = \psi(r, \theta, \phi - \alpha)$$

Sobre Leyes de Conservación

Leyes de conservación: caso CLÁSICO

Existe una relación entre las simetrías geométricas de un sistema físico y las leyes de conservación, por ejemplo del momento o del momento angular.

Ejemplo:

Consideremos la transformación canónica generada por L_z , la componente z del momento angular de una partícula clásica.

Recordemos:

Si F es una función de q y p de un sistema dinámico y α es pequeño, la transformación canónica infinitesimal

$$p'_i = p_i + \alpha\{p_i, F\}$$

$$q'_i = q_i + \alpha\{q_i, F\}$$

conserva las ecuaciones de Hámilton en las nuevas coordenadas primadas.

Si G es una función de las coordenadas y momentos, entonces la misma función en las nuevas coordenadas viene dada por

$$G(p'_i, q'_i) = G(p_i, q_i) + \alpha\{G, F\}$$

El cambio de una función F viene dado de su corchete de Poisson con el Hamiltoniano del sistema:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}$$

Conservación:

$$\frac{dL_z}{dt} = \{L_z, H\} = 0$$

Ejemplo:

Aplicando la transformación L_z obtenemos:

$$x' = x - \alpha y$$

$$p'_x = p_x - \alpha p_y$$

$$y' = y + \alpha x$$

$$p'_y = p_y + \alpha p_x$$

$$z' = z$$

$$p'_z = p_z$$

$$H(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \alpha\{H, L_z\}$$

Invarianza del Hamiltoniano por Rotación

$$H(\mathbf{r}', \mathbf{p}') = H(\mathbf{r}, \mathbf{p})$$

Conmutación:

$$\{H, L_z\} = 0$$

Leyes de conservación: caso CUÁNTICO

Existe una relación entre las simetrías geométricas de un sistema físico y las leyes de conservación, por ejemplo del momento o del momento angular.

Ejemplo:

Consideremos la rotación generada por el operador L_z , de una partícula *cuántica*.

- Representación de Heisenber

- Relación $[F, G] = i\hbar\{F, G\}$

...desarrollar la versión cuántica para obtener la conmutación y la invariancia temporal...

Sobre el Momento Angular

Deducción de las reglas de conmutación del momento angular

$$\begin{array}{lll} p'_i = p_i + \alpha\{p_i, F\} & x' = x - \alpha y & p'_x = p_x - \alpha p_y \\ q'_i = q_i + \alpha\{q_i, F\} & y' = y + \alpha x & p'_y = p_y + \alpha p_x \\ & z' = z & p'_z = p_z \end{array}$$

Operador de rotación infinitesimal: $D_\alpha = 1 - i\alpha J_z$

Rotación infinitesimal del operador A usando la transformación canónica:

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x - \alpha A_y \\ A'_y &= A_y + \alpha A_x \\ A'_z &= A_z \end{aligned}$$

Rotación infinitesimal del operador A usando el operador de rotación:

$$\begin{aligned} A'_x &= D_\alpha^+ A_x D_\alpha \\ A'_x &= (1 + i\alpha J_z) A_x (1 - i\alpha J_z) \\ A'_x &= A_x + i\alpha (J_z A_x - A_x J_z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_z A_x - A_x J_z = [J_z, A_x] = i A_y$$

TP: completar el resto

Suma de momentos angulares

Suma de dos momentos angulares

Momentos angulares

$$[j_1, j_2] = 0$$

$$\{ |j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle \}$$

$$\mathbf{j}_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$j_{1,z} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$m_1 = -j_1, \dots, j_1$$

$$\mathbf{j}_2^2 |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$j_{2,z} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle$$

$$m_2 = -j_2, \dots, j_2$$

Autovalores individuales

Momentos angulares

$$[j_1, j_2] = 0$$

$$\{ |j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle \}$$

$$\mathbf{j}_1^2 |j_1 m_1\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1 m_1\rangle$$

$$j_{1,z} |j_1 m_1\rangle = m_1 \hbar |j_1 m_1\rangle$$

$$\mathbf{j}_2^2 |j_2 m_2\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_2 m_2\rangle$$

$$j_{2,z} |j_2 m_2\rangle = m_2 \hbar |j_2 m_2\rangle$$

Composición (suma)

$$J = j_1 + j_2$$

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

$$J_x = j_{1,x} + j_{2,x}$$

$$J_y = j_{1,y} + j_{2,y}$$

$$J_z = j_{1,z} + j_{2,z}$$

Verificación que la suma es un momento angular

Momentos angulares

$$[j_1, j_2] = 0 \quad \{ |j_1 m_1\rangle, |j_2 m_2\rangle \}$$

$$j_k^2 |j_k m_k\rangle = j_k(j_k + 1) \hbar^2 |j_k m_k\rangle$$

$$j_{k,z} |j_k m_k\rangle = m_k \hbar |j_k m_k\rangle$$

$$k = 1, 2$$

Momento angular total

$$J = j_1 + j_2$$

$$J = (J_x, J_y, J_z)$$

$$J_x = j_{1,x} + j_{2,x}$$

$$J_y = j_{1,y} + j_{2,y}$$

$$J_z = j_{1,z} + j_{2,z}$$

$$[j_{1,x}, j_{1,y}] = i \hbar j_{1,z}$$

$$[j_{1,x}, j_{2,y}] = 0$$

Mostrarlo para $[J_x, J_y] = i \hbar J_z$

$$[J_\alpha, J_\beta] = i \hbar \sum_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$$

$$\alpha, \beta, \gamma = (x, y, z)$$

Recordemos Levi-Civita

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0 \text{ resto}$$

Base desacoplada

Base desacoplada

Momentos angulares

$$j_1, j_2 \quad [j_1, j_2] = 0$$

$$J = j_1 + j_2$$

$$\mathbf{j}_k^2 |j_k m_k\rangle = j_k(j_k + 1)\hbar^2 |j_k m_k\rangle$$

$$j_{k,z} |j_k m_k\rangle = m_k \hbar |j_k m_k\rangle$$

$$m_k = -j_k, \dots, j_k \quad k = 1, 2$$

Base $\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \}$

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$$

Ortogonalidad

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j'_1 m'_1 j'_2 m'_2 \rangle &= \\ &= \delta_{j_1 j'_1} \delta_{m_1 m'_1} \delta_{j_2 j'_2} \delta_{m_2 m'_2} \end{aligned}$$

Completitud

$$I = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2|$$

Base desacoplada

Momentos angulares

$$j_1, j_2 \quad [j_1, j_2] = 0$$

$$J = j_1 + j_2$$

$$\mathbf{j}_k^2 |j_k m_k\rangle = j_k(j_k + 1)\hbar^2 |j_k m_k\rangle$$

$$j_{k,z} |j_k m_k\rangle = m_k \hbar |j_k m_k\rangle \quad k = 1, 2$$

Base $\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle \}$

Sistema completo de operadores que conmutan:

$$\{ j_1^2, j_2^2, j_{1,z}, j_{2,z} \}$$

Ejemplo: Función de onda de una partícula con spin

Kets

$$\langle r | nl \rangle = R_{nl}(r) \longrightarrow |nl\rangle$$

$$\langle \hat{r} | lm_l \rangle = Y_{lm_l}(\hat{r}) \longrightarrow |lm_l\rangle$$

$$\langle \sigma | sm_s \rangle = \chi_{sm_s}(\sigma) \longrightarrow |sm_s\rangle$$

$$\phi_{nlm_l m_s}(\vec{r}, s) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{sm_s}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 &= \mathbf{l} \\ \mathbf{j}_2 &= \mathbf{s} \\ [\mathbf{l}, \mathbf{s}] &= 0 \end{aligned}$$

Base desacoplada

$$\{ |nlm_l m_s\rangle = |nl\rangle |lm_l\rangle |sm_s\rangle \}$$

Uso del álgebra angular

Función de onda desacoplada

$$\phi_{nlm_l m_s}(\vec{r}, s) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{sm_s}$$

$$\phi_{nlm_l m_s}(\vec{r}, s) = \langle r | nl \rangle \langle \hat{r} | lm_l \rangle \langle \sigma | sm_s \rangle$$

$$\langle r\sigma | nlm_l sm_s \rangle = \langle r | nl \rangle \langle \hat{r} | lm_l \rangle \langle \sigma | sm_s \rangle$$

$$\langle r | nl \rangle = R_{nl}(r)$$

$$\langle \hat{r} | lm_l \rangle = Y_{lm_l}(\hat{r})$$

$$\langle \sigma | sm_s \rangle = \chi_{sm_s}(\sigma)$$

Base desacoplada

$$\{ | nlm_l sm_s \rangle = | nl \rangle | lm_l \rangle | sm_s \rangle \}$$

Base angular y spin

$$\{ | lm_l sm_s \rangle = | lm_l \rangle | sm_s \rangle \}$$

Autovalores

Función de onda desacoplada

Base angular y spin

$$\{ |lm_l sm_s\rangle = |lm_l\rangle |sm_s\rangle \}$$

Momentos angulares orbital l ($\hbar = 1$)

$$l^2 |lm_l\rangle = l(l+1) |lm_l\rangle \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$l_z |lm_l\rangle = m_l |lm_l\rangle \quad m_l = -l, \dots, l$$

Momentos angulares de spin s ($\hbar = 1$)

$$s^2 |sm_s\rangle = s(s+1) |sm_s\rangle = \frac{3}{4} |sm_s\rangle$$

$$s_z |sm_s\rangle = m_s |sm_s\rangle \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Autovalores

Función de onda desacoplada

$$\phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{sm_s}$$

$$l^2 \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) = l(l+1) \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$l_z \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) = m_l \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) \quad m_l = -l, \dots, l$$

$$s^2 \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) = \frac{3}{4} \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s)$$

$$s_z \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) = m_s \phi_{nlm_l m_s}(\bar{r}, s) \quad m_s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$$

Estas ecuaciones van a ser útiles al resolver la ecuación de Schrödinger

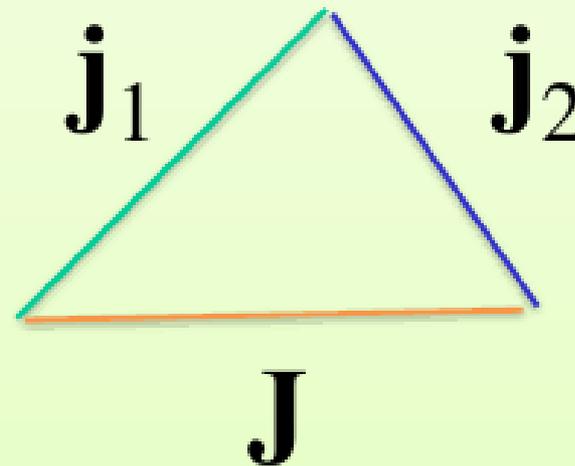
Base acoplada

Base acoplada

Momentos angulares

$$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \quad [\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2] = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$$



Base $\{ |j_1 j_2 j m\rangle \}$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

Ortogonalidad y completitud

$$\langle j_1 j_2 j m | j_1 j_2 j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$I = \sum_{jm} |j_1 j_2 j m\rangle \langle j_1 j_2 j m|$$

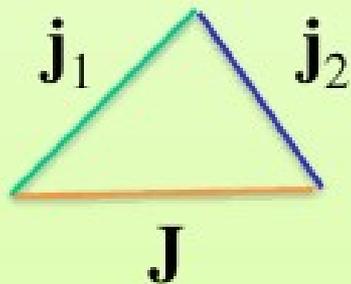
Base acoplada

Momentos angulares

$$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \quad [\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2] = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$$

Base $\{ |j_1 j_2 j m\rangle \}$



Rangos

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

Autovalores y autovectores

$$\mathbf{j}_1^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_1(j_1 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$\mathbf{j}_2^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j_2(j_2 + 1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$\mathbf{J}^2 |j_1 j_2 j m\rangle = j(j + 1)\hbar^2 |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = m\hbar |j_1 j_2 j m\rangle$$

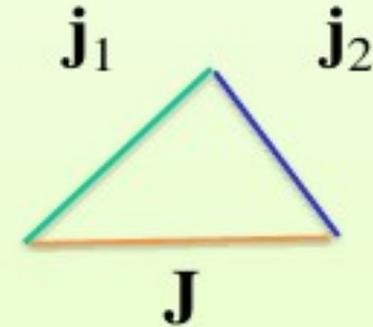
Sistema completo de operadores que conmutan:

$$\{\mathbf{j}_1^2, \mathbf{j}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z\}$$

Cómo construir la base acoplada

Momentos angulares

$$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \quad [\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2] = 0 \quad \mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$$



Base desacoplada

$$\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \}$$

Completitud

$$I = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2|$$

Base acoplada

$$\{ |j_1 j_2 j m\rangle \}$$

Completitud

$$I = \sum_{j m} |j_1 j_2 j m\rangle \langle j_1 j_2 j m|$$

Construcción:

$$I |j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

Construcción de vectores acoplados

Momentos angulares

$$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2 \quad [\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2] = 0$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$$

Base desacoplada

$$\{ |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \}$$

Base acoplada

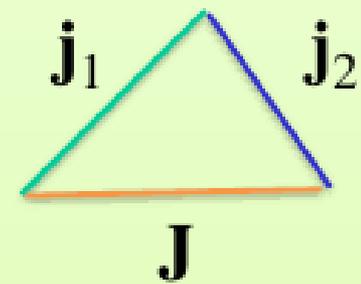
$$\{ |j_1 j_2 j m\rangle \}$$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = I |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Simplificación en la notación

$$|j_1 j_2 j m\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

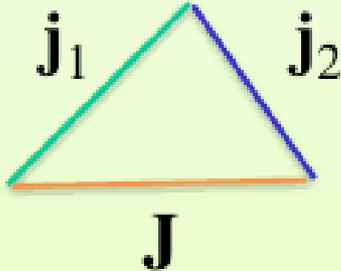


Coeficientes de Clebsch-Gordan

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m\rangle \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

Propiedades de los coeficientes de Clebsch-Gordan

Propiedades de los Clebsch-Gordan

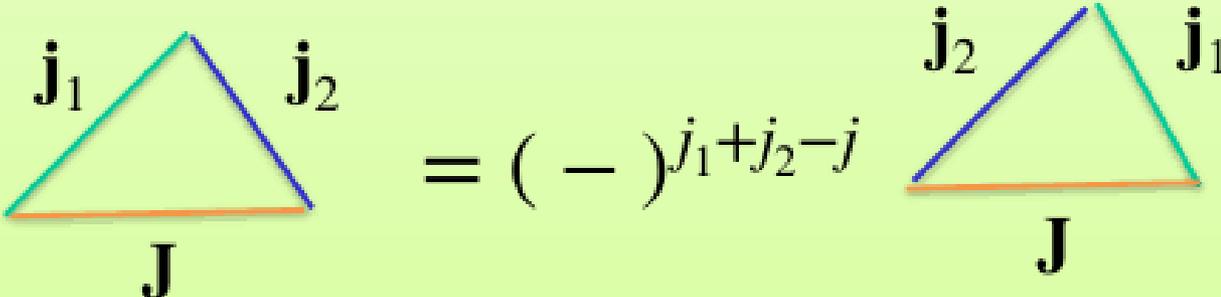


$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

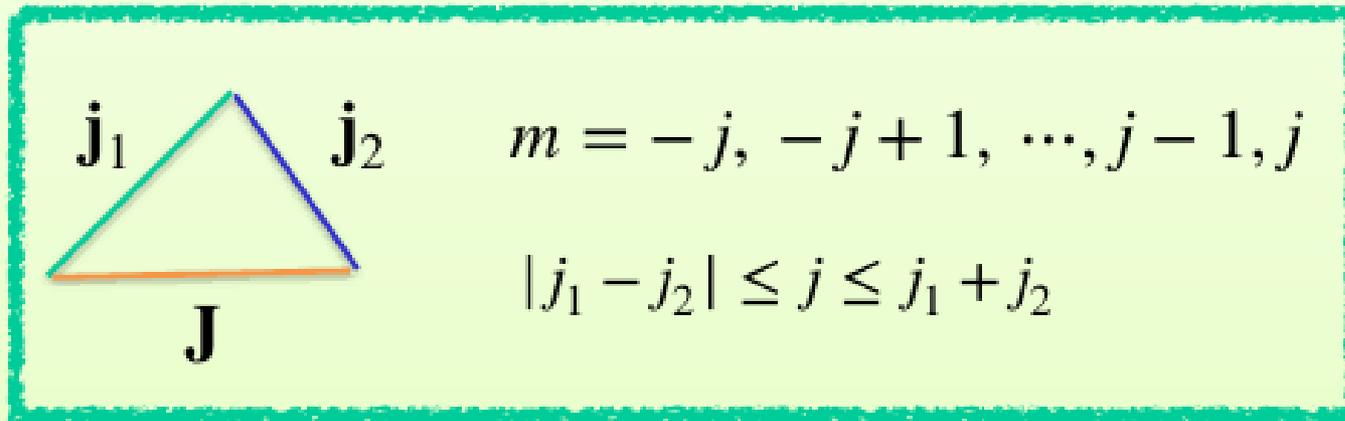
$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = 0 \quad m_1 + m_2 \neq m$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-1)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j m \rangle$$



$$= (-1)^{j_1 + j_2 - j}$$

Propiedades de los Clebsch-Gordan



$$\hat{j} = \sqrt{2j + 1}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-)^{j_1 + j_2 - j} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | j - m \rangle$$

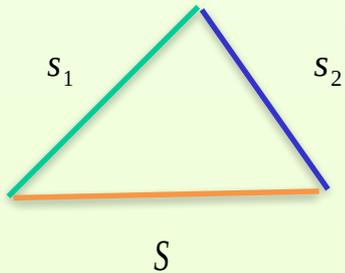
$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-)^{j_1 - m_1} \frac{\hat{j}}{\hat{j}_1} \langle j_1 m_1 j - m | j_2 - m_2 \rangle$$

$$\langle j m j - m | 0 0 \rangle = \frac{(-)^{j - m}}{\hat{j}}$$

$$\langle j m 0 0 | j m \rangle = 1 \quad \text{Convención de fase de Condon-Shortley}$$

**Acople de dos
momentos angulares:
spin 1/2**

Función de onda de dos fermiones acoplados



$$\mathbf{s}_k^2 |s_k m_{s_k}\rangle = \frac{3}{4} |s_k m_{s_k}\rangle \quad k = 1, 2$$

$$\mathbf{s}_{k,z} |s_k m_{s_k}\rangle = m_k |s_k m_{s_k}\rangle$$

$$0 \leq S \leq 1$$

$$S = 0, 1$$

$$M_S = -S, 0, S$$

Representación abstracta

$$|SM_S\rangle = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | SM_S \rangle |s_1 m_{s_1}\rangle |s_2 m_{s_2}\rangle$$

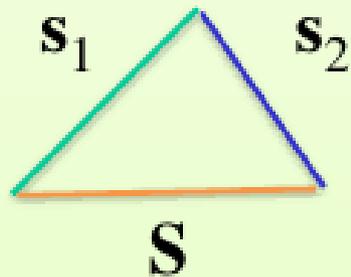
Representación espinor

$$\langle \sigma | sm_s \rangle = \chi_{sm_s}(\sigma)$$

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 | SM_S \rangle = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | SM_S \rangle \langle \sigma_1 | s_1 m_{s_1} \rangle \langle \sigma_2 | s_2 m_{s_2} \rangle$$

$$\chi_{SM_S}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | SM_S \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1) \chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$$

Singlete y triplete



$$S = 0, 1$$

$$M_{S=0} = 0$$

$$\hat{s}_1 = \hat{s}_2 = \sqrt{2}$$

$$M_{S=1} = -1, 0, 1$$

$$\langle 1/2 \ 1/2, 1/2 \ -1/2 | 00 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle = (-)^{j_1+j_2-j} \langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | j - m \rangle$$

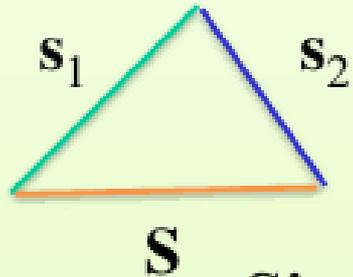
$$\langle 1/2 \ -1/2, 1/2 \ 1/2 | 00 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2 \ -1/2, 1/2 \ 1/2 | 00 \rangle = (-)^{1/2+1/2-0} \langle 1/2 \ 1/2, 1/2 \ -1/2 | 00 \rangle$$

$$\langle 1/2 \ 1/2, 1/2 \ -1/2 | 10 \rangle = \langle 1/2 \ -1/2, 1/2 \ 1/2 | 10 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle 1/2 \ 1/2, 1/2 \ 1/2 | 10 \rangle = \langle 1/2 \ -1/2, 1/2 \ -1/2 | 10 \rangle = 1$$

Función de onda de dos fermiones acoplados



S
Singlete

$$\chi_{0,0}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | 0, 0 \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1) \chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$$

$$\langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | 0, 0 \rangle = \delta_{s_1, s_2} \delta_{m_1, -m_2} \frac{(-)^{s_1 - m_1}}{\hat{s}_1}$$

$$\hat{s} = \sqrt{2s + 1} = \sqrt{2}$$

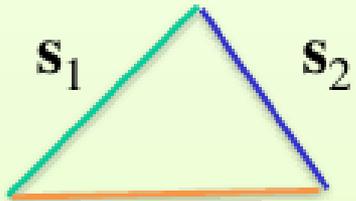
Impar

$$S = 0 \Rightarrow M_S = 0 \quad \sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$$

$$\chi_{0,0}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{s, 1/2}(\sigma_1) \chi_{s, -1/2}(\sigma_2) - \chi_{s, 1/2}(\sigma_2) \chi_{s, -1/2}(\sigma_1))$$

$$\chi_{0,0}(\sigma_2, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{s, 1/2}(\sigma_2) \chi_{s, -1/2}(\sigma_1) - \chi_{s, 1/2}(\sigma_1) \chi_{s, -1/2}(\sigma_2)) = -\chi_{0,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

Función de onda de dos fermiones acoplados



$$\chi_{1,M_S}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | 1, M_S = m_1 + m_2 \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1) \chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$$

S
Triplete

$$S = 1 \Rightarrow M_S = -1, 0, 1$$

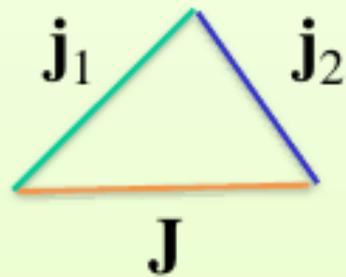
Par $\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2$

$$\chi_{1,0}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | 1, 0 \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1) \chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$$

$$\chi_{1,0}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{s,1/2}(\sigma_1) \chi_{s,-1/2}(\sigma_2) + \chi_{s,1/2}(\sigma_2) \chi_{s,-1/2}(\sigma_1))$$

$$\chi_{1,0}(\sigma_2, \sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi_{s,1/2}(\sigma_2) \chi_{s,-1/2}(\sigma_1) + \chi_{s,1/2}(\sigma_1) \chi_{s,-1/2}(\sigma_2)) = \chi_{0,0}(\sigma_1, \sigma_2)$$

Propiedades de los Clebsch-Gordan



$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | m \rangle = 1$$

$$|jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \quad \langle jm| = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 |$$

$$\delta_{jj'} \delta_{mm'} = \langle jm | j' m' \rangle = \sum_{m_1 m_2} \sum_{m'_1 m'_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 m'_1 j_2 m'_2 \rangle$$

$$= \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | jm \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j' m' \rangle$$

Aplicación a la función de onda de una partícula

Uso del álgebra angular

Función de onda acoplada

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r) [\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

$$[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm} = \sum_{m_s, m_l} \langle sm_s lm_l | jm \rangle \chi_{sm_s} Y_{lm_l}(\theta, \phi)$$

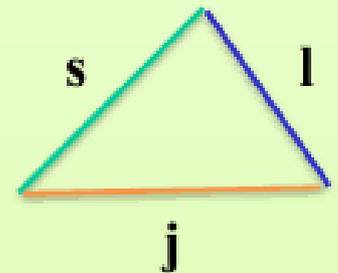
$$[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm} = \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r})$$

$$|l - s| \leq j \leq l + s \longrightarrow$$

$$j = l \pm \frac{1}{2}$$

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

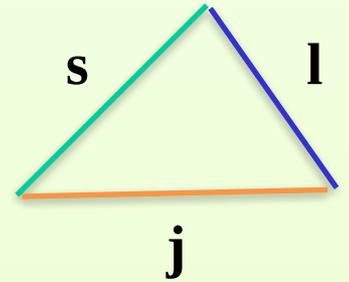
Acople s-l



Uso del álgebra angular

Función de onda acoplada

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r)[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$



Kets

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | nljm \rangle \longrightarrow |nljm\rangle$$

$$\langle r | nlj \rangle = R_{nl}(r) \rightarrow |nlj\rangle$$

$$\langle \hat{r} | sl, jm \rangle = \mathcal{Y}_{ljm}(\hat{r}) \longrightarrow |sl, jm\rangle \quad |ljm\rangle \equiv |sl, jm\rangle$$

Base acoplada

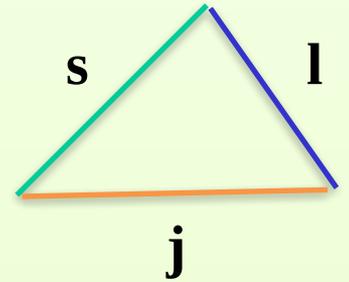
$$\{ |nljm\rangle = |nlj\rangle |ljm\rangle \}$$

Uso del álgebra angular

Función de onda acoplada

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r) [\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | nljm \rangle$$



Autovectores

$$l^2 |nljm\rangle = l(l+1) |nljm\rangle$$

$$s^2 |nljm\rangle = s(s+1) |nljm\rangle = \frac{3}{4} |nljm\rangle$$

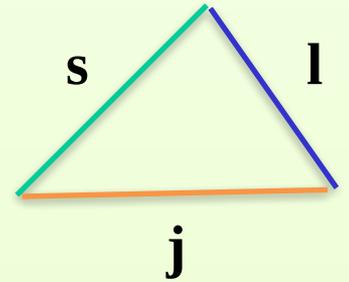
$$j^2 |nljm\rangle = j(j+1) |nljm\rangle$$

$$j_z |nljm\rangle = m |nljm\rangle$$

Uso del álgebra angular

Función de onda acoplada

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r) [\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$



Autovectores

$$l^2 \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = l(l + 1) \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s)$$

$$s^2 \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = \frac{3}{4} \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s)$$

$$j^2 \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = j(j + 1) \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s)$$

$$j_z \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = m \psi_{nljm}(\mathbf{r}, s)$$

Volveremos a esto al resolver la ecuación de Schroedinger

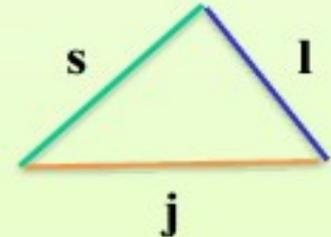
Sobre el orden del acople

Cambio de orden del acople

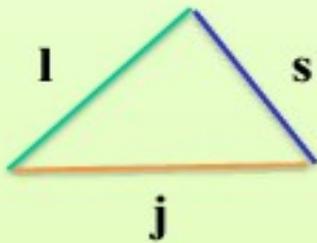
Función de onda acoplada

$$\psi_{nsljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r)[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

Orden sl



Orden ls



$$\psi_{nlsjm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r)[Y_l(\theta, \phi)\chi_s]_{jm}$$

$$= (-)^{s+l-j} R_{nlj}(r)[\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

$$\psi_{nlsjm}(\mathbf{r}, s) = (-)^{s+l-j} \psi_{nsljm}(\mathbf{r}, s)$$

Aplicación: $s=1/2, l=1, j=3/2, 1/2$

Autovalores del operador

$$l \cdot s$$

Uso del álgebra angular

Autovalores del producto escalar $l \cdot s$

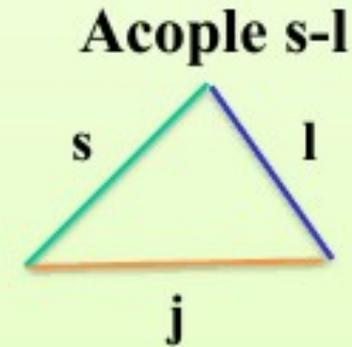
Base acoplada

$$l^2 |nljm\rangle = l(l+1) |nljm\rangle$$

$$s^2 |nljm\rangle = s(s+1) |nljm\rangle$$

$$j^2 |nljm\rangle = j(j+1) |nljm\rangle$$

$$j_z |nljm\rangle = m |nljm\rangle$$



$$j^2 = s^2 + l^2 + 2l \cdot s$$

$$l \cdot s = \frac{j^2 - s^2 - l^2}{2}$$

$$[\bar{l}, \bar{s}] = 0$$

$$l \cdot s |nljm\rangle = \frac{j(j+1) - l(l+1) - 3/4}{2} |nljm\rangle$$

Resumen:
**Comparación función de
onda no acoplada y acoplada**

Uso del álgebra angular

Funciones de onda desacoplada y acoplada

Función de onda desacoplada

$$\phi_{nlm_l m_s}(\vec{r}, s) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\hat{r}) \chi_{sm_s}$$

$$\phi_{nlm_l m_s}(\vec{r}, s) = \langle \mathbf{r} | nlm_l sm_s \rangle$$

Función de onda acoplada

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}, s) = R_{nlj}(r) [\chi_s Y_l(\theta, \phi)]_{jm}$$

$$\psi_{nljm}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | nljm \rangle$$

Sistema completo de observables que conmutan

Base desacoplada

$$\{l^2, s^2, l_z, m_z\}$$

Base acoplada

$$\{l^2, s^2, j^2, j_z\}$$

Isospin

Isoespín: formalismo

Función de onda protón $\phi_{proton} = \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_{\alpha}(\mathbf{r}, s) \zeta_{-1/2}$

Función de onda neutrón $\phi_{neutron} = \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_{\alpha}(\mathbf{r}, s) \zeta_{1/2}$

Isoespín 1/2 $t = (t_x, t_y, t_z)$

Álgebra momento angular

$$[t_x, t_y] = i t_z$$

Representación: matrices de Pauli $t_k = \frac{1}{2} \tau_k$

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Isoespín: formalismo

Función de onda protón $\phi_{proton} = \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_{\alpha}(\mathbf{r}, s) \zeta_{-1/2}$

Función de onda neutrón $\phi_{neutron} = \phi_{\alpha}(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi_{\alpha}(\mathbf{r}, s) \zeta_{1/2}$

Isoespín $t = (t_x, t_y, t_z) \quad [t_x, t_y] = i t_z$

Autovalores $t^2 \zeta_{\mu} = \frac{3}{4} \zeta_{\mu}$

$$t_z \zeta_{1/2} = \frac{1}{2} \zeta_{1/2}$$

$$t_z \zeta_{-1/2} = -\frac{1}{2} \zeta_{-1/2}$$

neutrones $\zeta_{1/2}$

protones $\zeta_{-1/2}$

Isoespín: transformación n/p

Función de onda protón

$$\zeta_{-1/2} = |1/2, -1/2\rangle$$

$$t_z \zeta_{-1/2} = -\frac{1}{2} \zeta_{-1/2}$$

Función de onda neutrón

$$\zeta_{1/2} = |1/2, 1/2\rangle$$

$$t_z \zeta_{1/2} = \frac{1}{2} \zeta_{1/2}$$

Operadores de crecimiento

$$t_{\pm} = t_x \pm i t_y$$

$$t_{\pm} |t t_z\rangle = \sqrt{t(t+1) - t_z(t_z \pm 1)} |t, \pm t_z\rangle = \sqrt{\frac{3}{4} - t_z(t_z \pm 1)} |t, \pm t_z\rangle$$

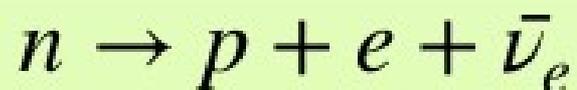
$$t_+ \zeta_{-1/2} = \zeta_{1/2} \quad t_+ \zeta_{1/2} = 0 \quad t_- \zeta_{1/2} = \zeta_{-1/2} \quad t_- \zeta_{-1/2} = 0$$

Decaimiento β

Neutrones $\zeta_{1/2}$

**Operador para
decaimiento β^-**

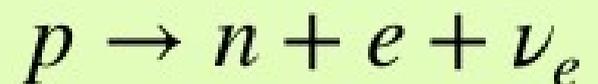
$$t_{-\zeta_{1/2}} = \zeta_{-1/2}$$



Protones $\zeta_{1/2}$

**Operador para
decaimiento β^+**

$$t_{+\zeta_{-1/2}} = \zeta_{1/2}$$



Isoespín de dos nucleones

Isoespín de dos nucleones

Isoespín de dos nucleones

$$\zeta_{T,T_z}(1,2) = \sum_{\substack{\mu_1\mu_2 \\ T_z = \mu_1 + \mu_2}} \langle 1/2\mu_1 1/2\mu_2 | TT_z \rangle \zeta_{\mu_1}(1) \zeta_{\mu_2}(2)$$

Autovalores

$$T = t(1) + t(2) \quad T = 0, 1$$

$$T_z = t_z(1) + t_z(2)$$

$$T_z = -T, \dots, T$$

$$T^2 \zeta_{TT_z} = T(T+1) \zeta_{TT_z}$$

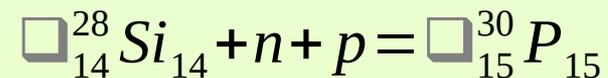
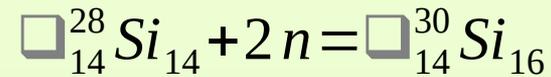
$$T_z \zeta_{TT_z} = T_z \zeta_{TT_z}$$

Isoespín de dos nucleones

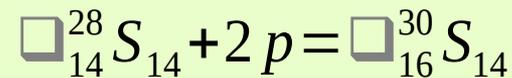
Isoespín de dos nucleones

$$\zeta_{T, T_z}(1, 2) = \sum_{\substack{\mu_1 \mu_2 \\ T_z = \mu_1 + \mu_2}} \langle 1/2 \mu_1 1/2 \mu_2 | T T_z \rangle \zeta_{\mu_1}(1) \zeta_{\mu_2}(2)$$

$$t_z(1) = 1/2 \quad t_z(2) = 1/2$$



$$t_z(1) = 1/2 \\ t_z(2) = -1/2$$



$$t_z(1) = -1/2 \quad t_z(2) = -1/2$$

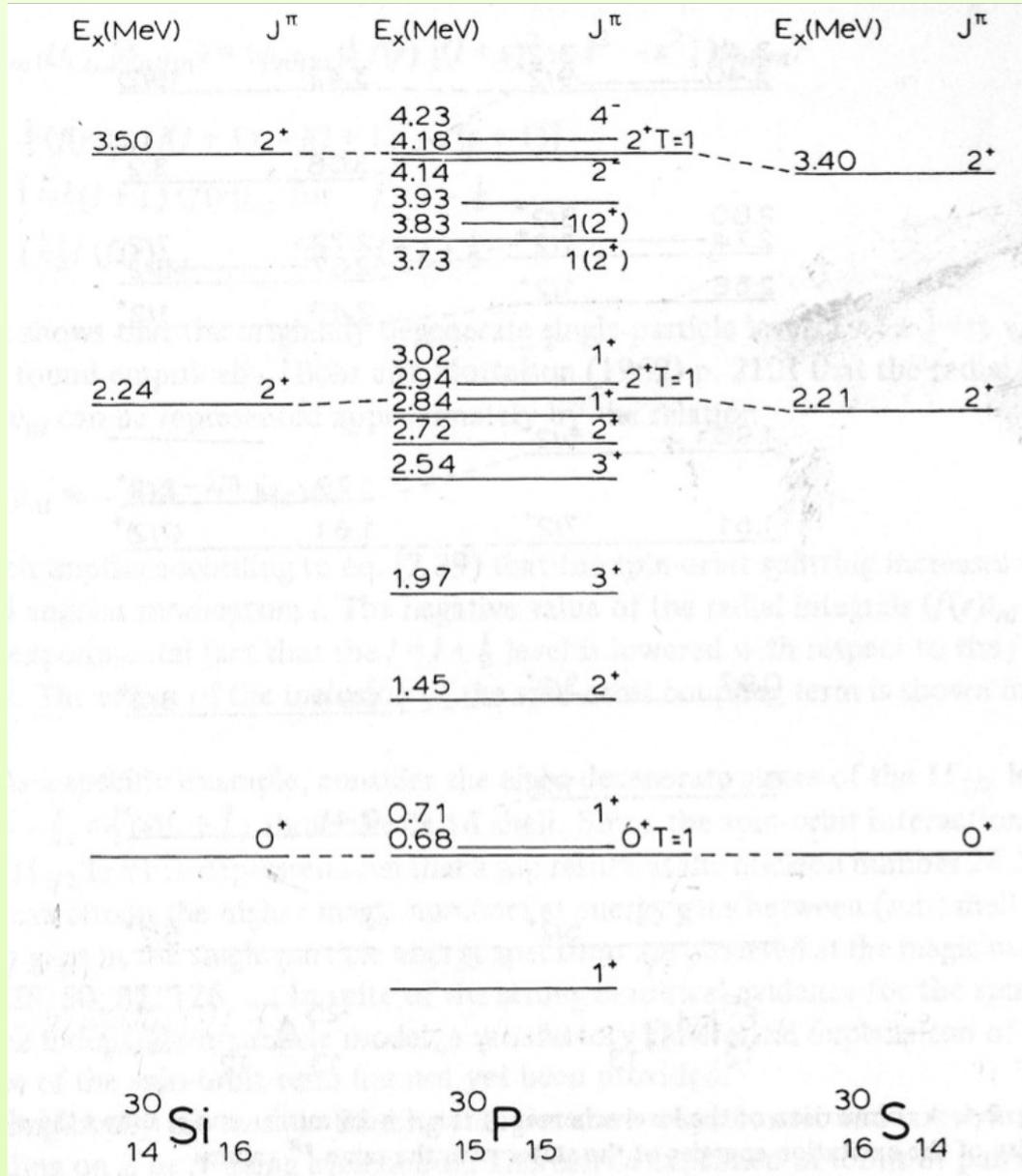
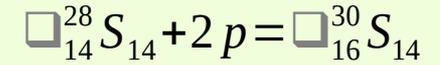
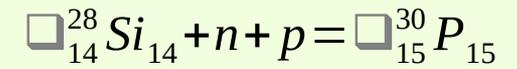
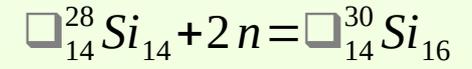
Simetría

$$[H, T_z] = 0$$

Simetría aproximada

$$[H, T^2] \approx 0$$

Isoespín de dos nucleones

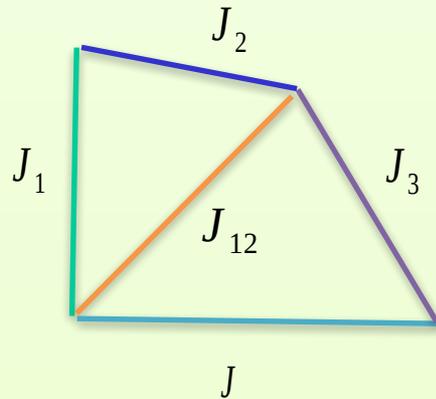


$$[H, T^2] \approx 0 \quad [H, T_z] = 0$$

Crédito: P. J. Brussard and P. W. M. Glaudemans.
Shell-Model Appl. in Nuclear Spectroscopic. 1977

Acople de tres momentos angulares

Acople de tres momentos angulares



Opciones de acoples

- $J_{12} = J_1 + J_2, J = J_{12} + J_3$
- $J_{23} = J_2 + J_3, J = J_{23} + J_1$
- $J_{13} = J_1 + J_3, J = J_{13} + J_2$

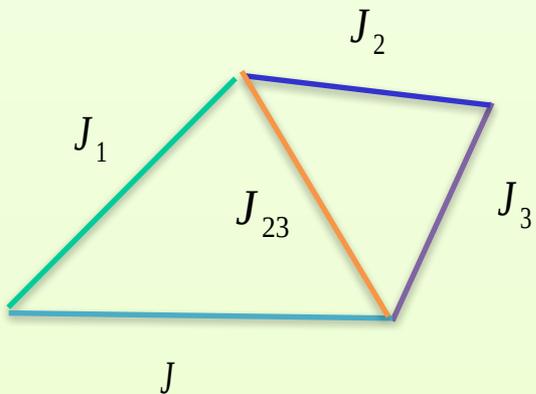
Bases

$$I = \sum_{J_{12}} |j_1 j_2 (j_{12}) j_3; jm\rangle \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3; jm|$$

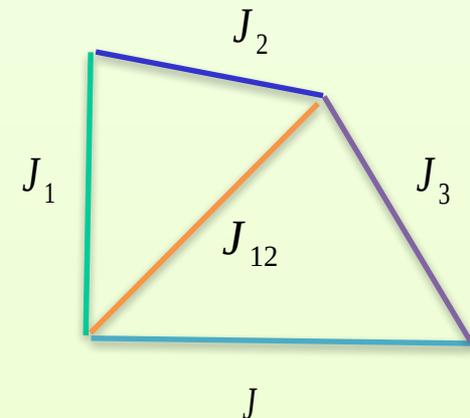
$$I = \sum_{J_{23}} |j_1 j_2 j_3 (j_{23}); jm\rangle \langle j_1 j_2 j_3 (j_{23}); jm|$$

$$I = \sum_{J_{13}} |j_1 j_3 (j_{13}) j_2; jm\rangle \langle j_1 j_3 (j_{13}) j_2; jm|$$

Cambio de base



$$\sum_{J_{12}} \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3; j m \rangle \langle j_1 j_2 j_3 (j_{23}); j m \rangle$$



$$\begin{aligned} |j_1 j_2 j_3 (j_{23}); j m\rangle &= \sum_{J_{12}} |j_1 j_2 (j_{12}) j_3; j m\rangle \langle j_1 j_2 (j_{12}) j_3; j m | j_1 j_2 j_3 (j_{23}); j m\rangle \\ &= \sum_{J_{12}} (-)^{j_1 + j_2 + j_3 + j} \hat{j}_{12} \hat{j}_{23} \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j & j_{23} \end{array} \right\} |j_1 j_2 (j_{12}) j_3; j m\rangle \end{aligned}$$

Coeficiente de Wigner 6j

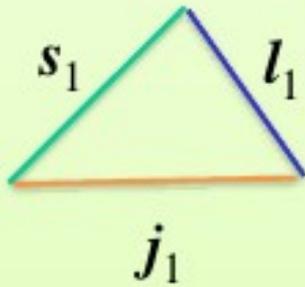
Acople de cuatro momentos angulares

Acople de cuatro momentos angulares

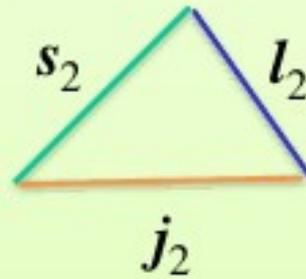
Partícula 1: (s_1, l_1)

Partícula 2: (s_2, l_2)

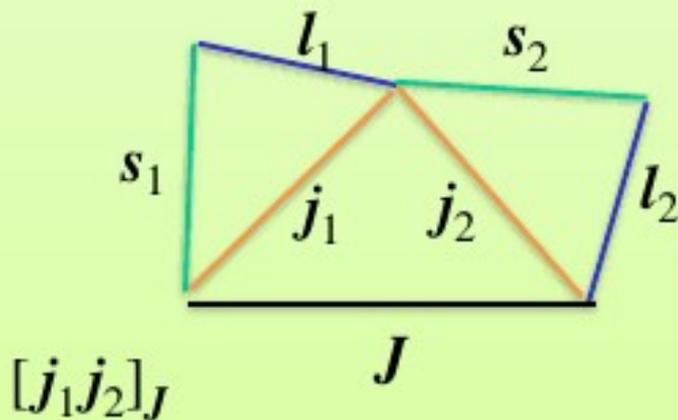
Acople jj



$[s_1 l_1]_{j_1}$



$[s_2 l_2]_{j_2}$



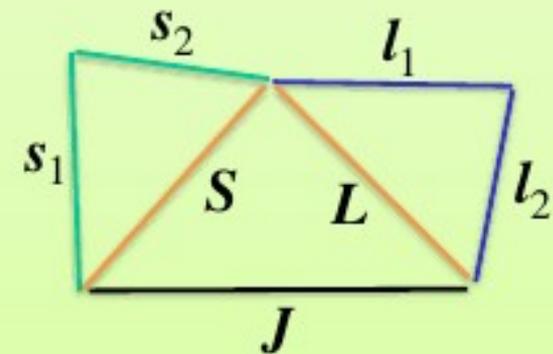
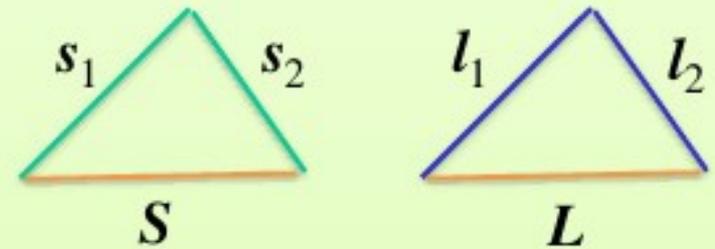
$[j_1 j_2]_J$

Acople de cuatro momentos angulares

Partícula 1: (s_1, l_1)

Partícula 2: (s_2, l_2)

Acople SL



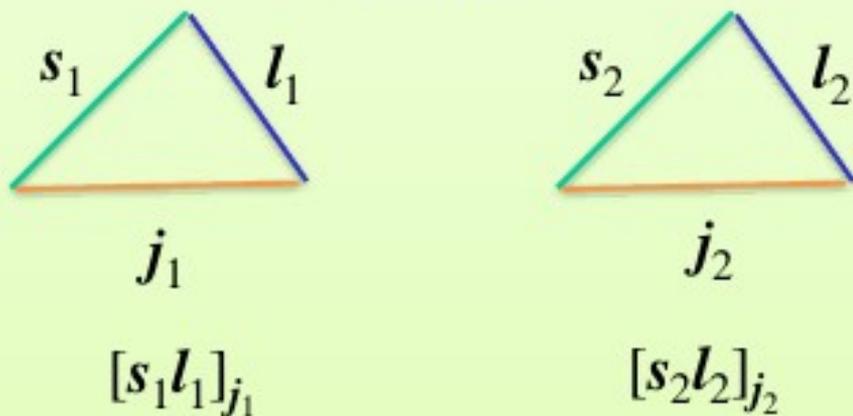
$[SL]_J$

Acople de cuatro momentos angulares

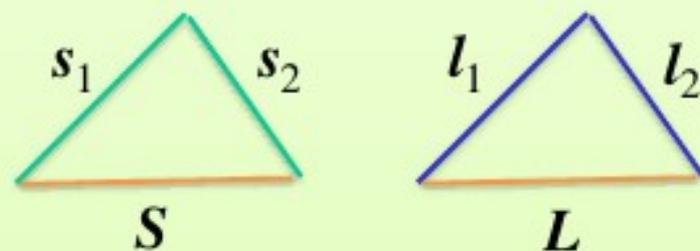
Partícula 1: (s_1, l_1)

Partícula 2: (s_2, l_2)

Acople jj



Acople SL

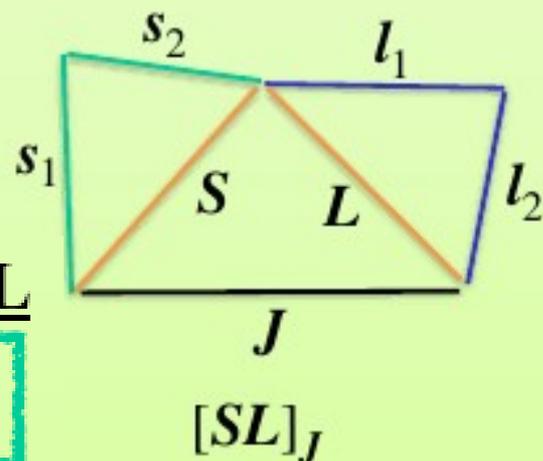
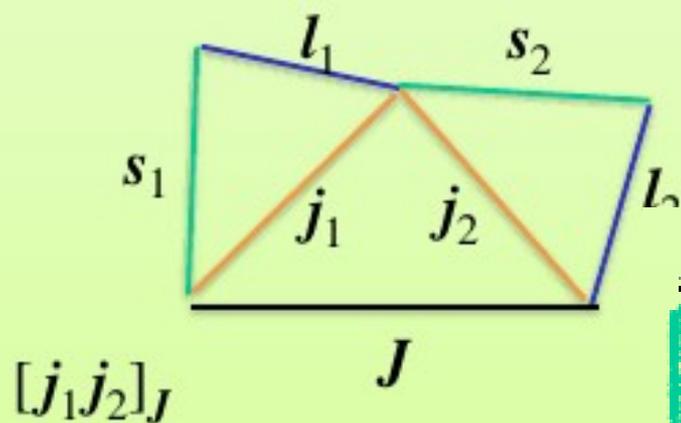


Acople jj

$[j_1 j_2]_{JM}$

Acople SL

$[SL]_{JM}$

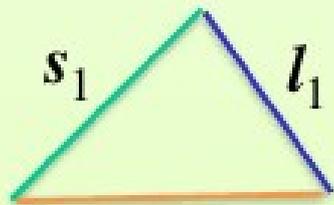


Acople jj con funciones de onda

Partícula 1: (s_1, l_1)

Partícula 2: (s_2, l_2)

Acople jj



j_1

$[s_1 l_1]_{j_1}$

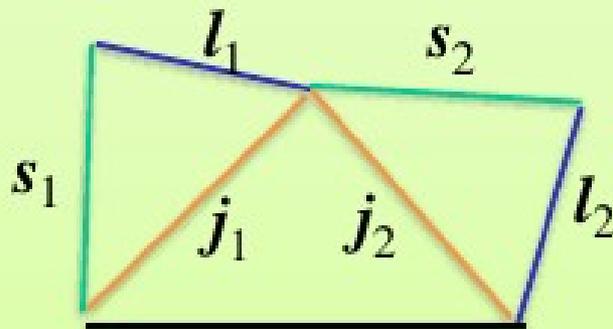


j_2

$[s_2 l_2]_{j_2}$

$$[\chi_{s_1} Y_{l_1}(\theta_1, \phi_1)]_{j_1 m_1} = \sum_{m_{s_1}, m_{l_1}} \langle s_1 m_{s_1} l_1 m_{l_1} | j_1 m_1 \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}} Y_{l_1 m_{l_1}}(\theta_1, \phi_1)$$

$$[\chi_{s_2} Y_{l_2}(\theta_2, \phi_2)]_{j_2 m_2} = \sum_{m_{s_2}, m_{l_2}} \langle s_2 m_{s_2} l_2 m_{l_2} | j_2 m_2 \rangle \chi_{s_2 m_{s_2}} Y_{l_2 m_{l_2}}(\theta_2, \phi_2)$$



$[j_1 j_2]_J$

J

$$\langle \hat{r}_1 \hat{r}_2 | j_1 j_2, j m \rangle = \sum_{m_1, m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle [\chi_{s_1} Y_{l_1}]_{j_1 m_1} [\chi_{s_2} Y_{l_2}]_{j_2 m_2}$$

Acople SL con funciones de onda

Partícula 1: (s_1, l_1)

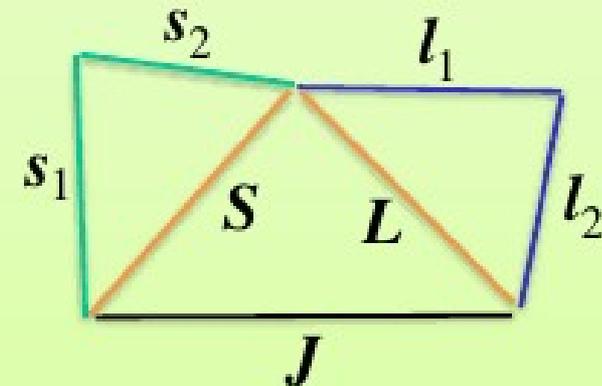
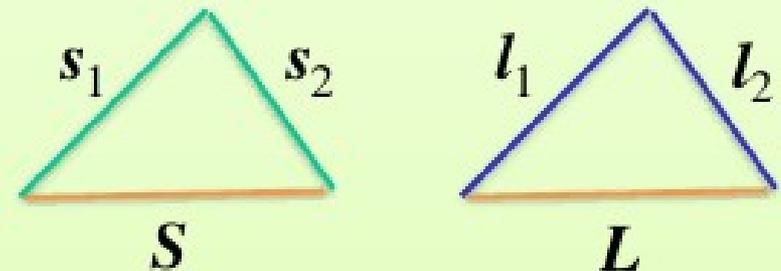
Partícula 2: (s_2, l_2)

$$\chi_{SM_S}(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} \langle s_1 m_{s_1} s_2 m_{s_2} | SM_S \rangle \chi_{s_1 m_{s_1}}(\sigma_1) \chi_{s_2 m_{s_2}}(\sigma_2)$$

$$Y_{LM_L}(\hat{r}_1, \hat{r}_2) = \sum_{m_{l_1}, m_{l_2}} \langle l_1 m_{l_1} l_2 m_{l_2} | LM_L \rangle Y_{l_1 m_{l_1}}(\hat{r}_1) Y_{l_2 m_{l_2}}(\hat{r}_2)$$

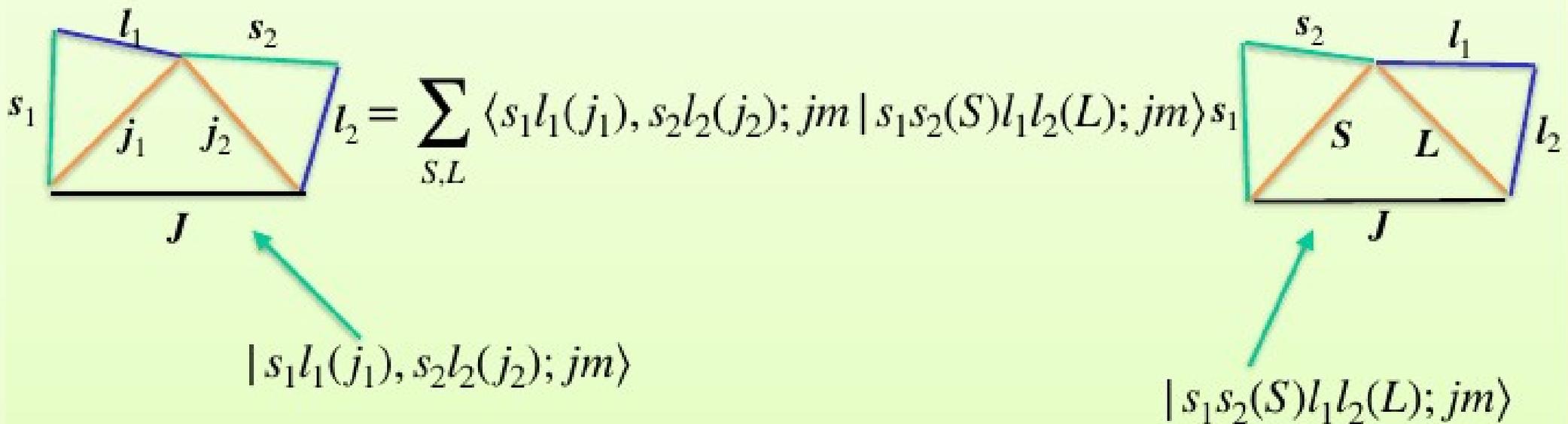
$$\langle \hat{r}_1 \hat{r}_2 | SL, jm \rangle = \sum_{M_S, M_L} \langle SM_S LM_L | jm \rangle \chi_{SM_S} Y_{LM_L}$$

Acople SL



$[SL]_J$

Cambio de base SL \rightarrow jj

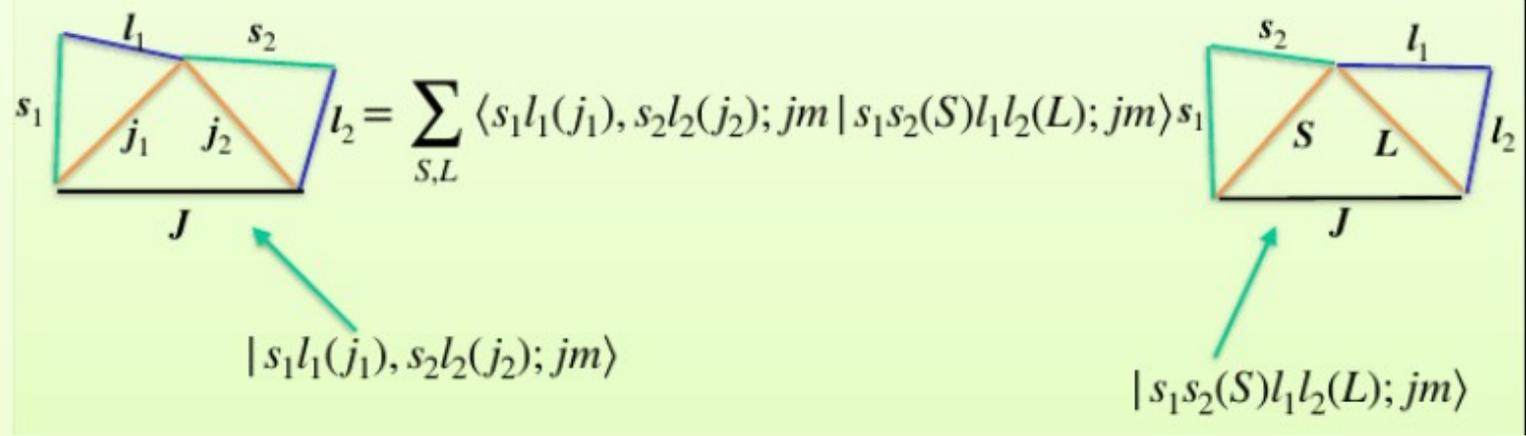


$$|s_1 l_1(j_1), s_2 l_2(j_2); jm\rangle = \sum_{S,L} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{S} \hat{L} \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & S \\ l_1 & l_2 & L \\ j_1 & j_2 & j \end{bmatrix} |s_1 s_2(S) l_1 l_2(L); jm\rangle$$

Volveremos sobre estos acoplos al definir la función de onda de dos nucleones

Coefficiente de Wigner 9j

Cambio de base dos partículas



Estado fundamental

$$\Psi_{aa}^{00}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = R_a(r_1) R_a(r_2) \sum_S \hat{j}_a^2 \hat{S}^2 \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_a & j_a \\ \frac{1}{2} & l_a & j_a \\ S & S & 0 \end{array} \right\} [\chi(1)\chi(2)]_{SM_S} [Y_{l_a}(\hat{r}_1) Y_{l_a}(\hat{r}_2)]_{SM_S}$$

Singlete S=0

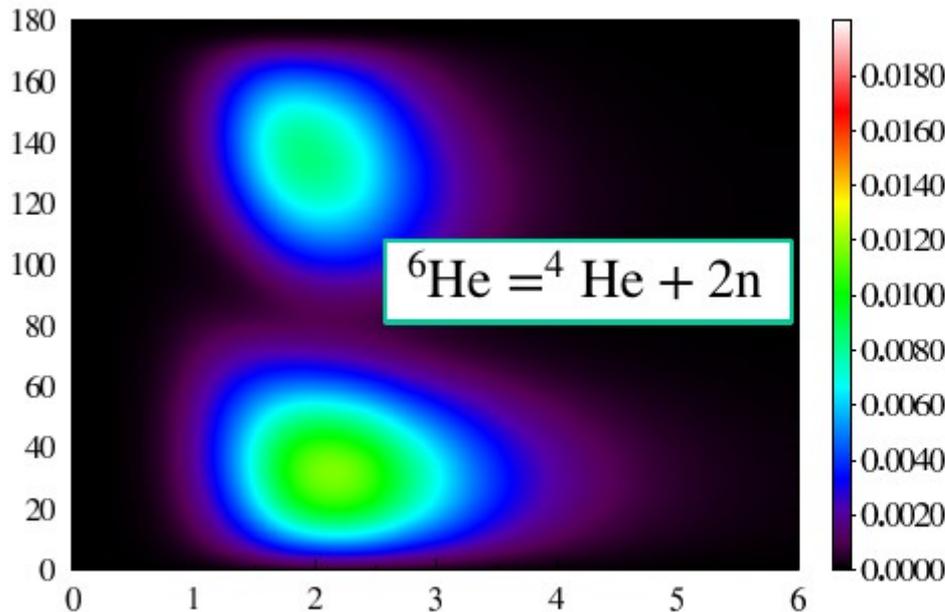
$$|\bar{r}_1| = |\bar{r}_2| = r \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & l_p & j_p \\ \frac{1}{2} & l_p & j_p \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{\frac{1}{2} \hat{l}_p \hat{j}_p} = \frac{\sqrt{2}}{\hat{l}_p \hat{j}_p} \quad [Y_l(\hat{r}_1) Y_l(\hat{r}_2)]_{00} = (-)^{l+1} \frac{\hat{l}}{4\pi} P_l(\cos \theta_{12})$$

$$\Psi_{aa}^{00}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Big|_{S=0} = \frac{(-)^{l_a}}{4\pi} \frac{\hat{j}_a}{\sqrt{2}} R_a^2(r) P_{l_a}(\cos \theta_{12}) [\chi(1)\chi(2)]_{00}$$

Densidad del singlete

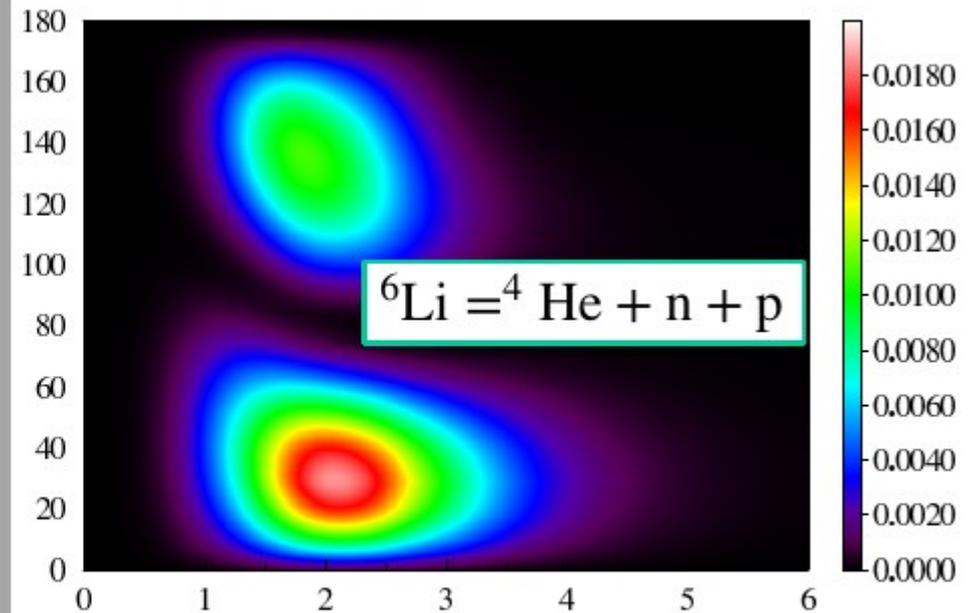
$$\Psi_{aa}^{00}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|_{S=0} = \frac{(-)^{l_a}}{4\pi} \frac{\hat{j}_a}{\sqrt{2}} R_a^2(r) P_{l_a}(\cos \theta_{12}) [\chi(1)\chi(2)]_{00}$$

$$|\bar{r}_1| = |\bar{r}_2| = r$$



$$\rho_{6\text{He}}(R, \theta_{12})(0^+)$$

Crédito: Yannan



$$\rho_{6\text{Li}}(R, \theta_{12})(1^+)$$

Fin