Segundo Tema: Conceptos Generales

-- IFN2024 --

Introducción a la Física Nuclear 2024

Rodolfo (Rolo) M. Id Betan
idbetan@ifir-conicet.gov.ar
Edificio Ifir, Of. 235 (Esmeralda y Ocampo)

Conceptos básicos relativos a núcleos atómicos

Contenido:

Definiciones de: (i) núcleo atómico, (ii) nucleones, (iii) interacción fuerte, (iv) isótopos, (v) isótonos, (vi) isóbaros, (vii) isómeros (y aplicaciones) y (viii) línea de goteo (def. Cuantitativa), (ix) unidades, (x) constantes, (xi) energía de ligadura, (xii) energía de separación.

Primer acercamiento a: (i) fórmular empírica de Weizsaker, (ii) reacciones nucleares, (iii) orden de magnitud tiempos, (iv) distribución de carga y materia, (v) radio nuclear y radio cuadrático medio, (vi) analiticidad del campo medio.

Lecturas recomendadas para esta clase:

- Libro: Fundamentals in Nuclear Physics. J.L. Basdevant, J. Rich and M. Spiro
  Secciones 1.1-1.2

- Libro: Introductory Nuclear Physics. S. S. M. Wong
  Prefacio y Sección 1.1

Base de datos:

- *National Nuclear Data Center (NNDC):*

  https://www.nndc.bnl.gov/ (acceso a varias bases de datos)

  https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/ (tabla de nucleidos/Segre)

- *International Atomic Energy Agency (IAEA)*

  https://www-nds.iaea.org/amdc/ (acceso a varias bases de datos)

  https://www-nds.iaea.org/relnsd/nubase/nubase_min.html (Segre)

  https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2020/mass_1.mas20.txt (masas)

Ir a la página web!

Unidades

Unidad de masa 'natural'

Unidad de masa atómica (uma-u)

$$12\,uma = m_{1\,mol\,^{12}C} = 12\,gr/mol$$

$$1\,uma = \frac{12\,gr/mol}{12}\frac{1\,mol}{6,022140875\times10^{23}} = 1.66054\times10^{-24}\,gr$$

Committee on Data for Science and Technology(CODATA)

CODATA en 2018 son:

1 uma = 1,66053886 x 10^{-27} kg

1 g = 6,0221415 x 10^{23} uma

Factor de conversión Kg-uma:

$$1\,uma = 1.66054\times10^{-27}\,Kg$$

Masa del protón

$1.007277\,uma$

$(1.673\times10^{-27}\,Kg)$

Masa del neutrón

$1.008665\,uma$

$(1.675\times10^{-27}\,Kg)$

Masa del electrón

$0.000549\,uma$

$(9.109\times10^{-31}\,Kg)$

Curiosidad: Especular sobre la relación entre las tres partículas

Masas en uma

Unidad de masa atómica (uma)

$$12\,uma = m_{1\,mol\,^{12}C} = 12\,gr/mol$$

Factor de conversión Kg-uma:

$$1\,uma = 1.66054\times10^{-27}\,Kg$$

Ejemplos de masas en uma

Núcleo	Masa atómica (uma)
^{4}He	4.002603
^{12}C	12.000000
^{13}C	13.003355
^{14}N	14.003074
^{15}N	15.000109
^{16}O	15.994915
^{17}O	16.999132
^{18}O	17.999160

Notar la similitud con los números másicos
(1 parte en 10000)

Masas en MeV

Relación masa-energía

$$E = m c^2$$

$$1\, uma \times c^2 = 9.31478 \times 10^8\, ev$$

Unidad de energía

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-12} \text{ erg}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}$$

$$1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$$

Factor de conversión uma-energía:

$$1 \text{ uma} = 931.478 \frac{MeV}{c^2}$$

$$1\,u = \frac{1.66 \times 10^{-27}\, Kg}{c^2} c^2$$

$$1\,u = \frac{1.66 \times 10^{-27}\, Kg}{c^2} (3 \times 10^8\, m/s)^2$$

$$1\,u = \frac{9 \times 1.66 \times 10^{-21}\, J}{c^2} \frac{1\, eV}{1.6 \times 10^{-19}\, J}$$

Masas en MeV

Masa del protón	Masa del neutrón	Masa del electrón
$938.271\, MeV$	$939.565\, MeV$	$0.511\, MeV$
$(1.673 \times 10^{-27}\, Kg)$	$(1.675 \times 10^{-27}\, Kg)$	$(9.109 \times 10^{-31}\, Kg)$

Constantes en la interacción Coulombiana

Interacción Coulombiana

$$V(r) = e^2 \frac{Z_1 Z_2}{r} = (\hbar c \alpha) \frac{Z_1 Z_2}{r} = 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{r}$$

Cte. de estructura fina

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137{,}03599911}$$

Acción

$$\hbar c = 197.327053 \text{ MeV fm}$$

Interacción Coulombiana

$$V(r) = 1.44 \frac{Z_1 Z_2}{r}$$

S.I.

$$V(r) = e^2 \frac{Z_1 Z_2}{4 \pi \epsilon_0 r}$$

Constante de permitividad eléctrica en el vacío

$$\epsilon_0 = 8{,}8542 \, x \, 10^{-12} C^2 / (N m^2)$$

Parámetro de Coulomb

$$\boxed{\begin{array}{c}\underline{\textbf{Interacción Coulombiana}}\\ V(r)=1.44\,\frac{Z_1 Z_2}{r}\end{array}}$$

Ecuación de Schroedinger

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}u(r)+\frac{e^2 Z_1 Z_2}{r}u(r)=\varepsilon\,u(r)$$

Masa reducida

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_p}+\frac{1}{m_{core}}$$

$$\rho=k\,r$$

$$\varepsilon=\frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$$

$$\frac{d^2u(\rho)}{dr^2}=k^2\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2}$$

$$\frac{-d^2}{d\rho^2}u(\rho)+2\frac{\chi}{\rho}u(\rho)=u(\rho)$$

Parámetro de Sommerfeld

$$\boxed{\chi=\frac{\mu\,e^2 Z_1 Z_2}{\hbar^2 k}}$$

Forma práctica de uso de las unidades ‘naturales’ en la ecuación de Schroedinger

<u>Conversión energía vs número de onda</u>

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$$

$$\hbar = 6.58 \times 10^{-22}\, MeV\ s\,!!!$$
$$m = 1.673 \times 10^{-27}\, Kg$$

$$\varepsilon = \frac{(\hbar c)^2}{2(mc^2)} k^2$$

$$\hbar c \sim 200\ MeV\ fm$$
$$mc^2 \sim 1000\ MeV$$

$$[\varepsilon] = [\frac{(\hbar c)^2}{2(mc^2)} k^2] = \frac{(MeV\ fm)^2}{MeV} \frac{1}{fm^2}$$

Forma práctica de uso de las unidades ‘naturales’ en la ecuación de Schroedinger

Conversión energía vs número de onda

$$\varepsilon=\frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

$$\boxed{\hbar=6.58\times10^{-22}\,MeV\,s\,!!!}$$

$$\varepsilon=\frac{(\hbar c)^2}{2(mc^2)}k^2$$

$$[\varepsilon]=[\frac{(\hbar c)^2}{2(mc^2)}k^2]=\frac{(MeV\,fm)^2}{MeV}\frac{1}{fm^2}$$

Análisis de orden de magnitud:

$$mc^2\sim2\times10^3\,MeV$$

$$\hbar c\sim200$$

$$k^2=\frac{2(mc^2)}{(\hbar c)^2}\varepsilon \qquad \boxed{\varepsilon[MeV]=1,10,100}$$

$$k^2=\frac{4\times10^3}{4\times10^4}\varepsilon \qquad k^2=10^{-1}\varepsilon=0.1,1,10$$

$$\boxed{k[1/fm]=0.31,1,3.16}$$

Forma práctica de uso de las unidades ‘naturales’ en la ecuación de Schroedinger

Ecuación de Schroedinger

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu}\frac{d^2}{dr^2}u(r)+V(r)u(r)=\varepsilon u(r)$$

$$\frac{-d^2}{dr^2}u(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)u(r)=\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon u(r) \qquad \varepsilon=\frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$$

$$\frac{-d^2}{dr^2}u(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}V(r)u(r)=k^2u(r)$$

$$\boxed{\frac{-d^2}{dr^2}u(r)+\frac{2(\mu c^2)}{(\hbar c)^2}V(r)u(r)=k^2u(r)}$$

$$\hbar c=197.327\ MeV\ fm$$

$$\frac{1}{\mu c^2}[1/MeV]=\frac{1}{m_p c^2}+\frac{1}{m_{core}c^2}$$

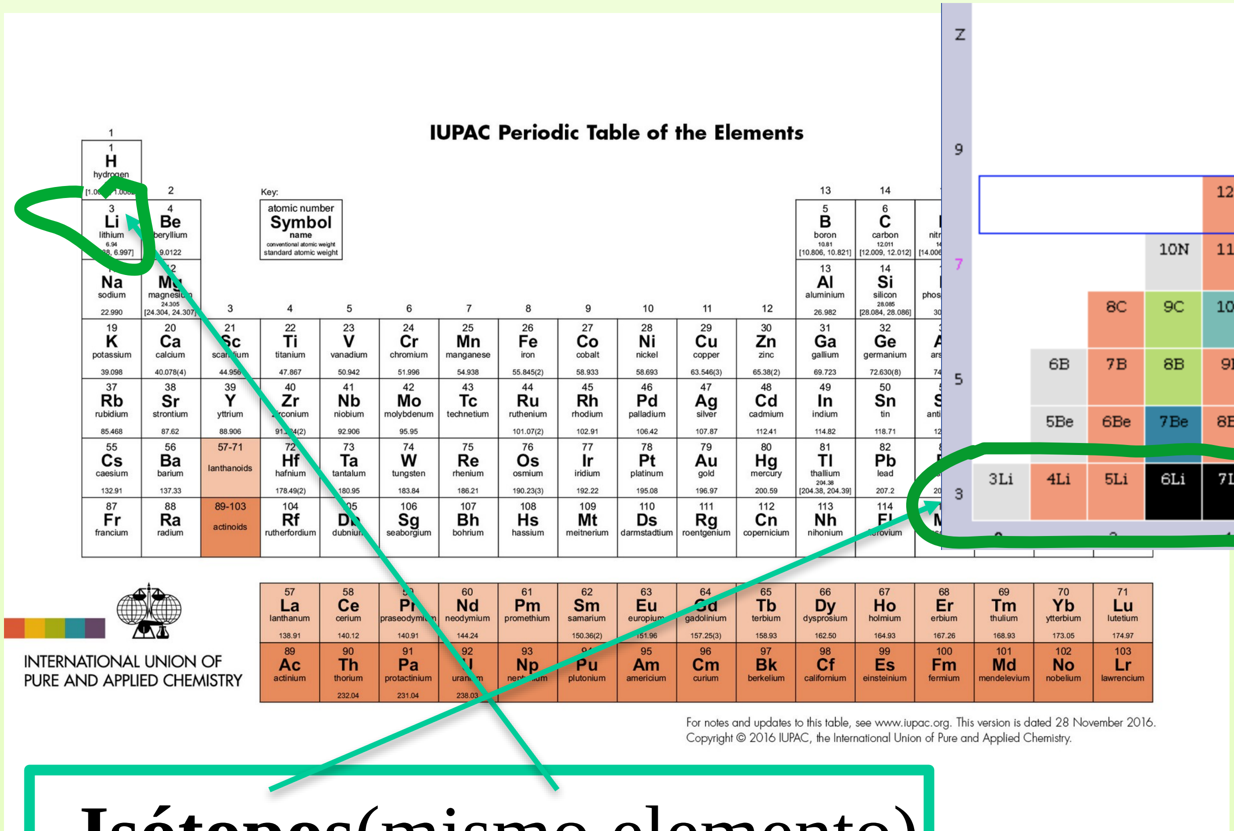
Definiciones

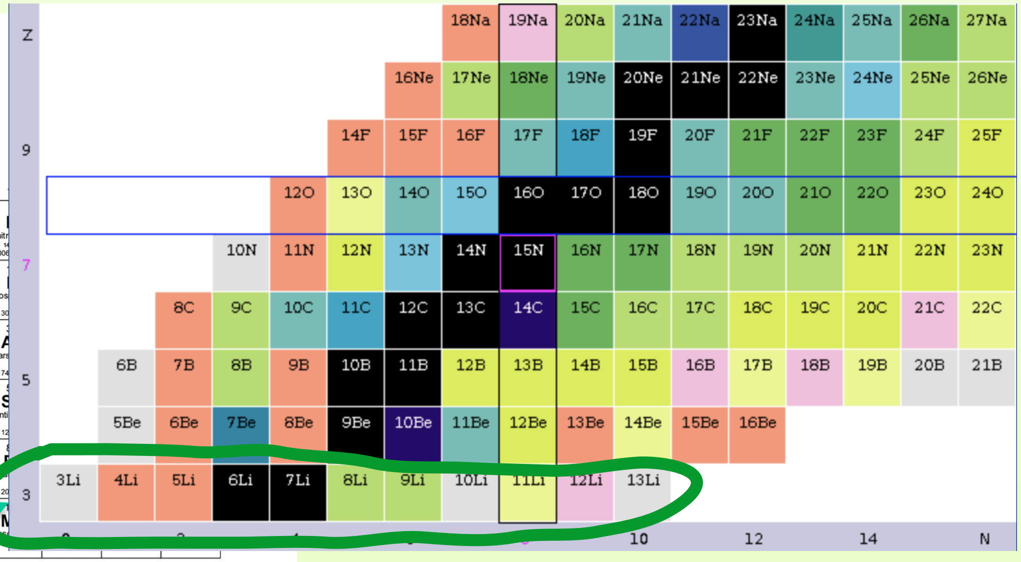
Definiciones

Número atómico:
Z

Número másico:
A

Nucleones(fermiones):
neutrones (N,n,ν)
Protones (Z, p, π)





Isótopos(mismo elemento)

Ejemplos, ${}^{6}_{3}\mathrm{Li}_3$, ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}_4$, ${}^{8}_{3}\mathrm{Li}_5$

Masa y Carga en SI

$$m_n = 1.6749286 \times 10^{-27}\, Kg$$

$$m_p = 1.6726231 \times 10^{-27}\, Kg$$

$$Z = e = 1.60217733(49) \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Nomenclatura

Núcleo atómico:

$^{A}_{Z}X_{N}$

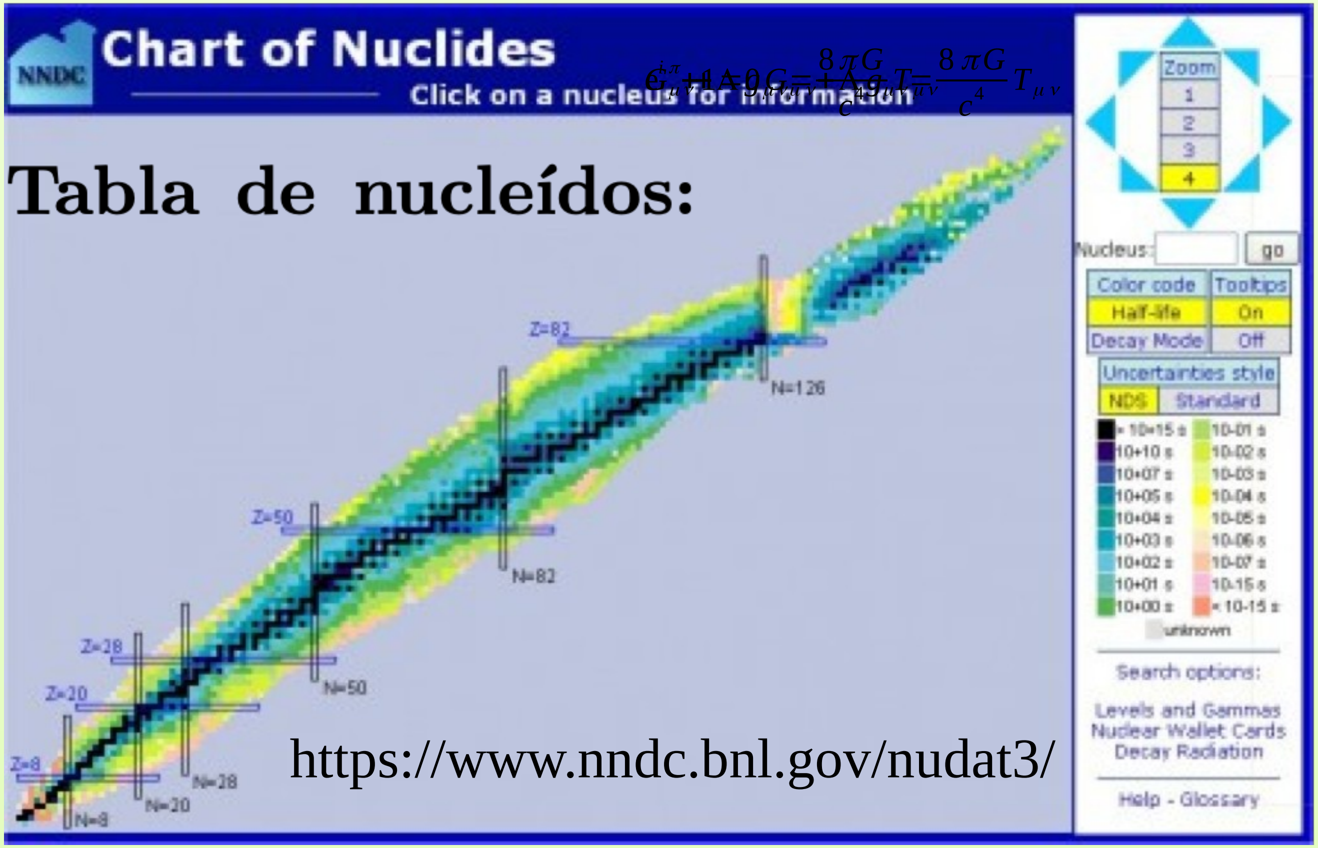
Ejemplos: $^{4}_{2}\mathrm{He}_{2}$, $^{17}_{8}\mathrm{O}_{9}$, $^{212}_{84}\mathrm{Po}_{128}$.

Núcleo atómico:

^{A}X

Ejemplos: $^{4}\mathrm{He}$, $^{17}\mathrm{O}$, $^{212}\mathrm{Po}$.

Tabla de nucleídos:



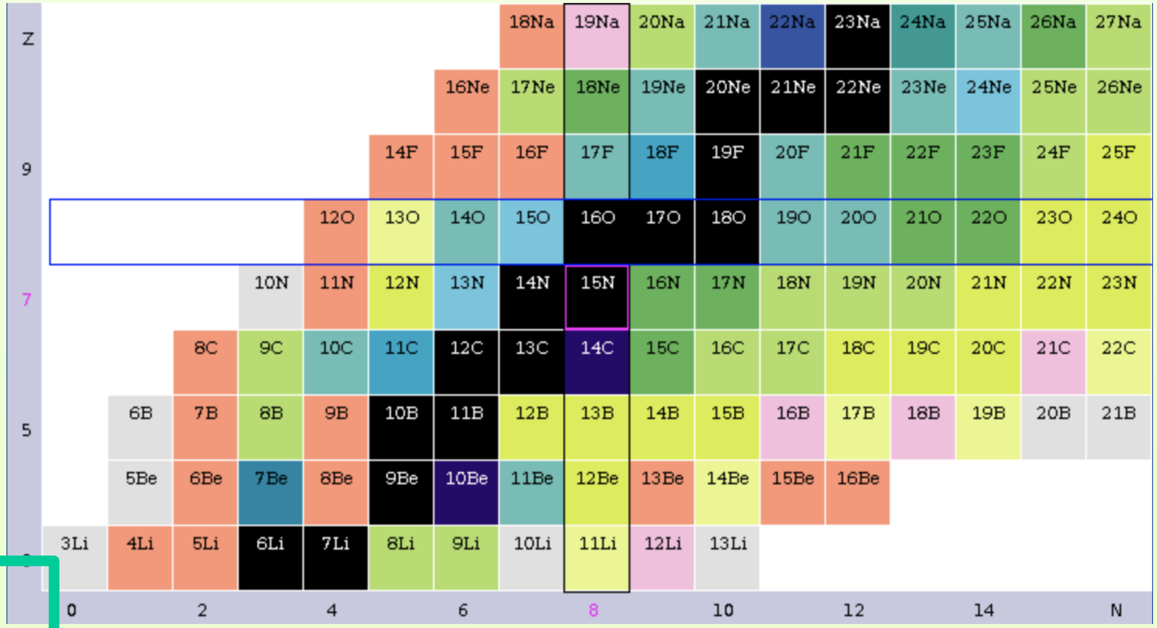
https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/

Definiciones

Isótopos: mismo Z

$$^{6}_{3}\mathrm{Li}_{3},\ ^{7}_{3}\mathrm{Li}_{4},\ ^{8}_{3}\mathrm{Li}_{5}$$

Z=cte



Isótonos: mismo N

$$^{18}_{8}\mathrm{O}_{10},\ ^{19}_{9}\mathrm{F}_{10},\ ^{20}_{10}\mathrm{Ne}_{10}$$

N=cte

Isóbaros: mismo A

$$^{16}_{8}\mathrm{O}_{8},\ ^{16}_{7}\mathrm{N}_{9},\ ^{16}_{6}\mathrm{C}_{10}$$

A=cte

Mirror nuclei:
intercambio Z <—> N

$$^{15}_{7}N_{8}\text{-}^{15}_{8}O_{7}.$$

A=cte

Núcleos estables

$$Ejemplos: Z = 1 - 4$$

	5Be P	6Be 92 KeV α: 100.00% P: 100.00%	7Be 53.22 D ε: 100.00%	8Be 5.57 eV α: 100.00%	9Be STABLE 100.%	10Be 1.51E+6 Y β-: 100.00%	11Be 13.76 S β-: 100.00% β-α: 3.10%
3Li P	4Li 6.03 MeV P: 100.00%	5Li ≈1.5 MeV α: 100.00% P: 100.00%	6Li STABLE 7.59%	7Li STABLE 92.41%	8Li 839.9 MS β-α: 100.00% β-: 100.00%	9Li 178.3 MS β-: 100.00%	10Li N: 100.00%
	3He STABLE 0.000134%	4He STABLE 99.999866%	5He 0.60 MeV N: 100.00% α: 100.00%	6He 806.7 MS β-: 100.00%	7He 150 KeV N	8He 119.1 MS β-: 100.% β-n: 16.%	9He N: 100.00%
1H STABLE 99.9885%	2H STABLE 0.0115%	3H 12.32 Y β-: 100.00%	4H N: 100.00%	5H 5.7 MeV 2N: 100.00%	6H 1.6 MeV N: 100.00%	7H 500 YS 2N?	

Curiosidad:
notar la abundancia natural de
estables/no-estables

Núcleos no estables

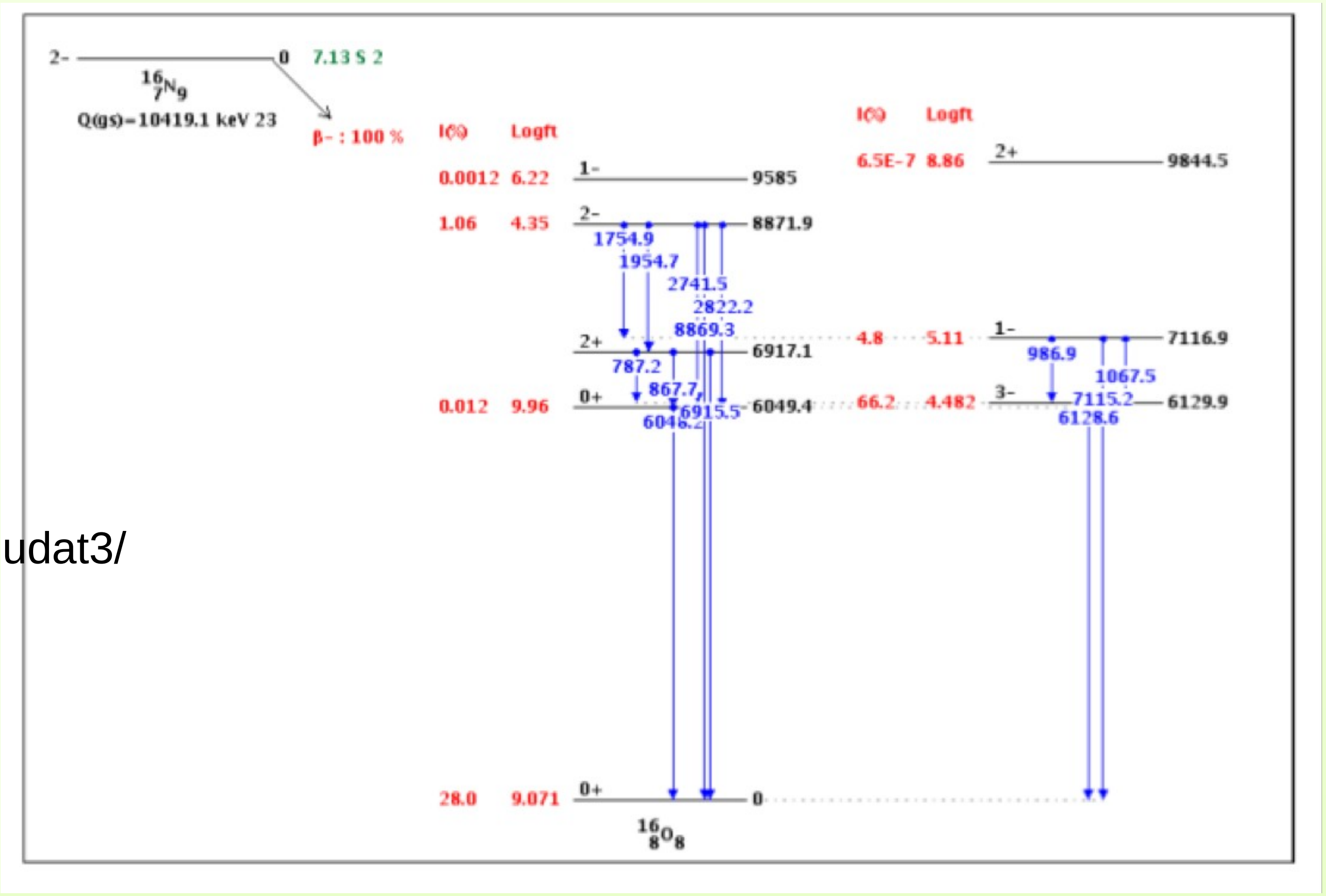
$$Ejemplo: Z = 92$$

92	228U 9.1 M α > 95.00% ε < 5.00%	229U 58 M ε≈ 80.00% α≈ 20.00%	230U 20.8 D α: 100.00% SF < 1E-10%	231U 4.2 D ε: 100.00% α≈ 4.0E-3%	232U 68.9 Y α: 100.00% 24Ne: 9E-10%	233U 1.592E+5 Y α: 100.00% 24Ne: 9E-10%	234U 2.455E+5 Y 0.0054% α: 100.00% SF: 1.6E-9%	235U 7.04E+8 Y 0.7204% α: 100.00% SF: 7.0E-9%	236U 2.342E7 Y α: 100.00% SF: 9.4E-8%
	227Pa	228Pa	229Pa	230Pa	231Pa	232Pa	233Pa	234Pa	235Pa

92	236U 2.342E7 Y α: 100.00% SF: 9.4E-8%	237U 6.75 D β-: 100.00%	238U 4.468E9 Y 99.2742% α: 100.00% SF: 5.4E-5%	239U 23.45 M β-: 100.00%	240U 14.1 H β-: 100.00%	241U β-	242U 16.8 M β-: 100.00%	243U
	235Pa	236Pa	237Pa	238Pa	239Pa	240Pa		

Curiosidades (volveremos sobre esto): notar las opciones de decaimiento y rango de T1/2

Estados excitados



Ir a la página web!

https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/

- ^{197}Au

$ps = picosegundo$

Tiempo característico de transición de estados excitados

$$10^{-12} s = 1\, ps$$

Definición de estados Isómeros

Estados excitados metaestables

$$T_{1/2} > 10^{-9}\, s$$

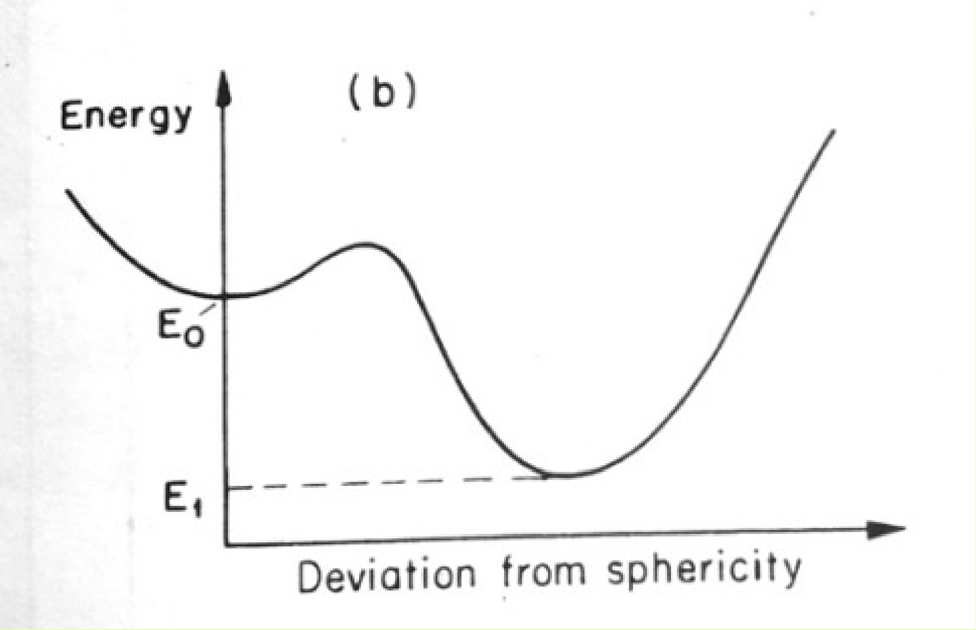
Son estados excitados que no tienen transiciones favorables para decaer en gama, sea porque la **transición** de *momento angular* no le es favorable o porque no lo es favorable el cambio de *esférico a deformado*.

Ocurrencia de estados Isómeros debido a la forma

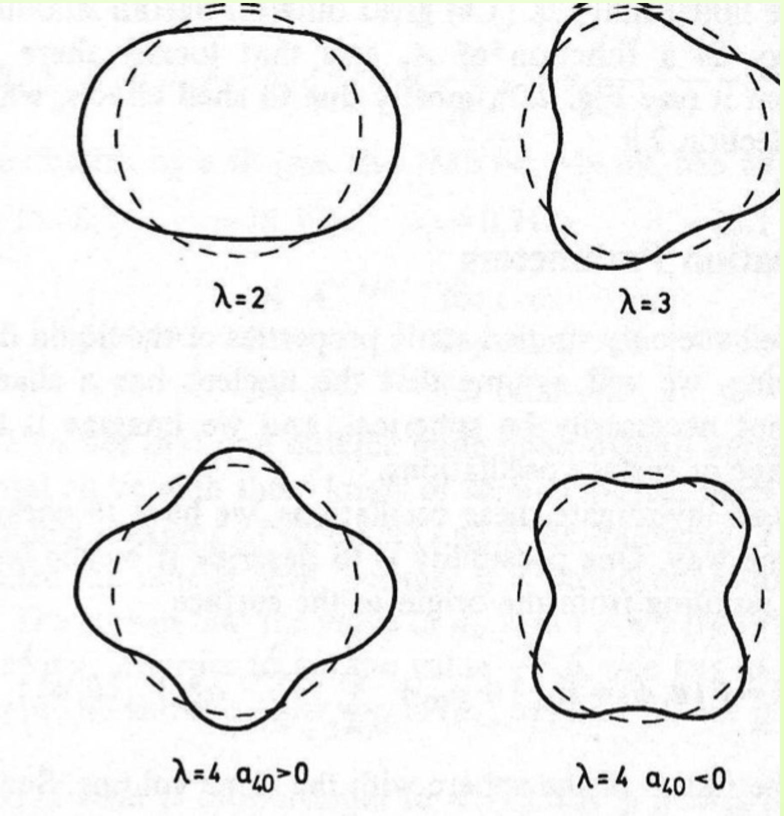
Estados excitados metaestables

$10^{-9}\,s$

El núcleo puede tener el mínimo en una configuración deformada.
Pero, si estuviera en un estado excitado esférico, *decaer implicaría redistribuir su masa*, que a su vez, implica una transición simultánea de muchos núcleones, lo cual inhibe el decaimiento.



Posibles deformaciones



Ejemplo de Isómero

Estados excitados metaestables

$10^{-9}\,s$

Aplicación en Medicina Nuclear

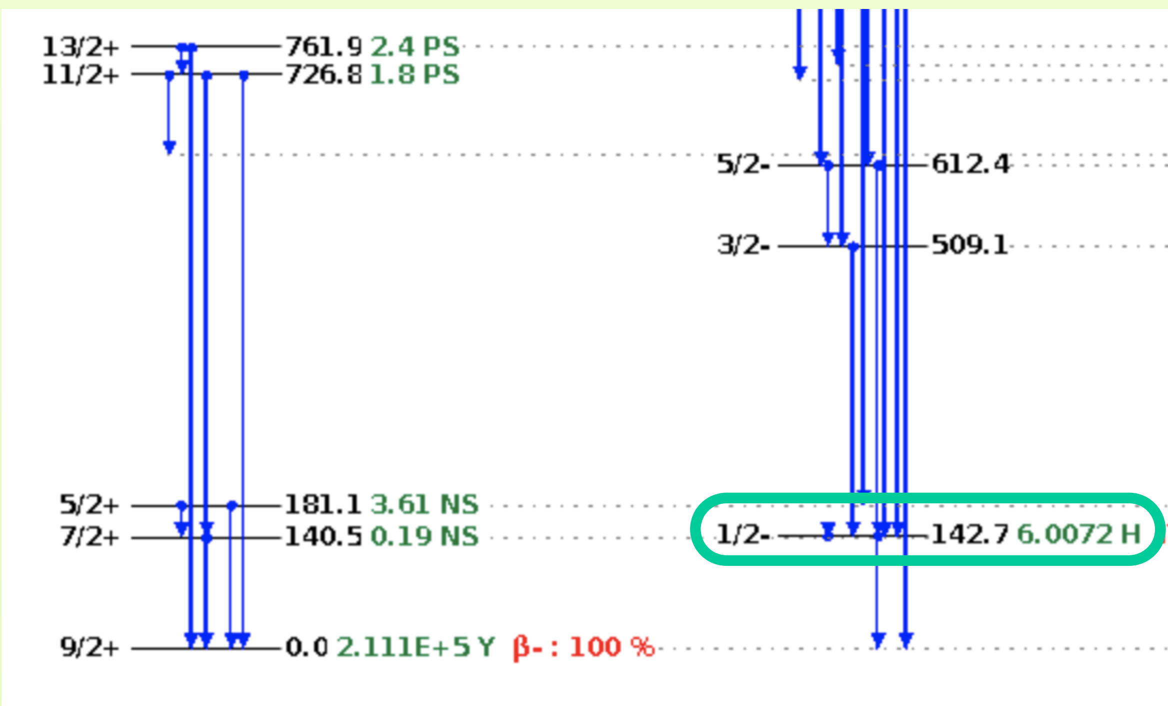
Ground and isomeric state information for $^{99}_{43}\mathrm{Tc}$

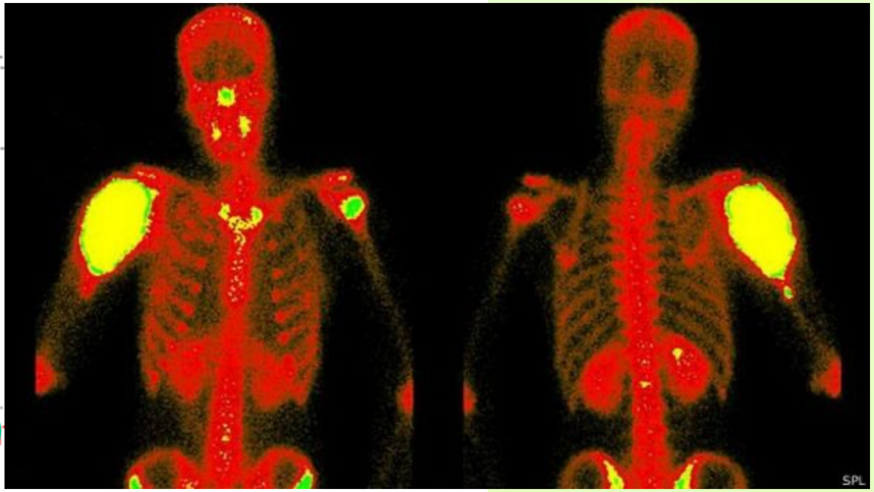
E(level) (MeV)	Jπ	Δ(MeV)	$T_{1/2}$	Decay Modes
0.0	9/2+	-87.3278	$2.111\times10^{+5}$ y *12*	β- : 100.00 %
0.1427	1/2-	-87.1851	6.0067 h *5*	IT : 100.00 % β- : 3.7E-3 %

Implica gran cambio en el MA

Ejemplo 1: Tecnecio 99

$^{99}_{43}Tc^{m}$ —>6 hs





Radiofármaco para huesos

Otro ejemplo de Isómero

Estados excitados metaestables

$10^{-9}s$

Implica gran cambio en el MA

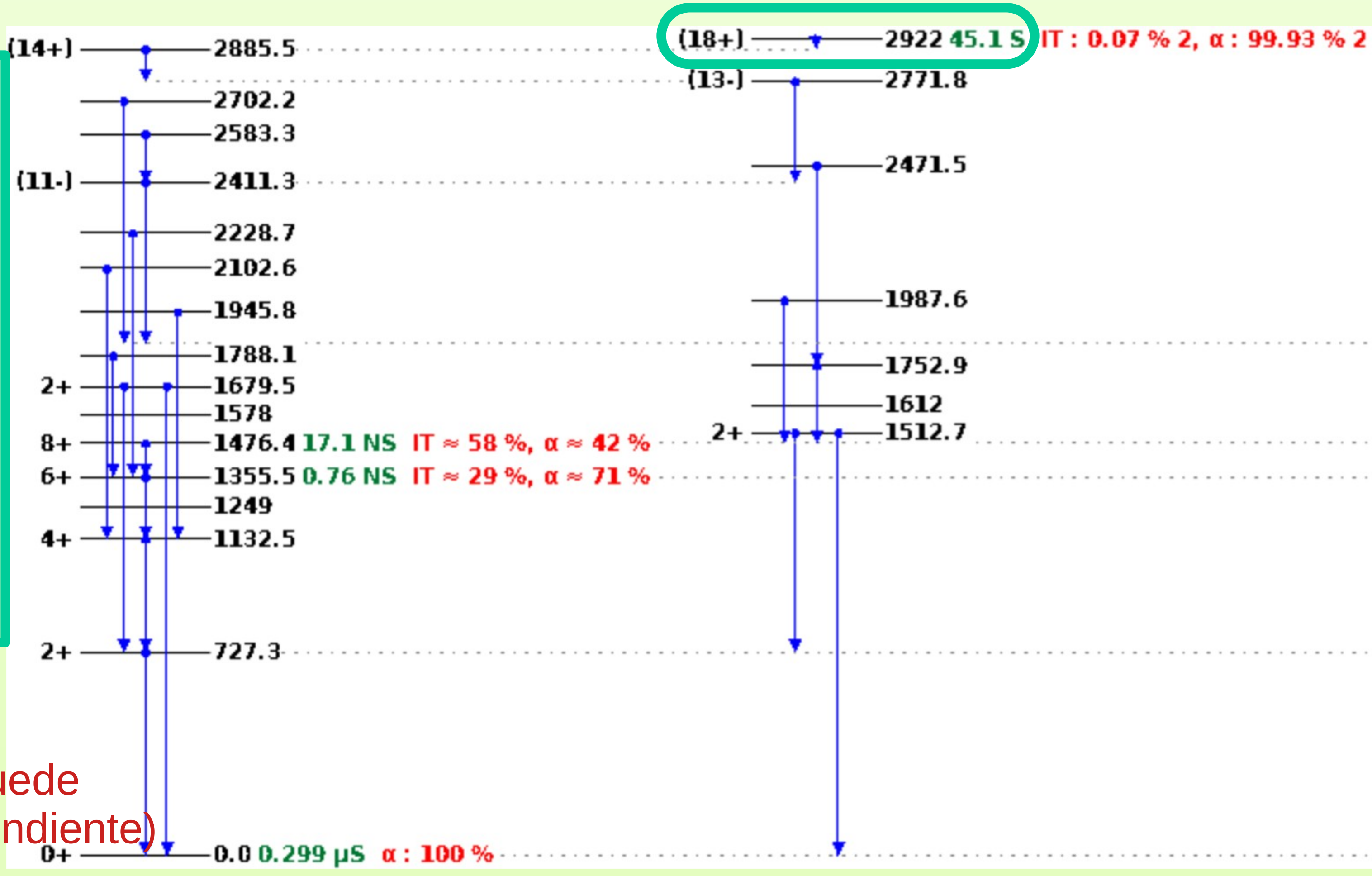
Ejemplo 2:

$^{212}\mathrm{Po}$

$T_{1/2} = 45.1(6)\ \mathrm{s}$

$Ex = 2.922\ \mathrm{MeV}$

$J^{\pi} = 18^{+}$



Curiosidad:
notar que decaimiento puede
ser gamma o alfa, o...(pendiente)

Otros tiempos característicos

Isómero $T_{1/2} > 10^{-9}\,s$

Tiempo ´de decaimiento gamma´

$$t_{nuc} \sim 10^{-12}\,s$$

Tiempo ´de resonancias´

$$T_{1/2} \gtrsim t_{nuc}$$

Tiempo ´formación núcleo´

$$t_{nuc} \sim 10^{-22}\,s$$

Tiempo ´formación átomo´

$$t_{nuc} \sim 10^{-14}\,s$$

Cálculo de tiempo de ‘tránsito’

<u>Tiempo de tránsito</u>

$$2\,R = v_F\,t_{nuc} \Rightarrow t_{nuc} = \frac{2R}{v_F}$$

Velocidad de Fermi
(a definir cuando veamos
Modelo del Gas de Fermi)

$$t_{nuc} = r_0 A^{1/3}\sqrt{\frac{2m}{\varepsilon_F}}$$

<u>Radio nuclear</u>

$$\int_0^R \rho(\bar{r})\,d^3\bar{r} = \int_0^R \rho_0\,d^3\bar{r} = 4\pi\rho_0\frac{R^3}{3} = A$$

$$R^3 = \frac{3}{4\pi\rho_0}A \Rightarrow R \propto A^{1/3}$$

$$\boxed{R = r_0\,A^{1/3}}$$

Radio reducido

$$\varepsilon_F \overset{t_h}{=} \frac{1}{2}m\,v_F^2$$

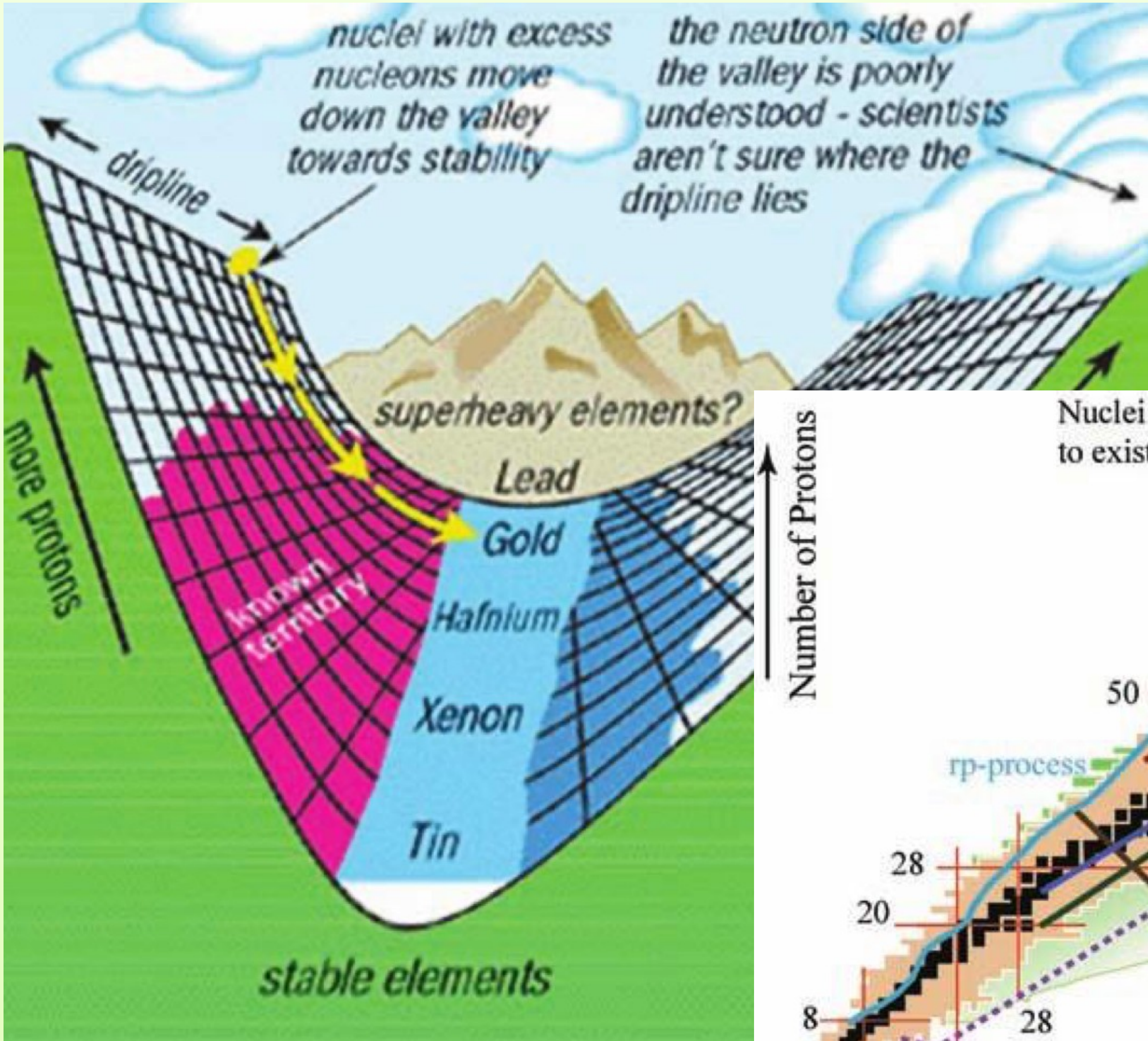
Pendiente de cuantificar

Tiempo nuclear característico

$$t_{nuc} \cong 2.6\times 10^{-23} A^{1/3}\ seg$$

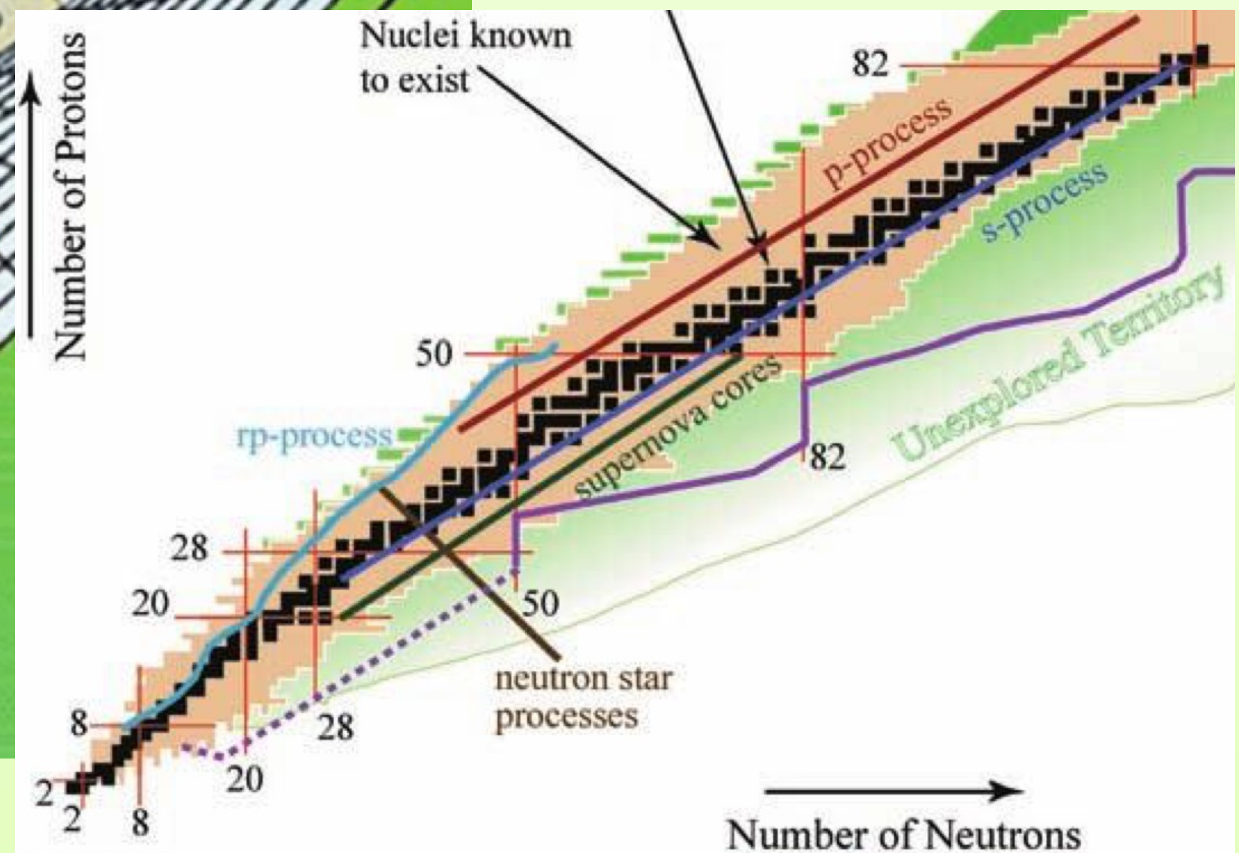
Decaimientos

Decaimientos al ‘valle’ de estabilidad



Canales de decaimientos

- Beta negativo
- Beta positivo
- Alfa
- Conversión interna



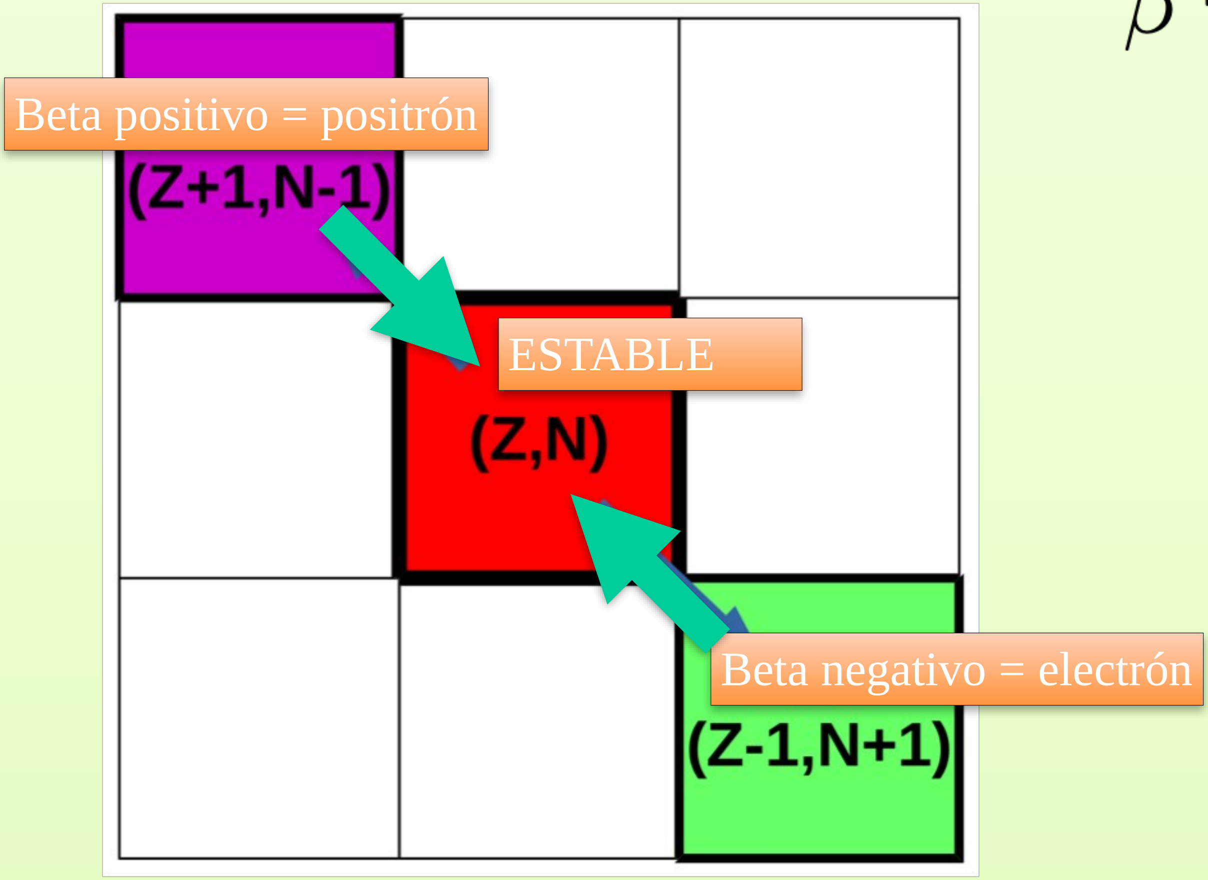
Estabilidad: Decaimientos beta

Beta negativo = electrón

$$\beta: \; {}^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X_{N-1}$$

Beta positivo = positrón

$$\beta^{+}: \; {}^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X_{N+1}$$



Decaimientos beta negativo

Beta negativo = electrón

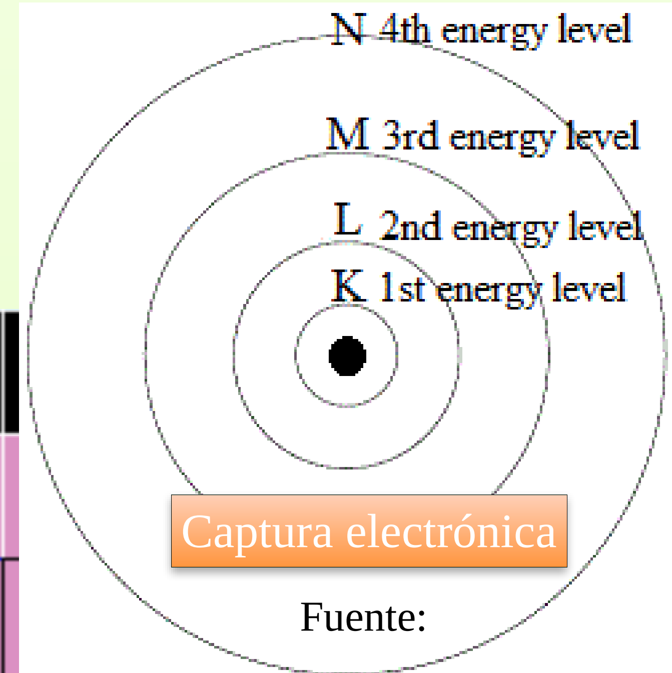
$$\beta\!: \ {}^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow {}^{A}_{Z+1}X_{N-1}$$

Fuente: nndc

Estabilidad: beta positivo + captura electrónica (EC)

Beta positivo = positrón

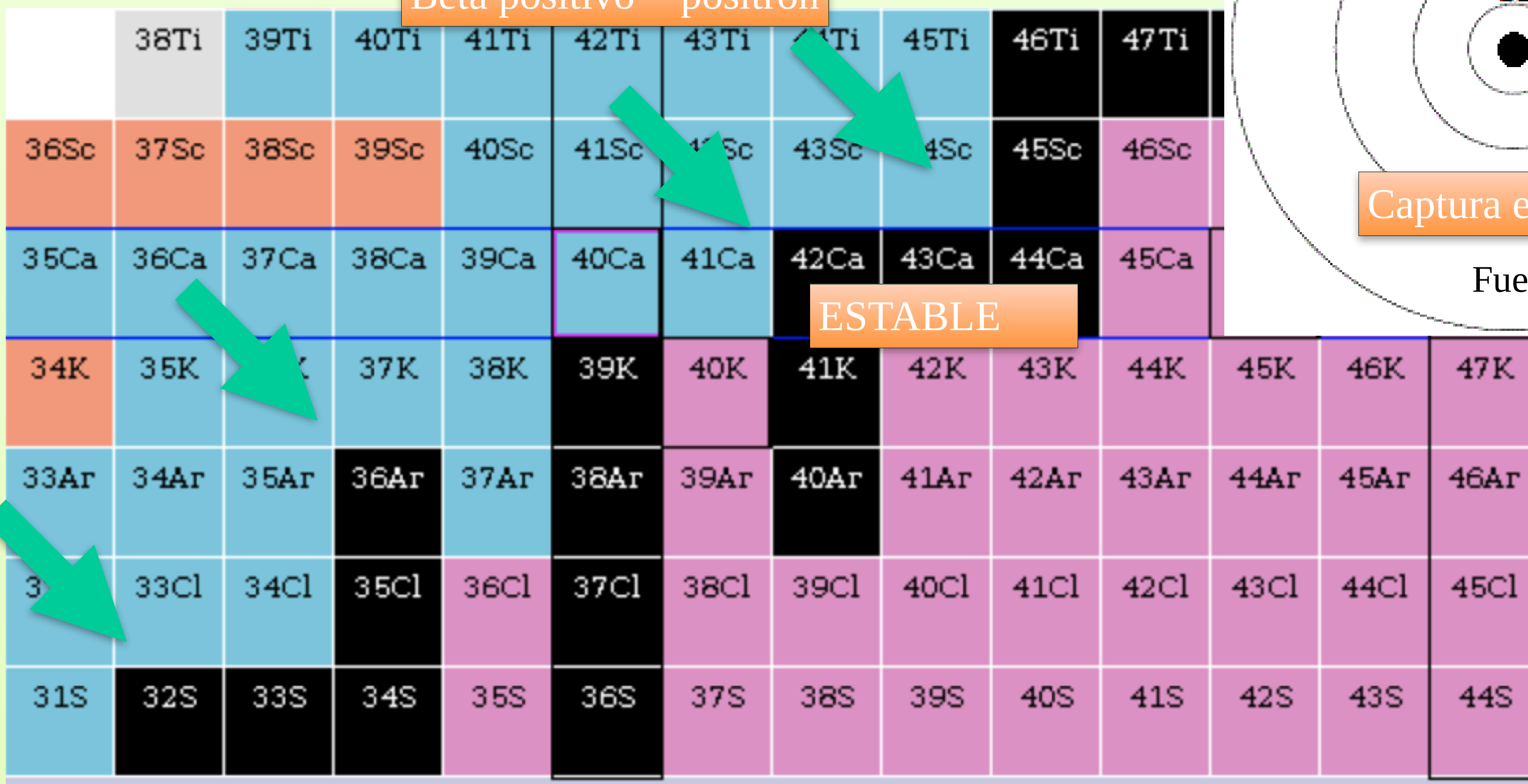
$$\beta^+:\ {}^A_Z X_N \rightarrow {}^{A}_{Z-1} X_{N+1}$$



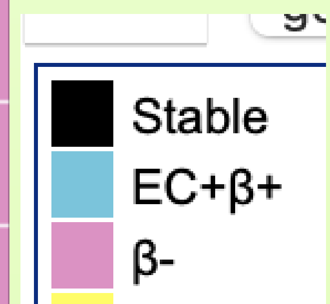
Captura electrónica

Captura electrónica

Beta positivo = positrón



ESTABLE



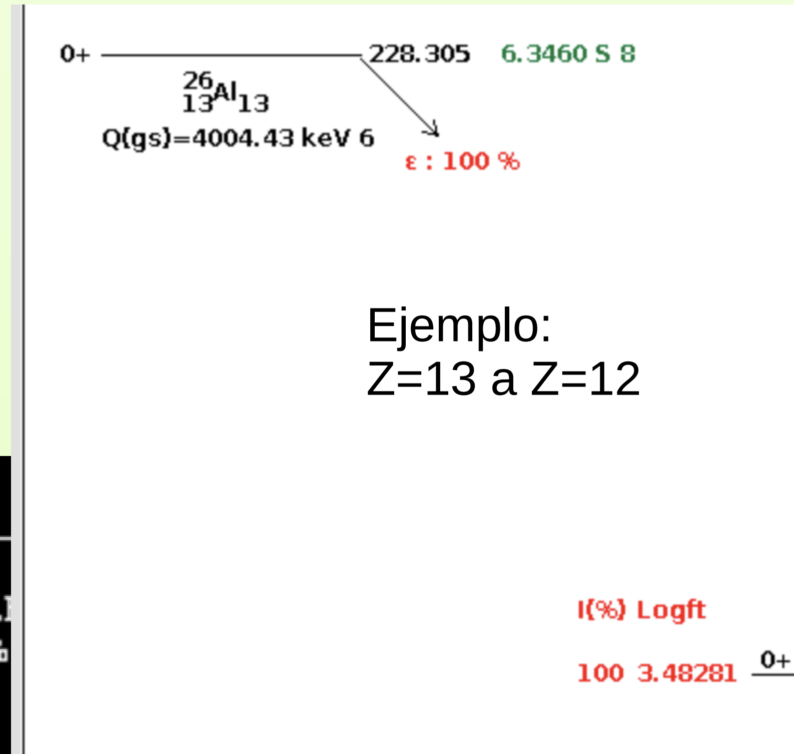
Fuente: nndc

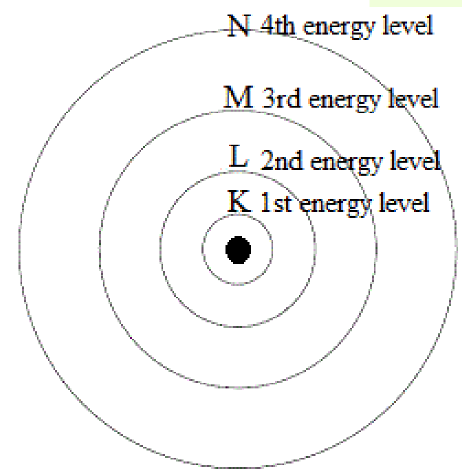
Estabilidad: captura electrónica (EC)

Captura electrónica

$$p+e \rightarrow n+\overline{\nu}_e$$

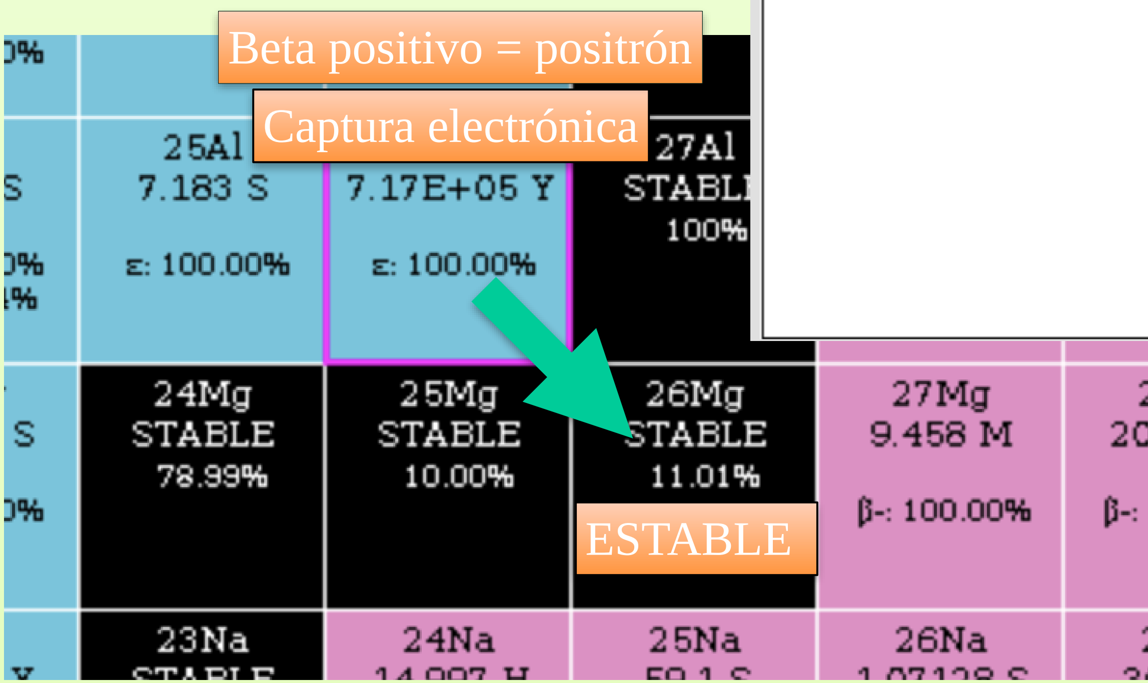
- $${}^{A}_{Z}X_{N}+e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X_{N+1}+\overline{\nu}_e$$

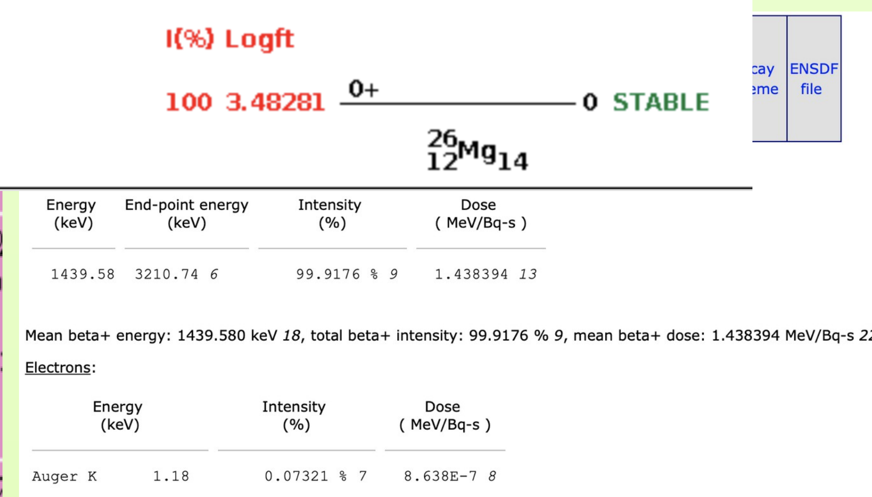




Ejemplo:
Z=13 a Z=12

Importancia relativa beta versus captura(siguiente transparencia)





Energy (keV)	End-point energy (keV)	Intensity (%)	Dose (MeV/Bq-s)
1439.58	3210.74 *6*	99.9176 % *9*	1.438394 *13*

Mean beta+ energy: 1439.580 keV *18*, total beta+ intensity: 99.9176 % *9*, mean beta+ dose: 1.438394 MeV/Bq-s *22*

Electrons:

	Energy (keV)	Intensity (%)	Dose (MeV/Bq-s)
Auger K	1.18	0.07321 % 7	8.638E-7 *8*

Fuente: nndc

Estabilidad: captura electrónica (EC)

Captura electrónica

$$p+e \rightarrow n+\overline{\nu}_e$$

$$^{A}_{Z}X_{N}+e \rightarrow {}^{A}_{Z-1}X_{N+1}+\overline{\nu}_e$$

Parent Nucleus	Parent E(level)	Parent Jπ	Parent $T_{1/2}$	Decay Mode	GS-GS Q-value (keV)	Daughter Nucleus	Decay Scheme	ENSDF file
$^{26}_{13}$Al	228.305*13*	0+	6.3460 s *8*	ε: 100 %	4004.43 *6*	$^{26}_{12}$Mg		

Ejemplo:
Z=13 a Z=12

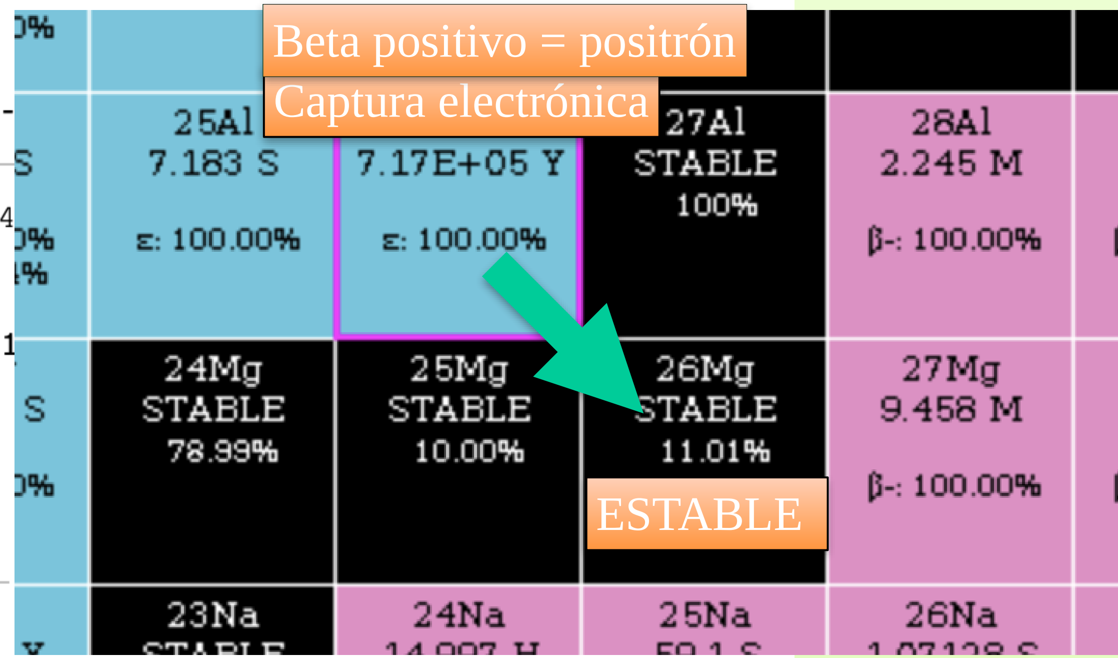
Beta+:

Energy (keV)	End-point energy (keV)	Intensity (%)	Dose (MeV/Bq-
1439.58	3210.74 *6*	99.9176 % *9*	1.438394

Mean beta+ energy: 1439.580 keV *18*, total beta+ intensity: 99.91

Electrons:

Energy (keV)		Intensity (%)	Dose (MeV/Bq-s)
Auger K	1.18	0.07321 % 7	8.638E-7 *8*



Fuente: nndc

Estabilidad: Decaimientos alfa

Decae a estado inestable

Decae a estado estable

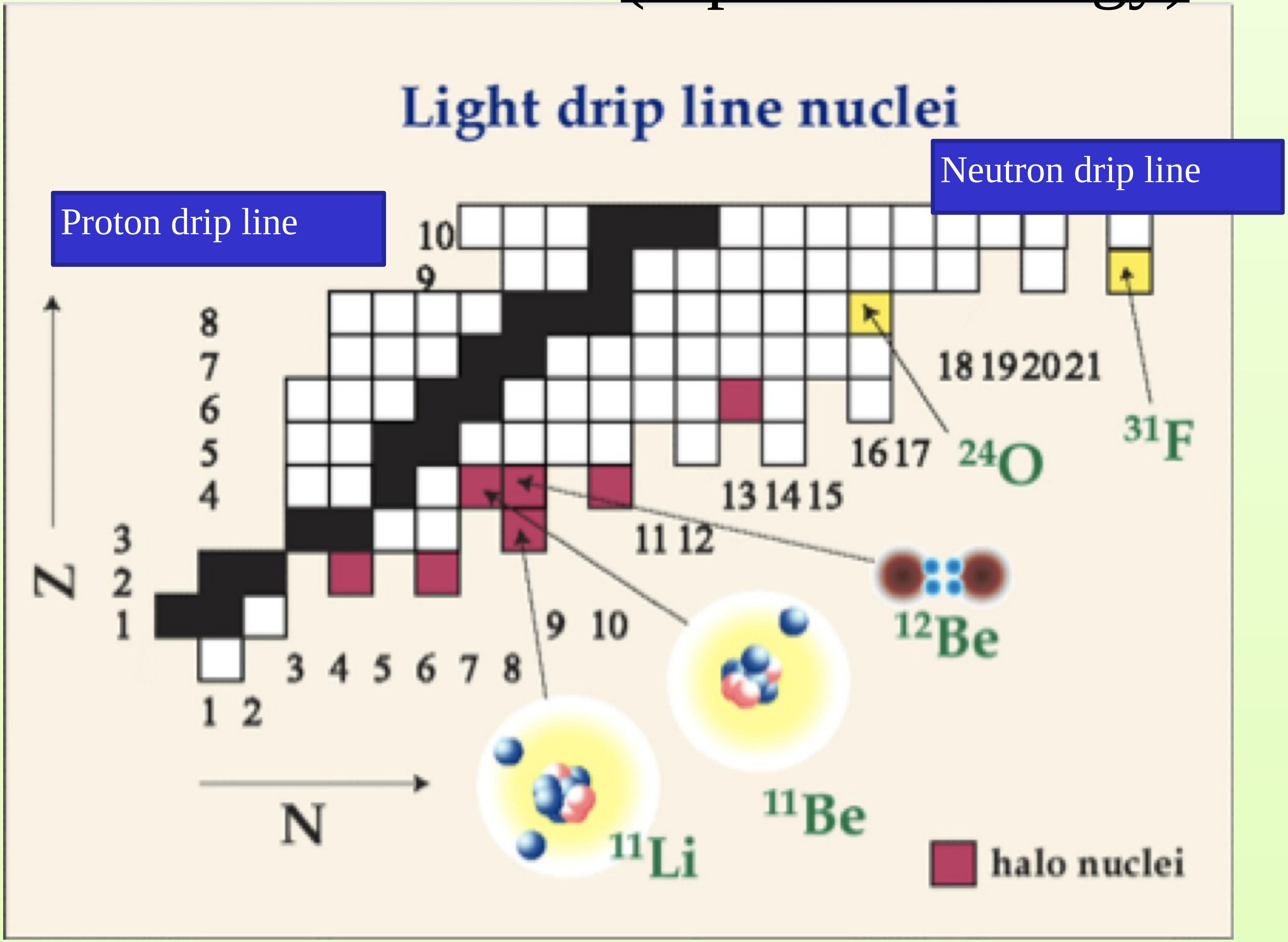
Z	206Po 8.8 D ε: 94.55% α: 5.45%	207Po 5.80 H ε: 99.98% α: 0.02%	208Po 2.898 Y [illegible]100.00% [illegible]: 4.0E-3%	209Po 124 Y α: 99.55% ε: 0.45%	210Po 138.376 D α: 100.00%	211Po 0.516 S α: 100.00%	212Po 0.299 µS α: 100.00%	213Po 3.72 µS α: 100.00%	214Po 163.6 µS α: 100.00%
83	205Bi 15.31 D ε: 100.00%	206[illegible] 6.2[illegible] D [illegible]00.00%	207Bi 31.55 Y ε: 100.00%	208Bi 3.68E+5 Y ε: 100.00%	209Bi 2.01E19 Y 100% [illegible]100.0%	210Bi 5.012 D β-: 10[illegible]% α: [illegible]-4%	211Bi 2.14 M α: 99.72% β-: 0.28%	212Bi 60.55 M β-: 64.06% α: 35.94%	213Bi 45.61 M β-: 97.80% α: 2.20%
82	204P[illegible] ≥1.4E+17 Y 1.4% α	205Pb 1.73E+7 Y ε: 100.00%	206Pb STABLE 24.1%	207P[illegible] STA[illegible]E [illegible]1%	208Pb STABLE 52.4%	209Pb 3.234 H β-: 100.00%	210Pb 22.20 Y β-: 100.00% α: 1.9E-6%	211Pb 36.1 M β-: 100.00%	212Pb 10.64 H β-: 100.00%
81	203Tl STABLE 29.524%	204Tl 3.783 Y β-: 97.08% ε: 2.92%	205T[illegible] STABLE 70.48%	206Tl 4.202 M β-: 100.00%	207Tl 4.77 M β-: 100.00%	208Tl 3.053 M β-: 100.00%	209Tl 2.162 M β-: 100.00%	210Tl 1.30 M β-: 100.00% β-n: 7.0E-3%	211Tl 88 S β-: 100.00% β-n
80	202Hg STABLE 29.86%	203Hg 46.594 D β-: 100.00%	204Hg STABLE 6.87%	205Hg 5.14 M β-: 100.00%	206Hg 8.32 M β-: 100.00%	207Hg 2.9 M β-: 100.00%	208Hg 41 M β-: 100.00%	209Hg 36 S β-: 100.00%	210Hg >300 NS β-: 100.00%
	122	123	124	125	126	127	128	129	N

- Stable
- EC+β+
- β-
- α

Fuente: nndc

Linea de goteo (Drip line)

Decaimiento de nucleón versus decaimiento beta (separation energy)



Energía de ligadura

Conceptos relacionados con la masa

<u>Masa del núcleo</u>

$$m(A,Z)=M(A,Z)-Zm_e+\frac{B_e}{c^2}$$

Masa del átomo

$M(A,Z)$

Masa electrón

m_e

Masa ligadura Electrones

B_e/c^2

Energía de ligadura electrones

$$B_e(Z)=14.4381\,Z^{2.39}+1.55468\times10^{-6}\,Z^{5.35}\,e\,v$$

Conceptos relacionados con la masa

Masa del núcleo

$$m(A,Z)=M(A,Z)-Z\,m_e+\frac{B_e}{c^2}$$

Masa del átomo $M(A,Z)$

Masa electrón m_e

Masa ligadura Electrones B_e/c^2

Energía de ligadura electrones

$$B_e(Z)=14.4381\,Z^{2.39}+1.55468\times10^{-6}\,Z^{5.35}\;e\,v$$

Defecto de masa

$$\Delta m=(Z\,m_p+N\,m_n)-m(A,Z)$$

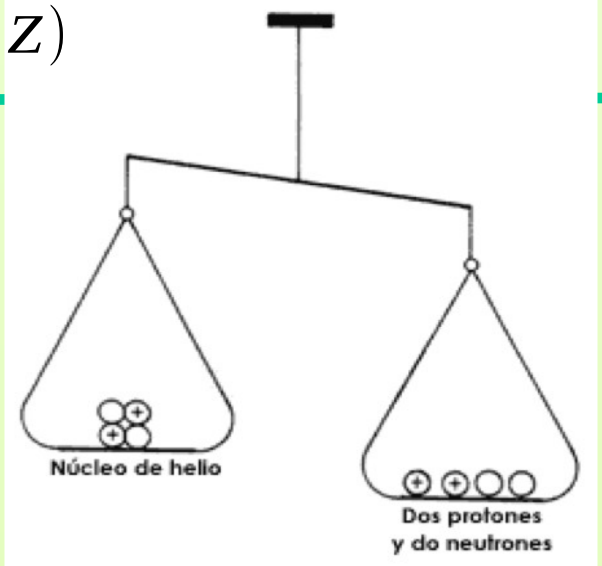
Energía de ligadura

$$B=\Delta m\,c^2$$

$[B]=M\,e\,V$

$$[\Delta m]=u\,m\,a=\frac{M\,e\,v}{c^2}$$

$$1\,u\,m\,a\approx\frac{931.5\,M\,e\,V}{c^2}$$



Conceptos relacionados con la masa

Masa del núcleo

$$m(A,Z)=M(A,Z)-Z\,m_e+\frac{B_e}{c^2}$$

Masa del átomo

$M(A,Z)$

Masa electrón

m_e

Masa ligadura Electrones

B_e/c^2

Energía de ligadura electrones

$$B_e(Z)=14.4381\,Z^{2.39}+1.55468\times 10^{-6}\,Z^{5.35}\,e\,v$$

Defecto de masa

$$\Delta m=(Z\,m_p+N\,m_n)-m(A,Z)$$

$$[\Delta m]=u\,m\,a=\frac{M\,e\,v}{c^2}$$

$$1\,u\,m\,a\approx\frac{931.5\,M\,e\,V}{c^2}$$

Energía de ligadura

$$B=\Delta m\,c^2 \qquad [B]=M\,e\,V$$

Exceso de masa

$$m_{exc}=m(A,Z)-A \qquad [m]=u\,m\,a$$

Ver sitio:
https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2020/mass_1.mas20.txt

Ejemplo: uso de la masa nuclear para calcula energía de ligadura

Defecto de masa

$$\Delta m = (Z m_p + N m_n) - m(A, Z)$$

$$m_{exc} = m(A, Z) - A$$

$$\Delta m = Z M_{exc}(H) + N m_{exc}(n) - M_{exc}(A, Z)$$

$$1\, uma \approx \frac{931.5\, MeV}{c^2}$$

$$[\Delta m] = uma = \frac{Mev}{c^2}$$

Ir a la pagina web https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2020/mass_1.mas20.txt

$$m_{exc}(n) = 8071.317\, keV$$

$$m_{exc}(H) = 7288.971\, keV$$

$$m_{exc}({}^{12}C) = 0\, keV$$

$$\Delta m({}^{12}C) = Z m_{exc}(p) + N m_{exc}(n) - m_{exc}(A, Z)$$

$$\Delta m({}^{12}C) = 92161.78\, keV$$

Comparar con tabla (ir al link)

https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/nudat2.jsp

$$BE({}^{12}C)/A = 7680.144\, keV \Rightarrow BE({}^{12}C) = 92161.728\, keV$$

Ejemplo: uso del exceso de masa para calcula energía de ligadura

Defecto de masa

$$\Delta m = (Z\,m_p + N\,m_n) - m(A,Z)$$

$$m(A,Z) = M(A,Z) - Z\,m_e + \frac{B_e}{c^2}$$

$$[\Delta m] = uma = \frac{Mev}{c^2}$$

Ir a la pagina web https://www-nds.iaea.org/amdc/ame2020/mass_1.mas20.txt

$m_p = 1.007276466588\, uma$ $M(^{12}C) = 12\, uma$ $B_e/c^2 = 1.122\times 10^{-6}\, uma$

$m_n = 1.0086649159\, uma$ $m_e = 0.000548579909065\, uma$

$m(12,6) = 11.996710\, uma$ $1\, uma \approx \frac{931.5\, MeV}{c^2}$

$\Delta m(^{12}C) = 0.098939\, uma$

$\Delta m(^{12}C) = 92.161\, MeV$

Comparar con tabla (ir al link)

https://www.nndc.bnl.gov/nudat3/nudat2.jsp

$BE(^{12}C)/A = 7680.144\, keV \Rightarrow BE(^{12}C) = 92161.728\, keV$

Energía de Ligadura: Fórmula empírica

Fórmula de (Bethe-)Weizsäcker

$$B(N,Z) = a\,A - b\,A^{2/3} - s\,\frac{(N-Z)^2}{A} - d\,\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

Término de volumen

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi (r_0 A^{1/3})^3,$$

(ganancia)

Simetría
(pérdida)

Coulomb

$$E = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \propto \frac{z^2}{A^{1/3}}$$

(pérdida)

Término de superficie

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (r_0 A^{1/3})^2.$$

(pérdida)

Pairing-Apareamiento

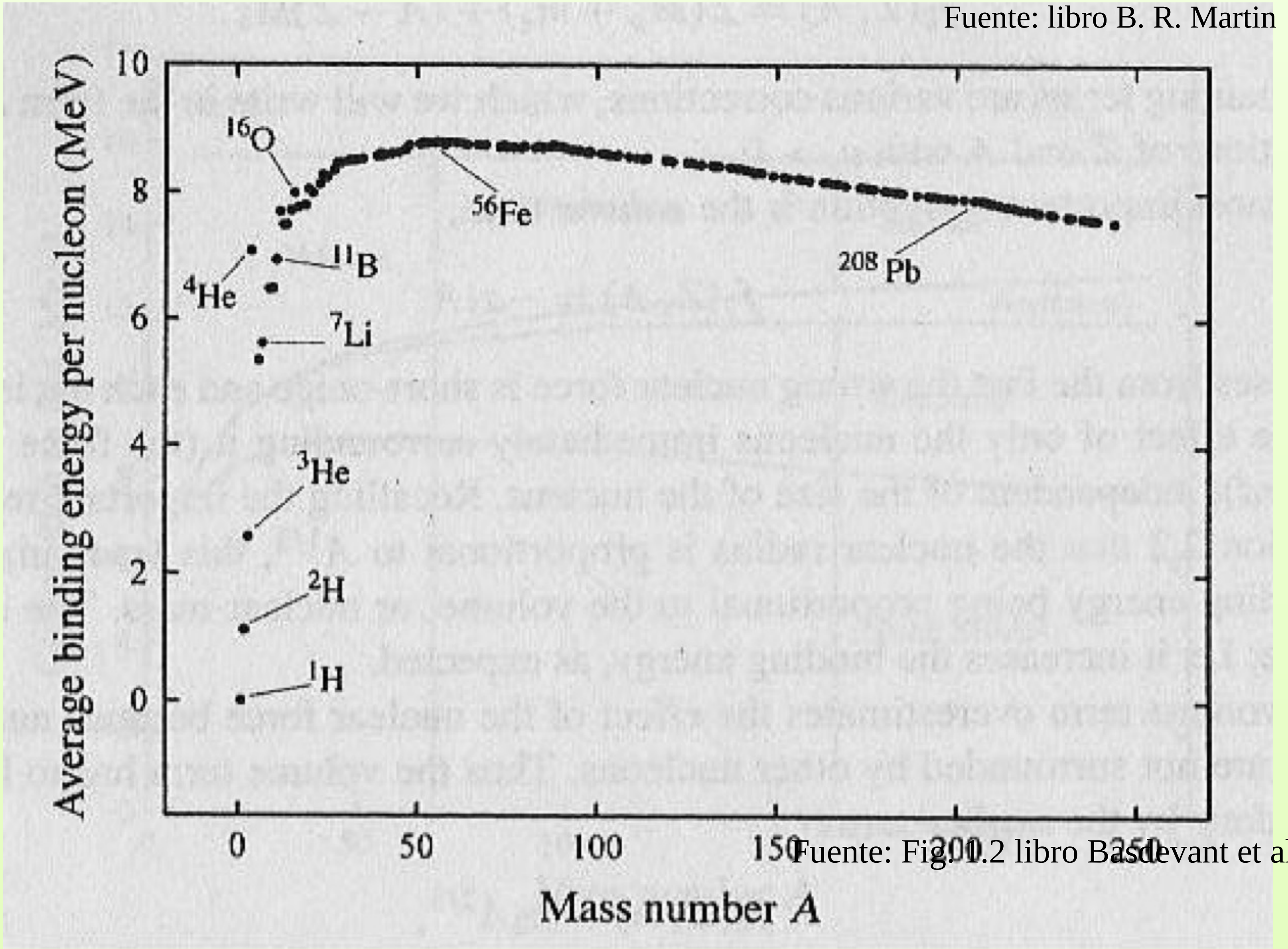
$$\delta \begin{cases} < 0 & \text{Z par, N par} \\ = 0 & \text{Z par - N impar o Z impar - N par} \\ > 0 & \text{Z impar, N impar} \end{cases}$$

(ganancia)

(pérdida)

Energía de ligadura experimental por nucleón

Fuente: libro B. R. Martin

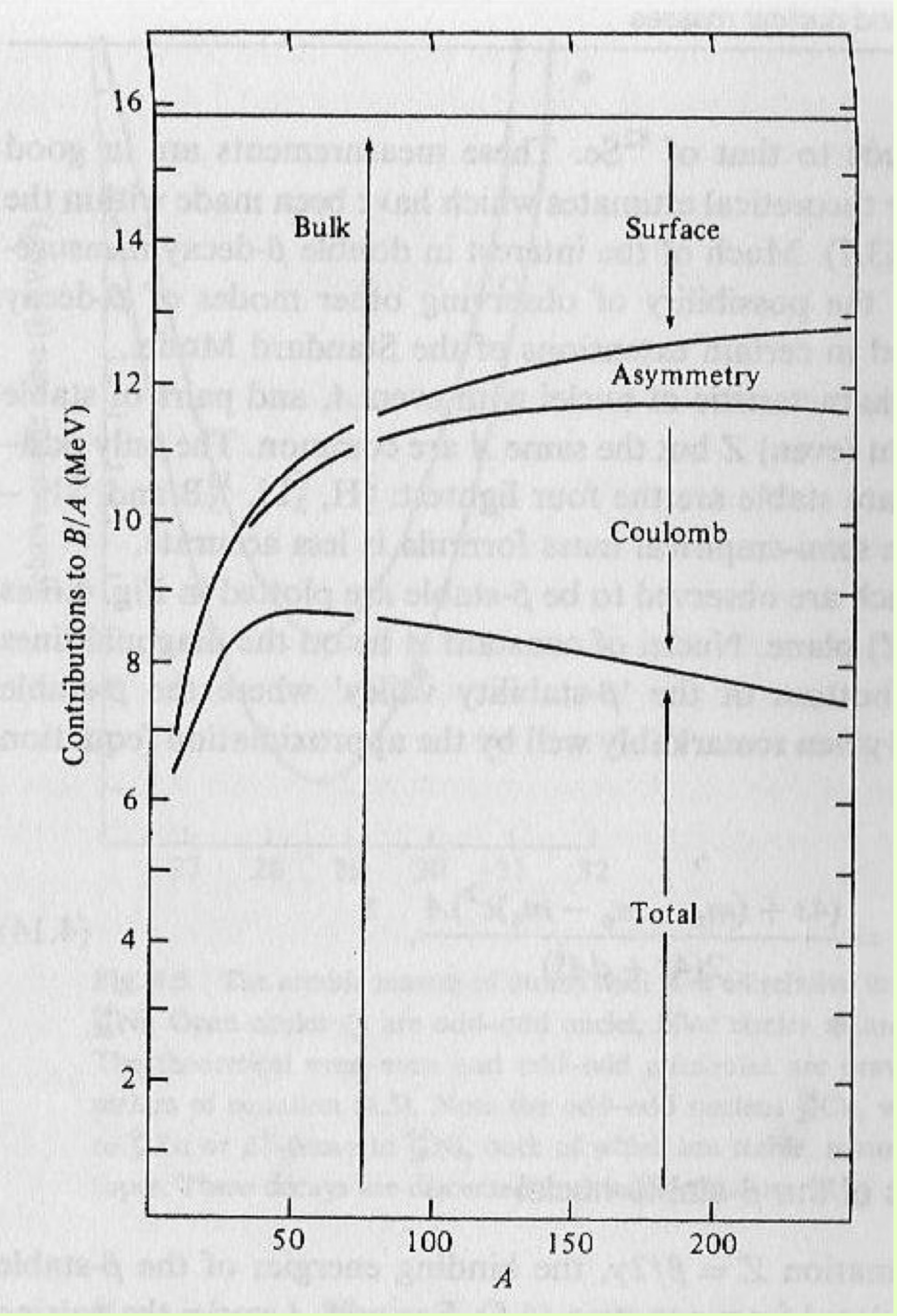


Fuente: Fig. 1.2 libro Basdevant et al.

Contribuciones relativas en la fórmula de (Bethe-)Weizsäcker

$$B(N,Z) = a\,A - b\,A^{2/3}$$

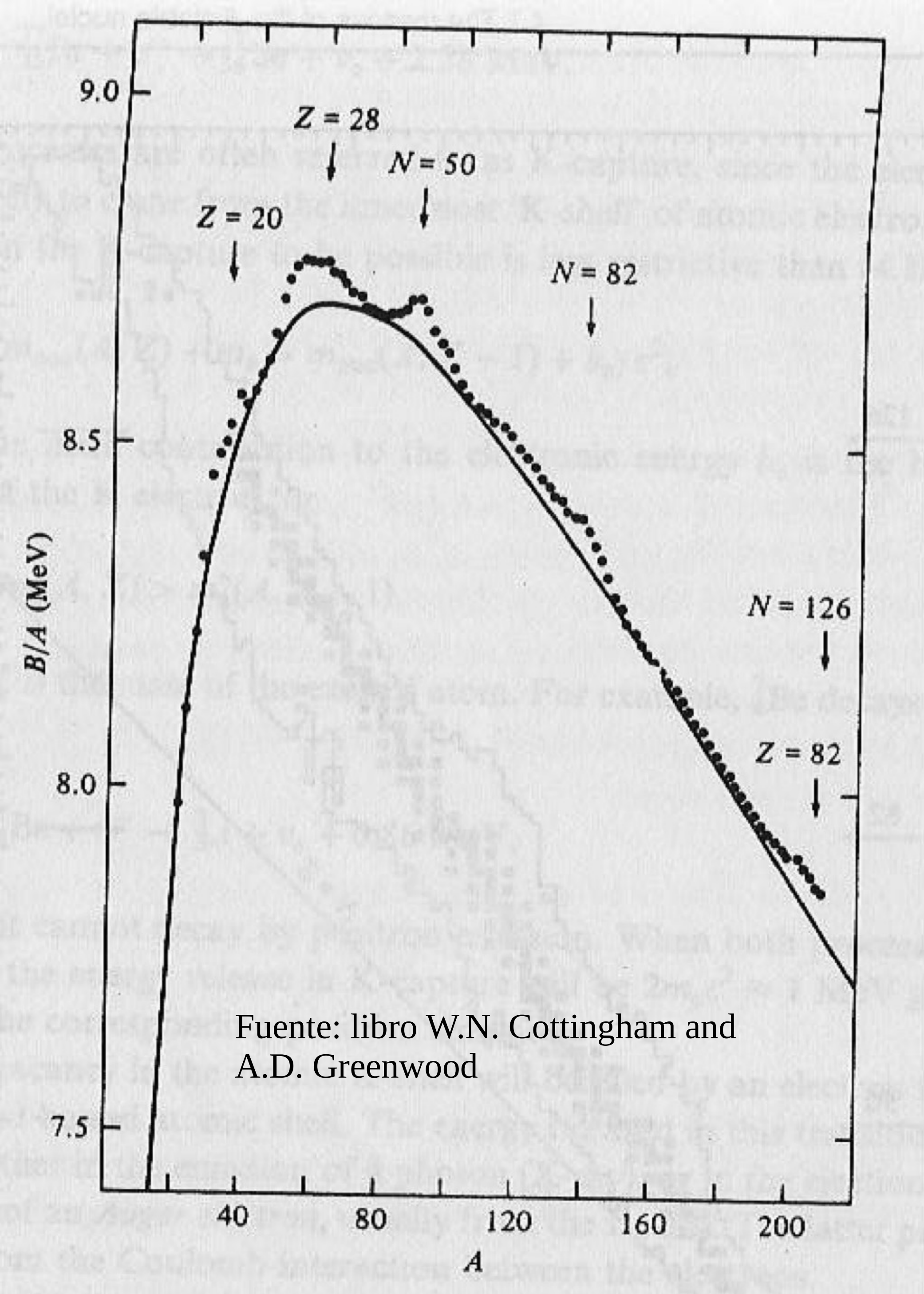
$$- s\,\frac{(N-Z)^2}{A} - d\,\frac{Z^2}{A^{1/3}}$$



Fuente: libro W.N. Cottingham and A.D. Greenwood

Parámetros optimizados

$$\boxed{B(N,Z) = a\,A - b\,A^{2/3} - s\frac{(N-Z)^2}{A} - d\frac{Z^2}{A^{1/3}} - \frac{\delta}{A^{1/2}}}$$



Fuente: libro W.N. Cottingham and A.D. Greenwood

Optimización

$a = 15.835$ MeV,

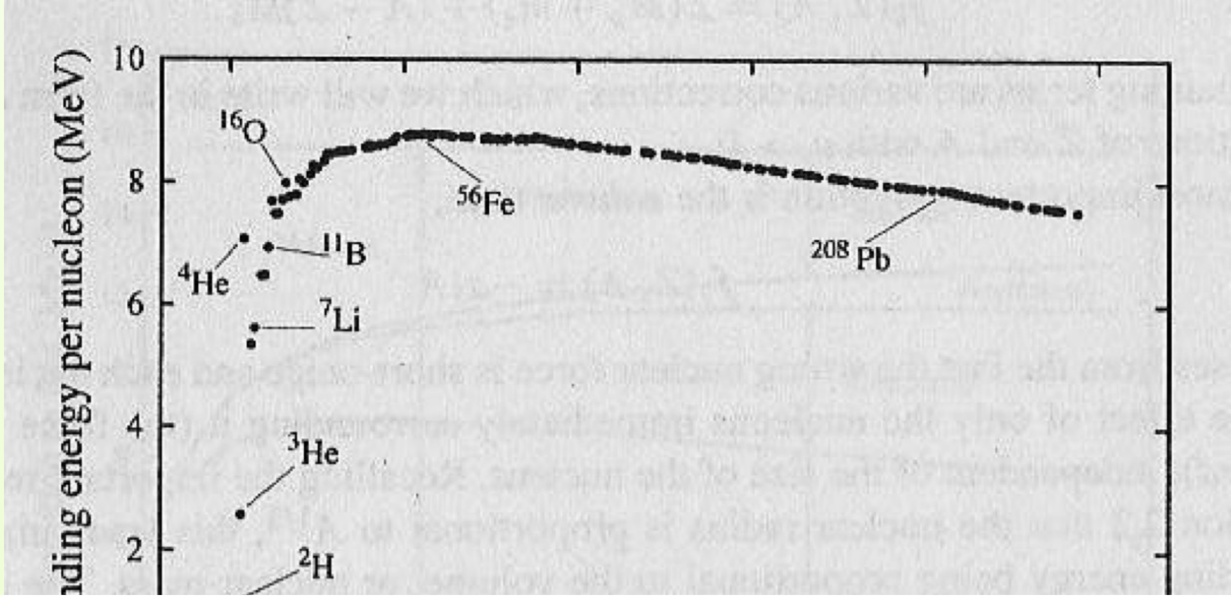
$b = 18.33$ MeV,

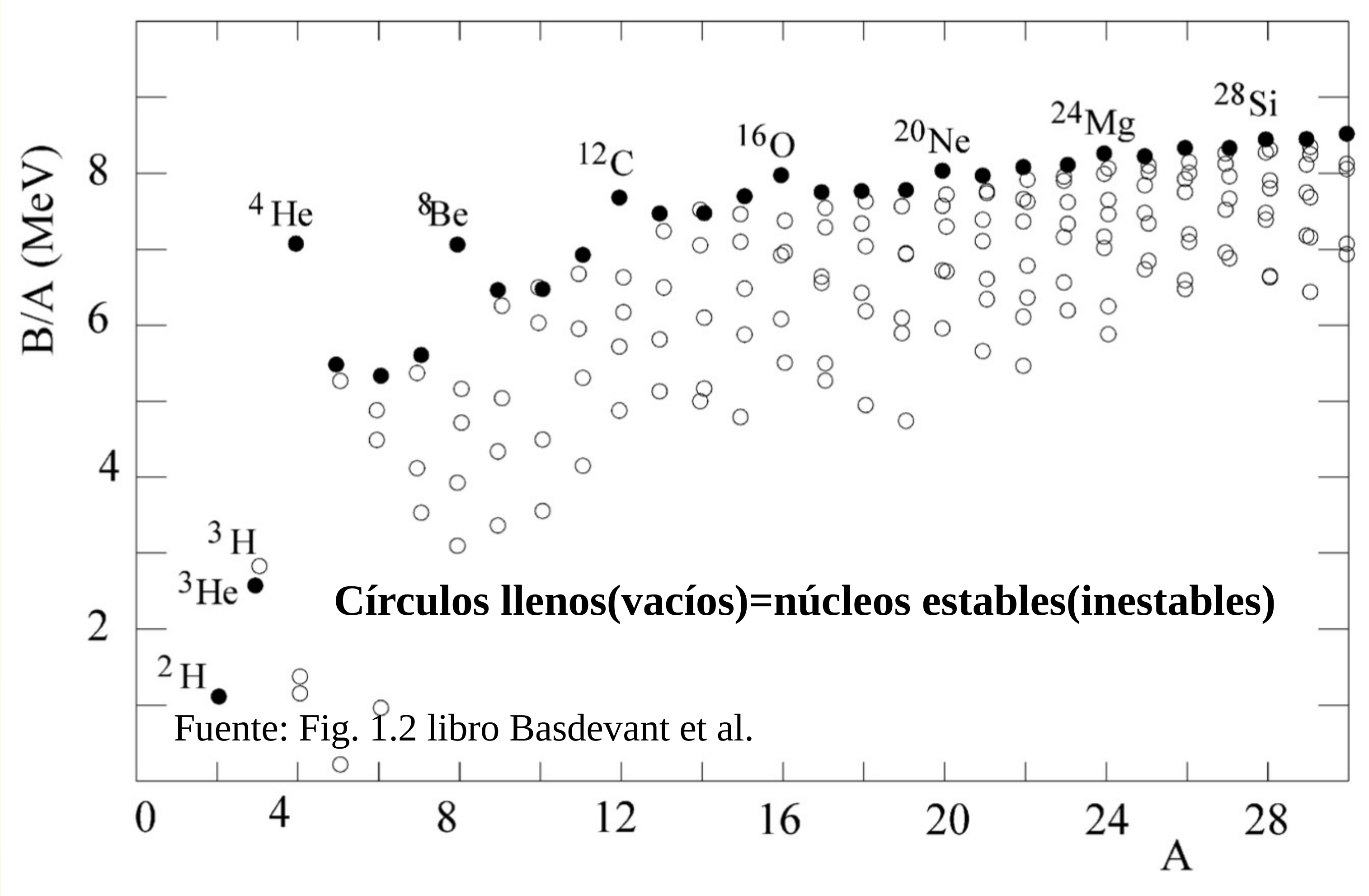
$s = 23.20$ MeV,

$d = 0.714$ MeV,

$\delta_{o-o} = 11.2$ MeV, $\delta_{e-o} = 0$ MeV, $\delta_{e-e} = -11.2$ MeV.

Comparación de energía de ligadura por nucleón entre Núcleos estables e inestables

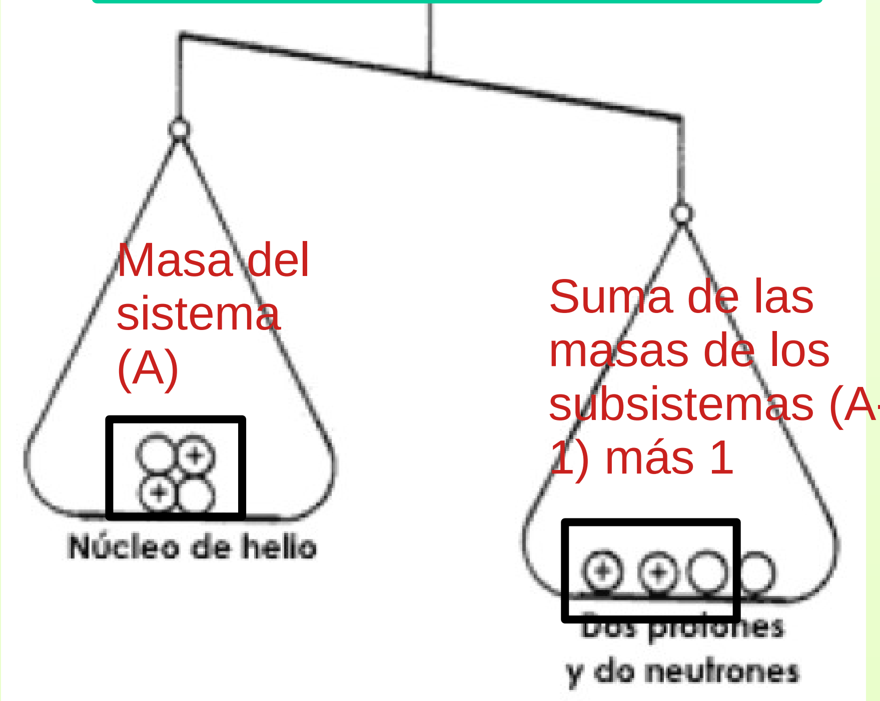




Energía de separación

Energía de separación de un nucleón

$$m(A) < m(A-1) + m_v$$



Compensación

$$m(A) + S_v(A) = m(A-1) + m_v$$

Energía de separación de un neutrón

$$S_n(Z,N) = [m(Z,N-1) + m_n] - m(Z,N)$$

Forma práctica de calcular la energía de separación

Energía de separación de un neutrón

$$S_n(Z,N)=[m(Z,N-1)+m_n]c^2-m(Z,N)c^2$$

Energía de ligadura

$$BE(A,Z)=\Delta m c^2$$

$$\Delta m=(Z m_p+N m_n)-m(A,Z)$$

$$\frac{S_n(Z,N)}{c^2}=m(Z,N-1)[-Z m_p-(N-1)m_n]+m_n-m(Z,N)[+Z m_p+(N-1)m_n]$$

$$\frac{S_n(Z,N)}{c^2}=-\Delta m(Z,N-1)+\Delta m(Z,N)$$

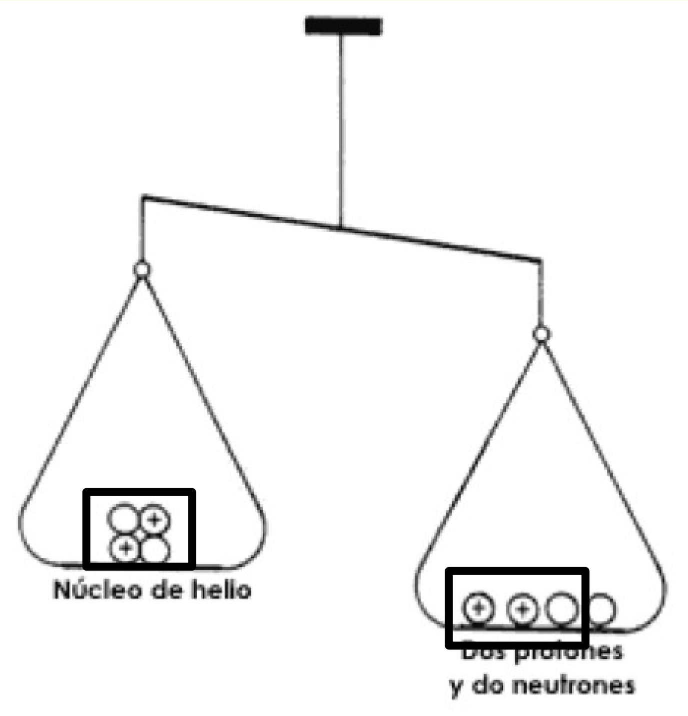
Energía de separación de un neutrón

$$S_n(Z,N)=-BE(Z,N-1)+BE(Z,N)$$

Energía de separación de un protón

$$S_p(Z,N)=+BE(Z,N)-BE(Z-1,N)$$

Ejemplo: energía de separación de un nucleón



$$m(A) < m(A-1) + m_n$$

$$S_n(Z,N) = B(Z,N) - B(Z,N-1)$$
$$S_p(Z,N) = B(Z,N) - B(Z-1,N)$$

Núcleo	S_n (MeV)	S_p (MeV)
^{7}Li	7.251	9.9974
^{4}He	20.578	19.814
^{16}O	15.664	12.127
^{17}O	4.143	13.782

Ejemplo: indicador de núcleo no ligado

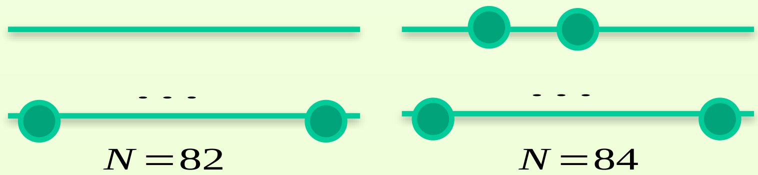
$$S_n(Z,N) = B(Z,N) - B(Z,N-1)$$

$$S_p(Z,N) = B(Z,N) - B(Z-1,N)$$

Núcleo	S_n (MeV)	S_p (MeV)
^{7}Li	7.251	9.9974
^{4}He	20.578	19.814
^{5}He	$\boxed{-0.735}$	20.68
^{16}O	15.664	12.127
^{17}O	4.143	13.782

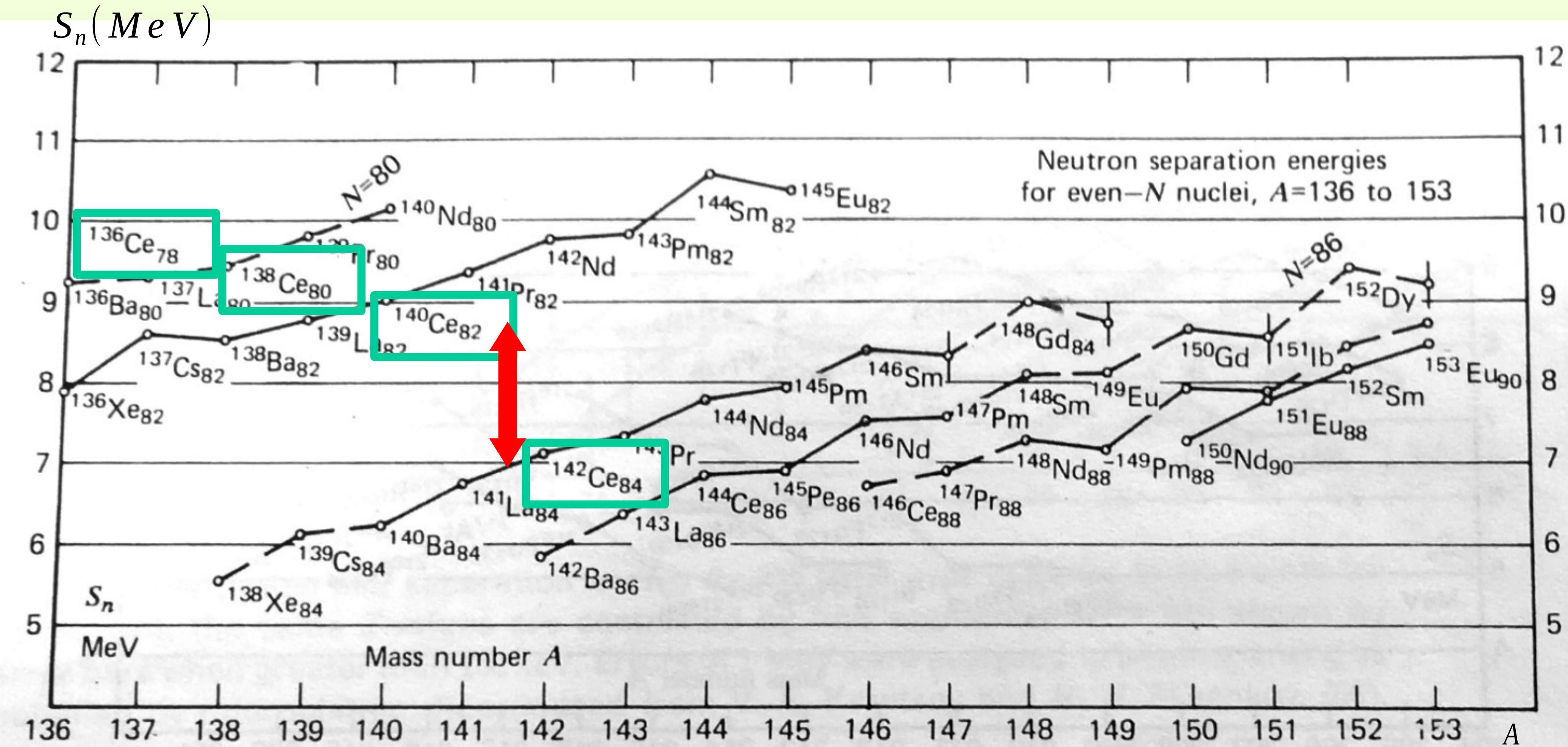
Resonancia

Evidencia de capas a partir de la energía de separación de un neutrón



$h_{9/2}(Degenerac.10)[Acumulado\,92]$

$h_{11/2}(Degenerac.12)[Acumulado\,82]$



Fuente: deShalit & Fleshbach

Energía de separación de dos neutrones

$$S_{2n}(Z,N)=BE(Z,N)-BE(Z,N-2)$$

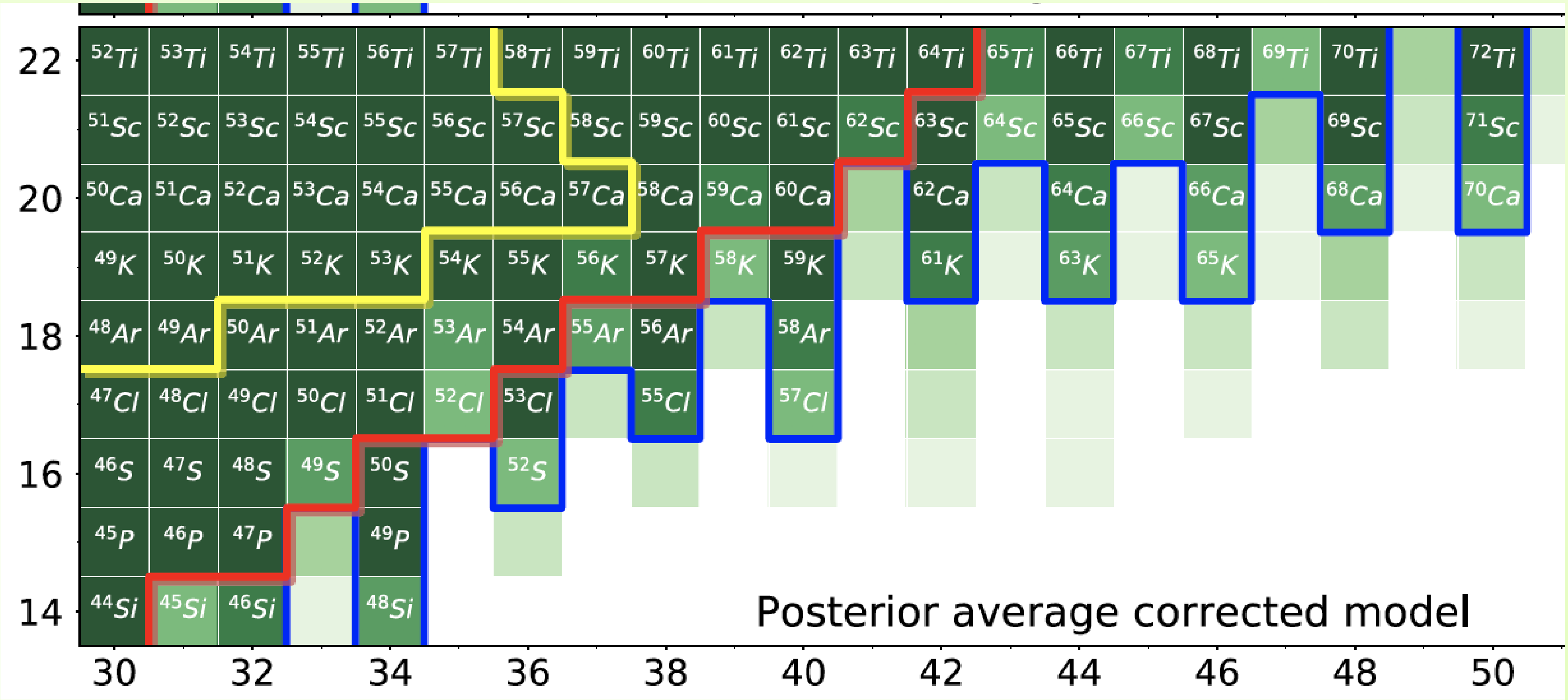
Energía de separación de dos nucleones

Isótopo	S_{2n} (MeV)	S_{2p} (MeV)
^{16}O	28.887	22.334
^{18}O	12.188	29.055
^{20}O	11.564	35.700
^{22}O	10.660	42.850
^{24}O	6.930	49.700
^{26}O	-0.090	—

Definición de línea de goteo de uno y dos neutrones

$$S_n(Z,N)=BE(Z,N)-BE(Z,N-1)=0$$

$$S_{2n}(Z,N)=BE(Z,N)-BE(Z,N-2)=0$$



Rudimentos sobre reacciones nucleares

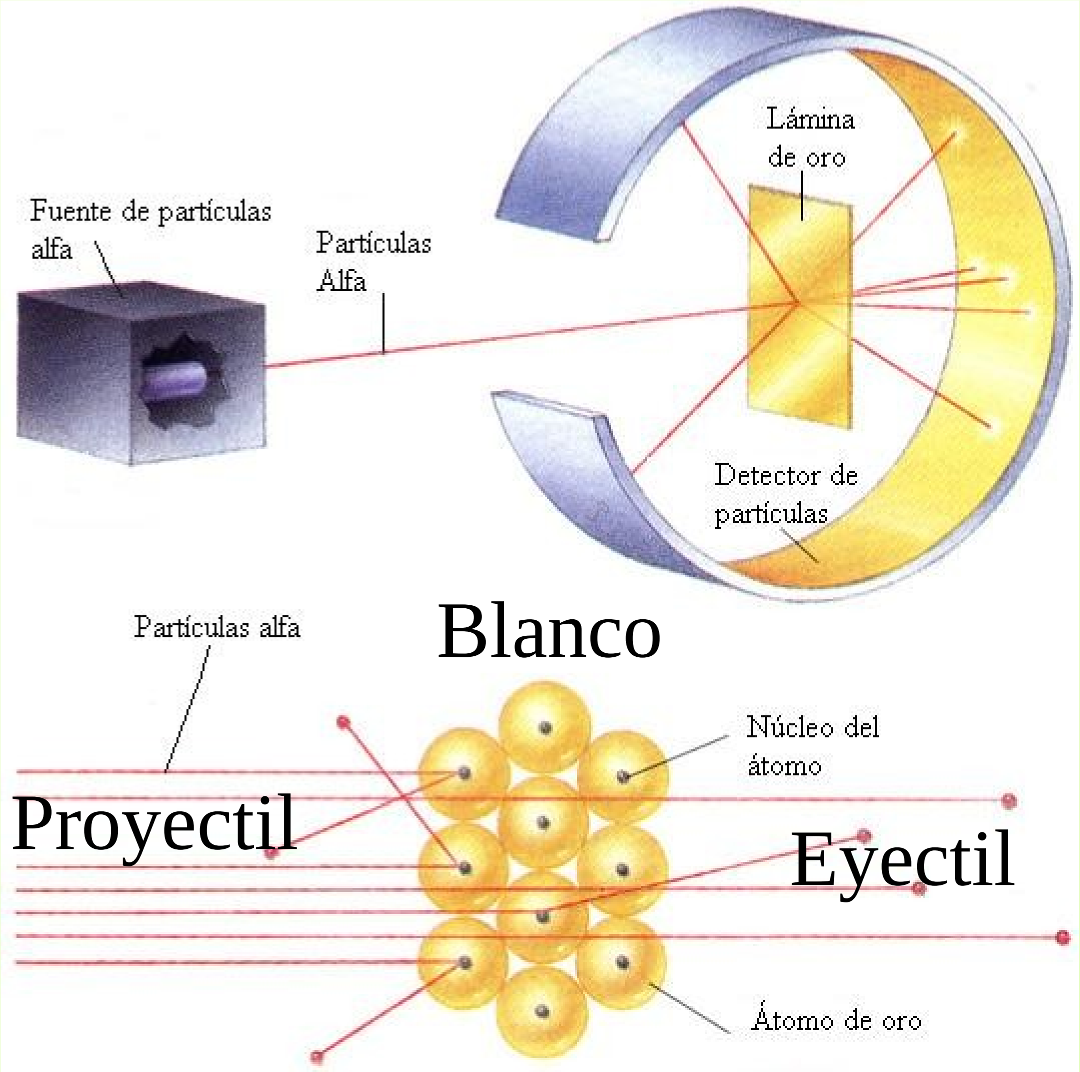
(volveremos más adelante)

Definición de reacción nuclear

$$a + X \rightarrow b + Y,$$

Proyectil   Blanco

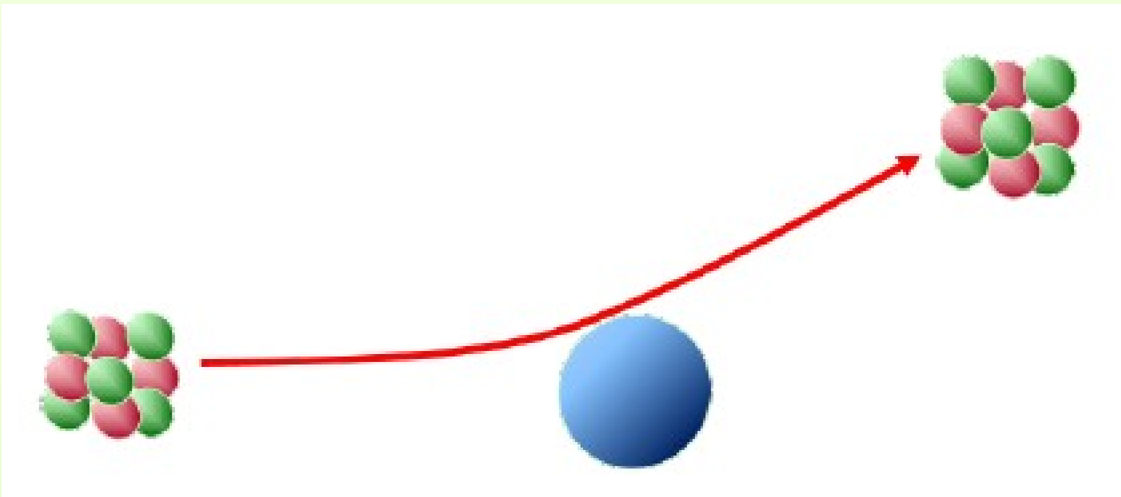
$$X(a,b)Y$$

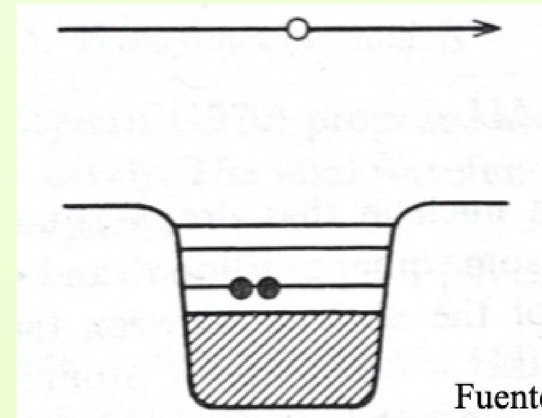


Dispersiones sin intercambio de masas

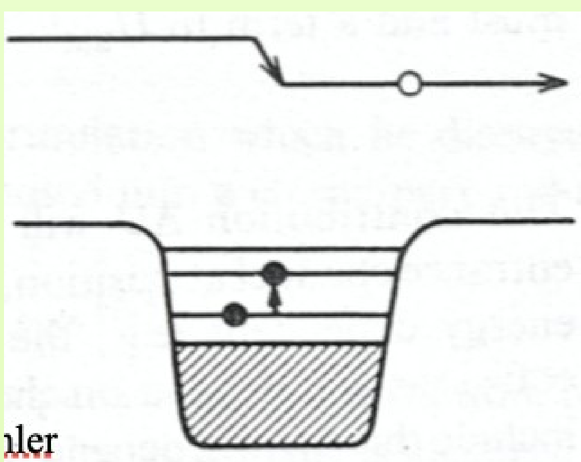
$$a + X \rightarrow a + X$$

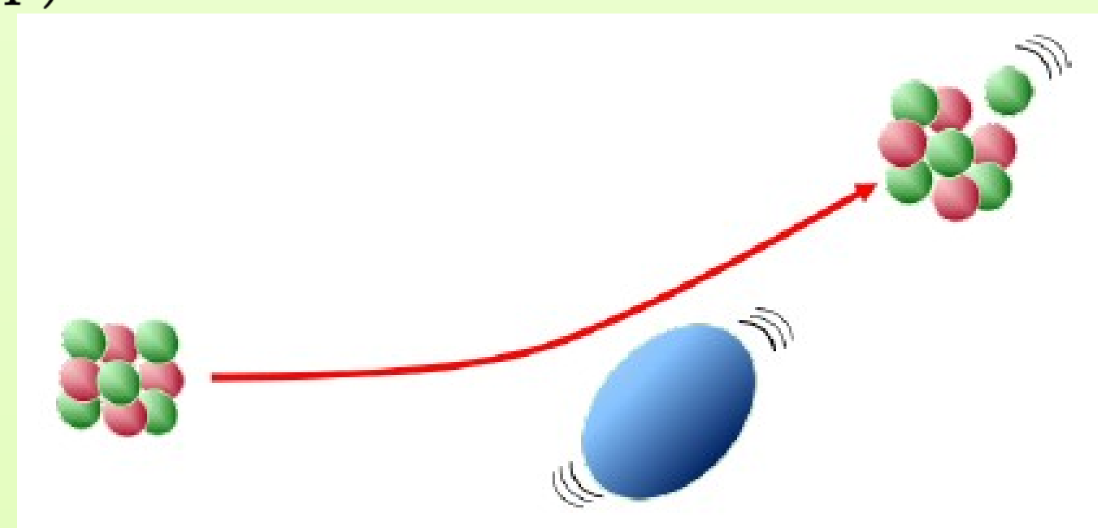
Dispersión elástica $^{40}\mathrm{Ca(p,p)}^{40}\mathrm{Ca}$





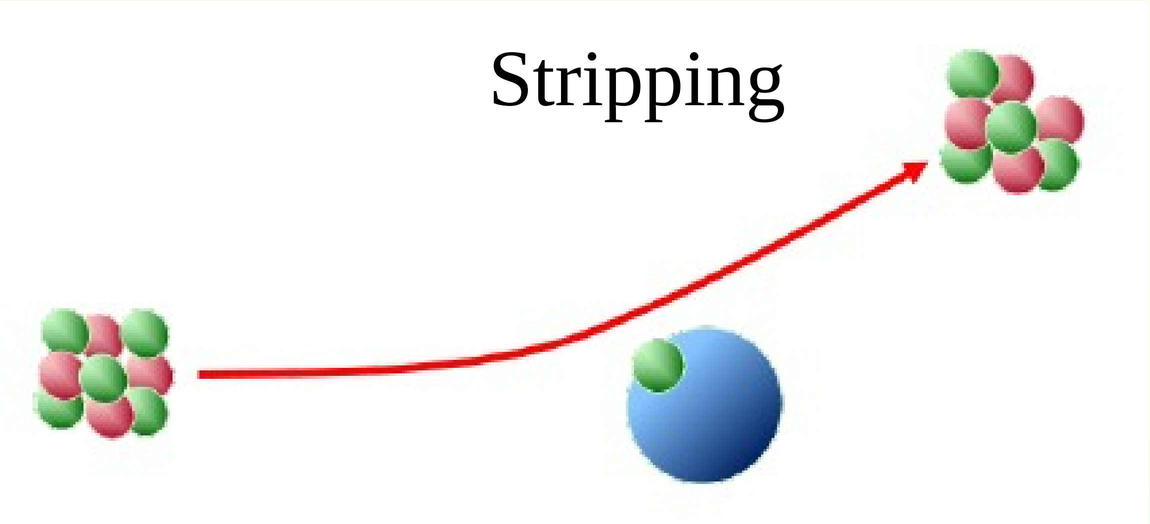
Dispersión inelástica $^{40}\mathrm{Ca(p,p)}^{40}\mathrm{Ca}^{*}$

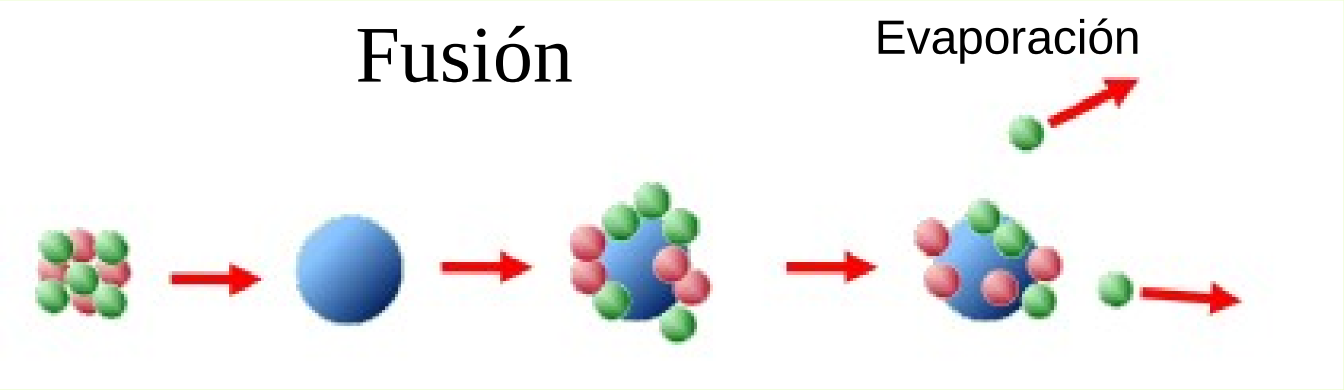




Reacciones
(Dispersión con intercambio de masas)

$$a + X \rightarrow b + Y$$





Ejemplos: transferencia de partícula y carga

$$a + X \rightarrow b + Y$$

Dispersión de stripping $d +^{16} O \rightarrow p +^{17} O.$

Dispersión de captura $^3He +^{17} O \rightarrow^4 He +^{16} O.$

Dispersión de intercambio de carga $^{40}\mathrm{Ca(p,n)}^{40}\mathrm{Sc}$

Ejemplo: fusión total $a + X \rightarrow Y$

Dispersión de fusión $^{208}Pb +^{70} Zn \rightarrow Cn$ (Compernicum).

Ejemplo: ruptura $a + X \rightarrow b + c + Y$

Dispersión de ruptura $d +^{48} Ca \rightarrow p + n +^{48} Ca$.

Definición de Q-value

Conservaciones en una reacción nuclear

$$a + X \to b + Y,\qquad X(a,b)Y$$

Proyectil   Blanco

Se conservan

$$Z_a + Z_X = Z_b + Z_Y$$

$$A_a + A_X = A_b + A_Y$$

Puede no conservarse la masa en reposo

$$m_a + m_X \neq m_b + m_Y$$

Q-value de una reacción nuclear

$$a + X \rightarrow b + Y, \qquad X(a,b)Y$$

Proyectil Blanco

Se conservan

$$Z_a + Z_X = Z_b + Z_Y$$

$$A_a + A_X = A_b + A_Y$$

Puede no conservarse la masa en reposo

$$m_a + m_X \neq m_b + m_Y$$

Definición de Q-value

$$Q = (m_i - m_f)c^2$$

$$Q = (m_a + m_X)c^2 - (m_b + m_Y)c^2$$

Reacciones exotérmica y endotérmica

Q value - Valor Q

$$Q = [m_{inicial} - m_{final}]c^2$$

Notar que la definición es con las masas nucleares, mientras la info experimental da las masas atómicas

$$m_a = M_{atomica} = m(A,Z) + Z m_e$$

Reacción exotérmica: Q > 0

Desintegración espontánea

Reacción endotérmica: Q < 0

Sistema ligado con energía negativa

Ejemplo:reacciones exotérmicas en decaimiento beta

Q value - Valor Q

$$Q=[m_{inicial}-m_{final}]c^2$$

Reacción exotérmica: Q > 0

La desintegración es posible

$$m_a=M_{atomica}=m(A,Z)+Z\,m_e$$

Decaimiento beta+

$$(A,Z)\rightarrow(A,Z-1)+e^+ +\nu_e$$

$$m_i=m(A,Z)=m_a(A,Z)-Z\,m_e$$

$$m_f=m(A,Z-1)+m_e$$
$$m_f=[m_a(A,Z-1)-(Z-1)m_e]+m_e$$

Decaimiento espontáneo

$$m_a(A,Z)>m_a(A,Z-1)+2m_e$$

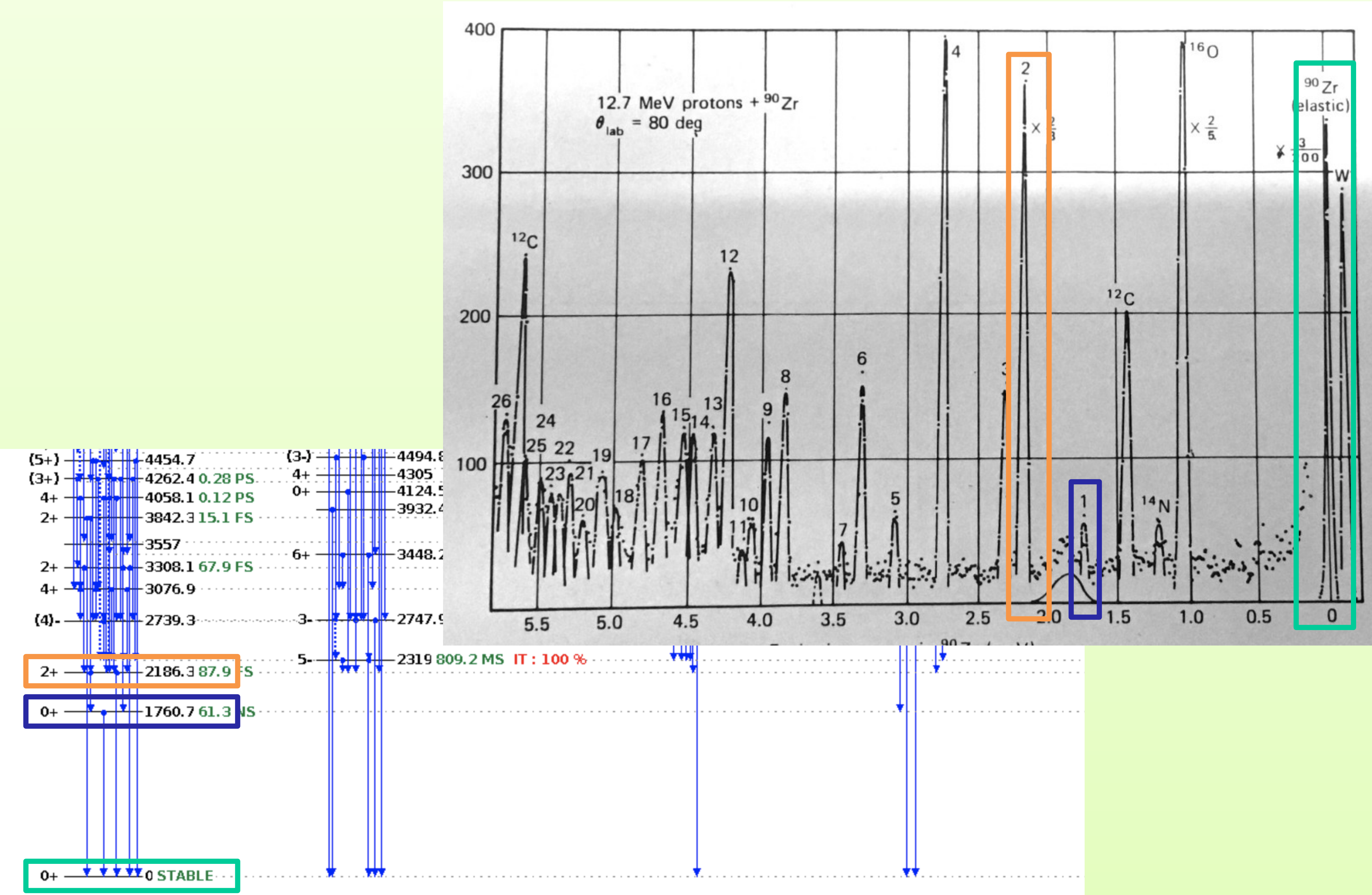
$${}^{77}_{36}Kr\rightarrow{}^{77}_{35}Br+e^+ +\nu_e+2.89\ MeV$$

$${}^{77}_{35}Br\rightarrow{}^{77}_{34}Se+e^+ +\nu_e+1.36\ MeV$$

(despreciamos la energía de ligadura de los electrones)

Sobre los niveles de energía y las mediciones experimentales

Determinación del espectro

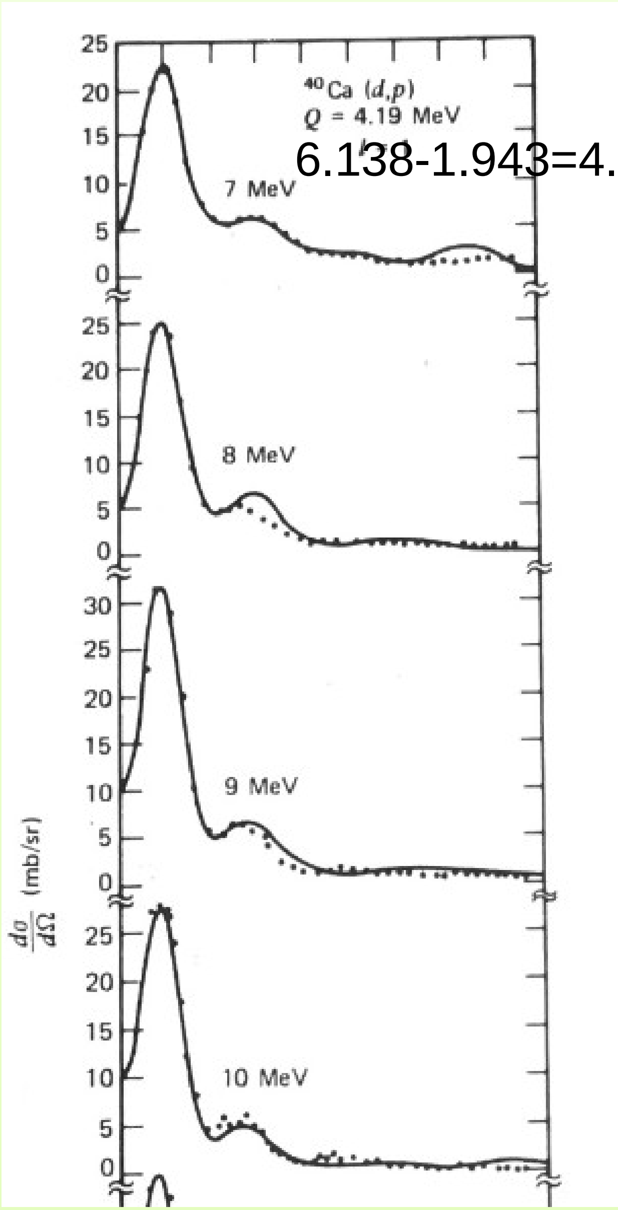


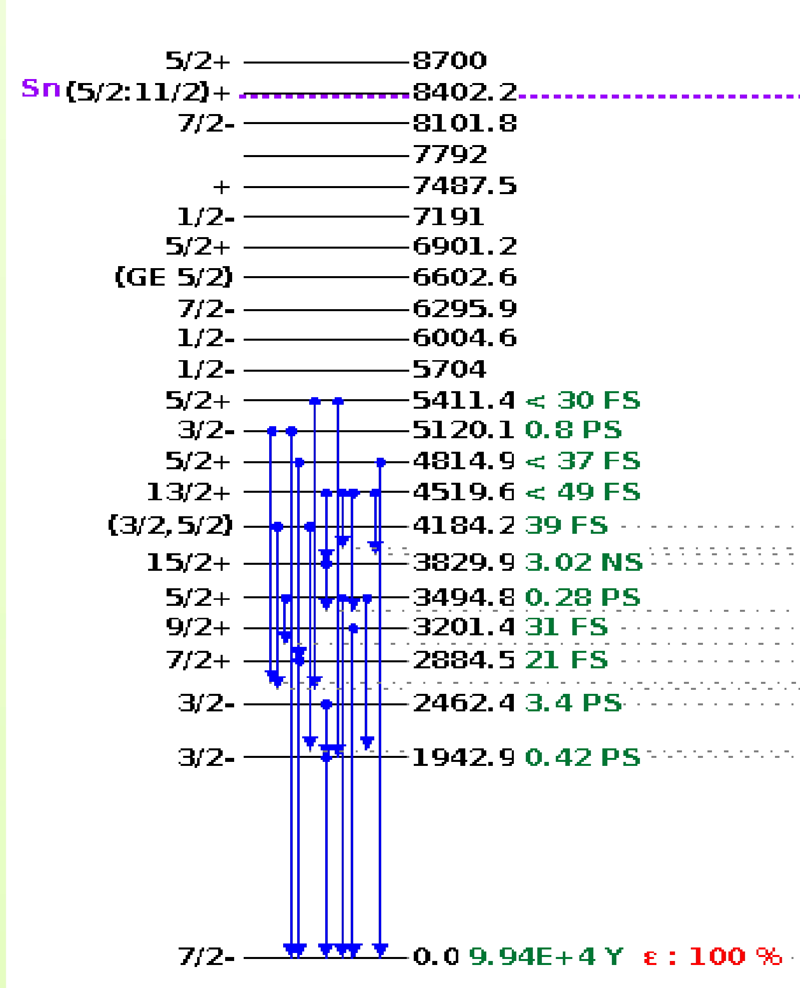
Ejemplo de sección eficaz: estados ligados

Sección eficaz que puebla los estados excitados del

E(level) (keV)	XREF	J^{π}(level)	
0.0	ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZabcdefghijklmn	7/2-	g
1942.88 *17*	CD FGHI M OPQRSTUVWXYZa efghi	3/2-	

6.138-1.943=4.195 MeV



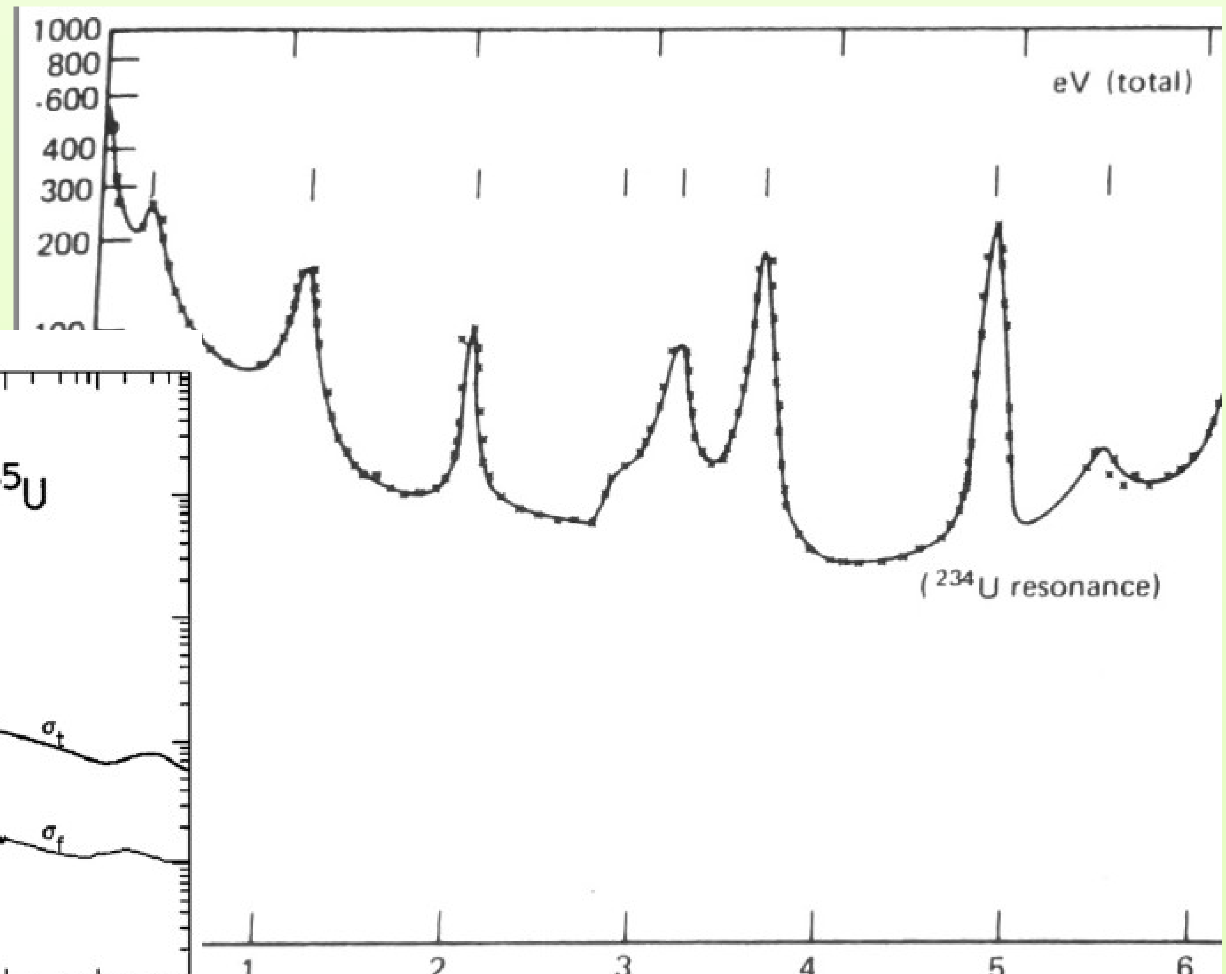


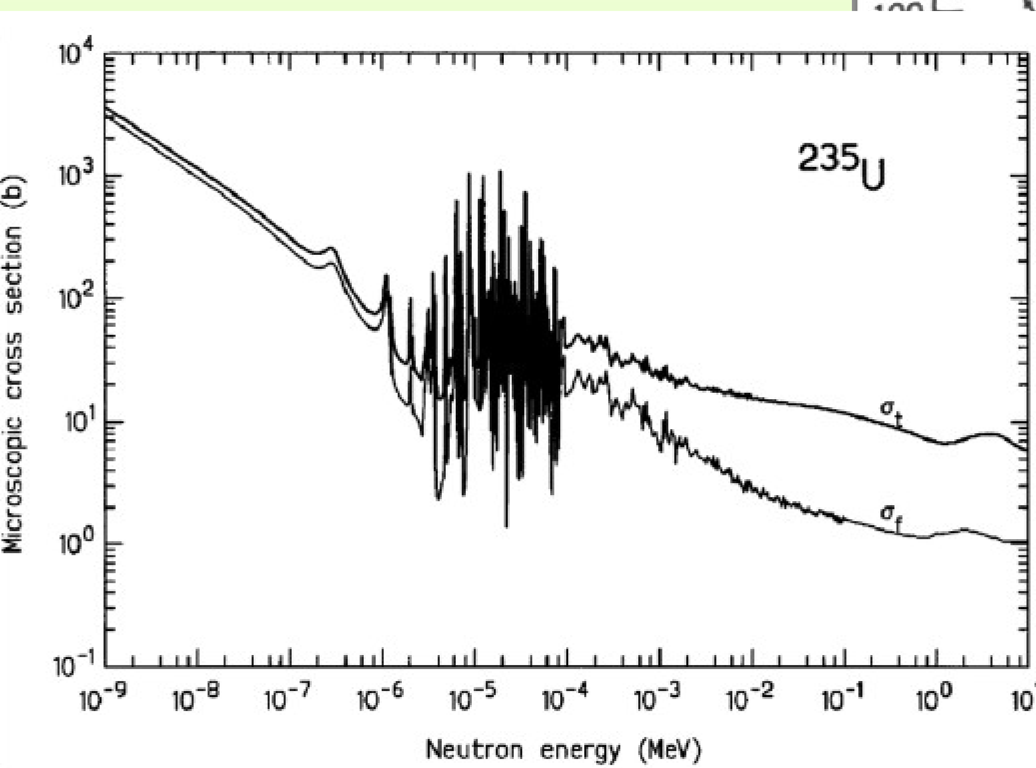
^{40}Ca + d

Reaction Products	Q-Value (keV)
^{41}Ca + p	6138.26 *14*

Ejemplo de sección eficaz: estados del continuo

Resonancias en isótopos del uranio





Distribución de masa y carga

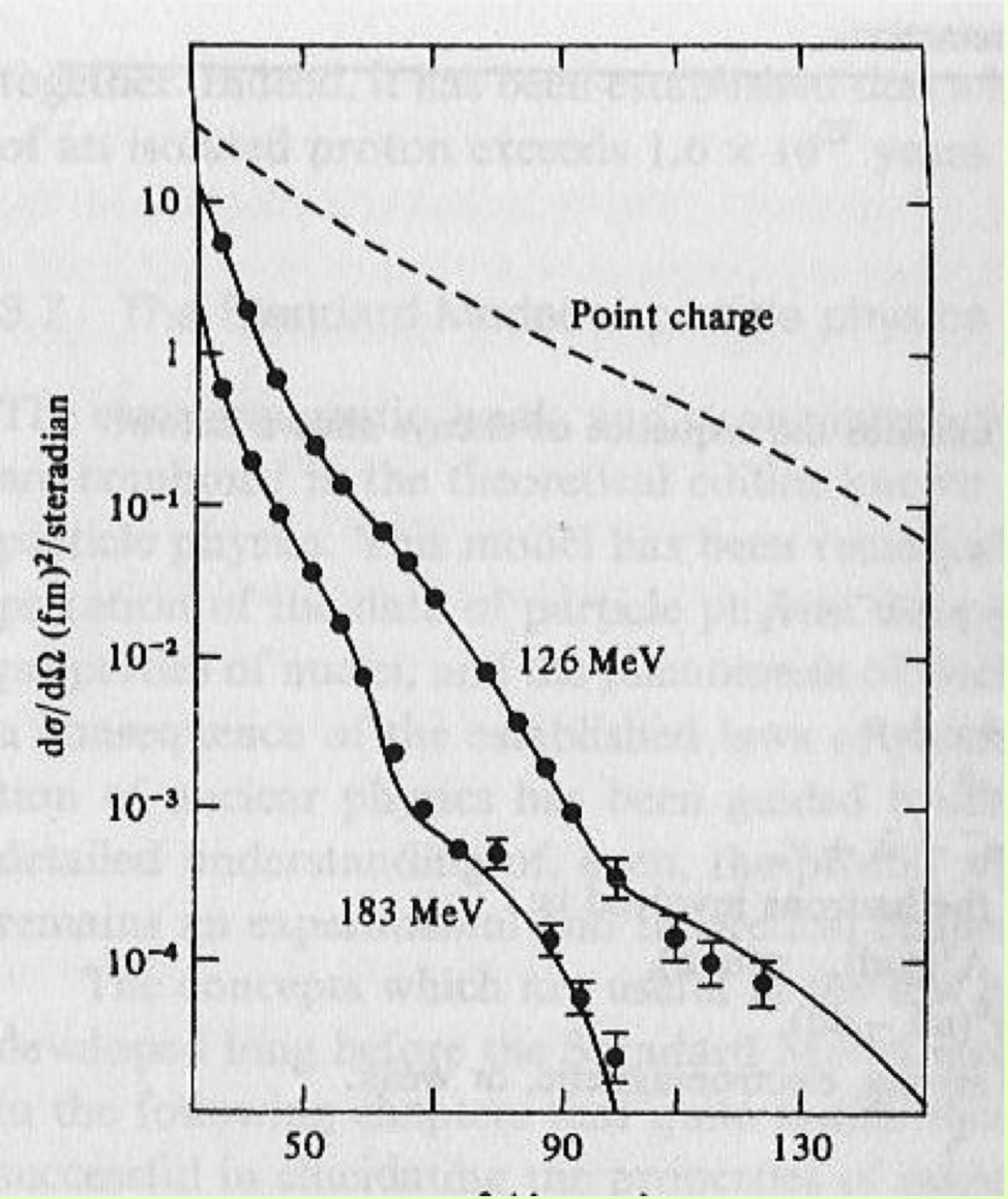
Distribución de carga

Sección eficaz

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{exp} = \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{Mott} |F(\boldsymbol{q}^2)^2|$$

Dispersión con electrones

$$\left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)_{Coul} \left[1 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

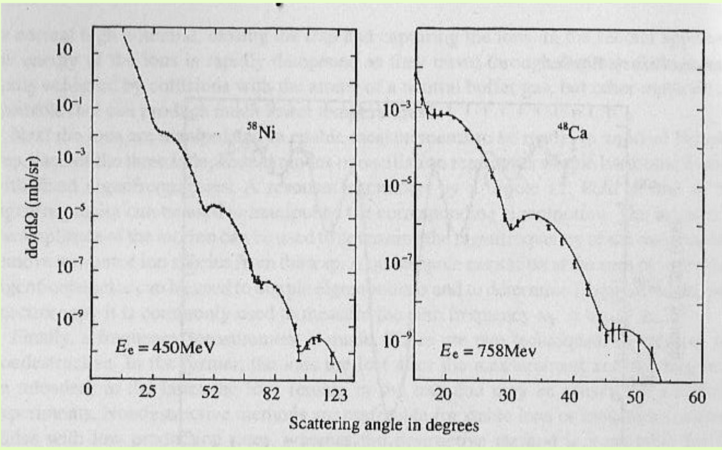


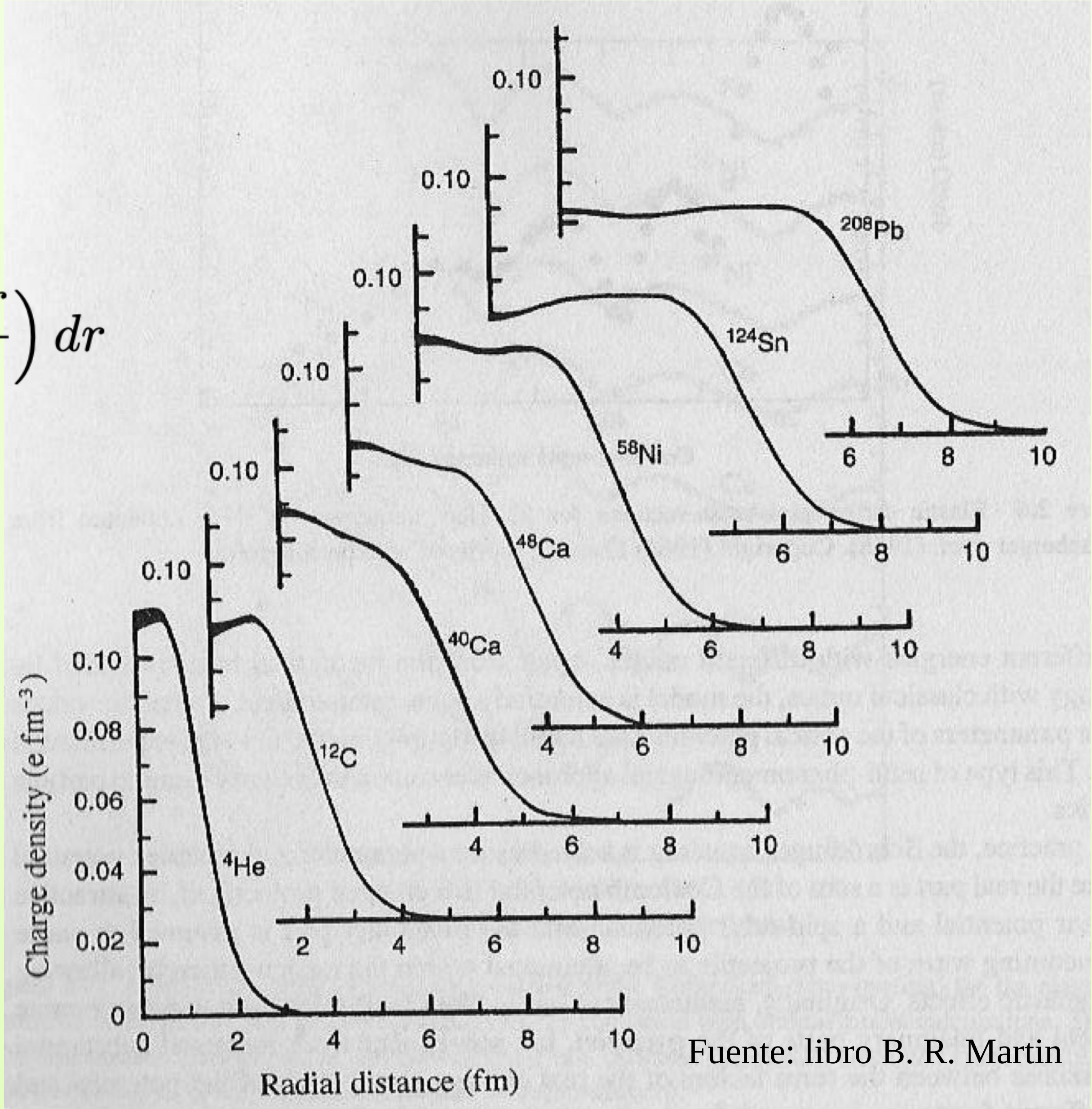
Distribución de carga

Factor de forma

$$F(q^2) = \frac{4\pi\hbar}{Zeq}\int r\,\rho(r)\,\sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right)dr$$

Densidad de carga





Fuente: libro B. R. Martin

Distribución de carga

Parametrización

$$\rho_{ch}(r) = \frac{\rho_{ch}^{0}}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}},$$

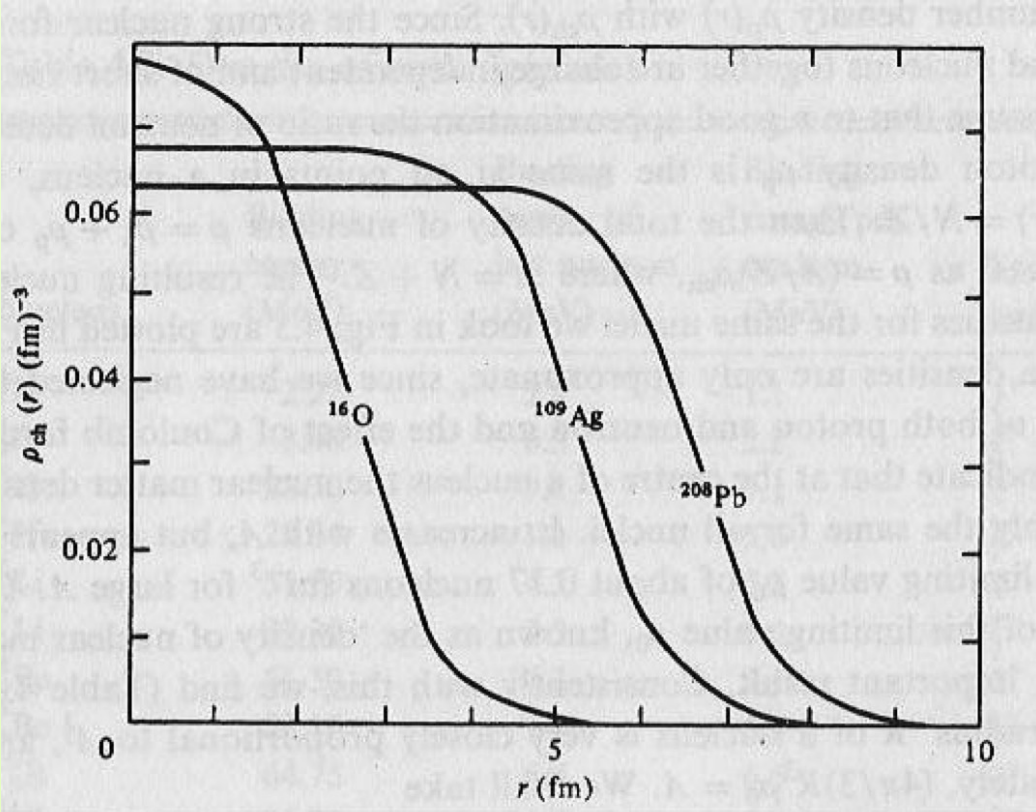
$$4\pi \int \rho_{ch}(r)\, r^2\, dr = Z$$

Fuente: libroW. N. Cottingham and D. A. Greenwood

Table 4.1. *Nuclear radii (R) and nuclear surface widths (a)*

Nucleus	R (fm)	a (fm)	$R/A^{\frac{1}{3}}$ (fm)
$^{16}_{8}O$	2.61	0.513	1.04
$^{109}_{47}Ag$	5.33	0.523	1.12
$^{208}_{82}Pb$	6.65	0.526	1.12

r_0



Distribución de nucleones

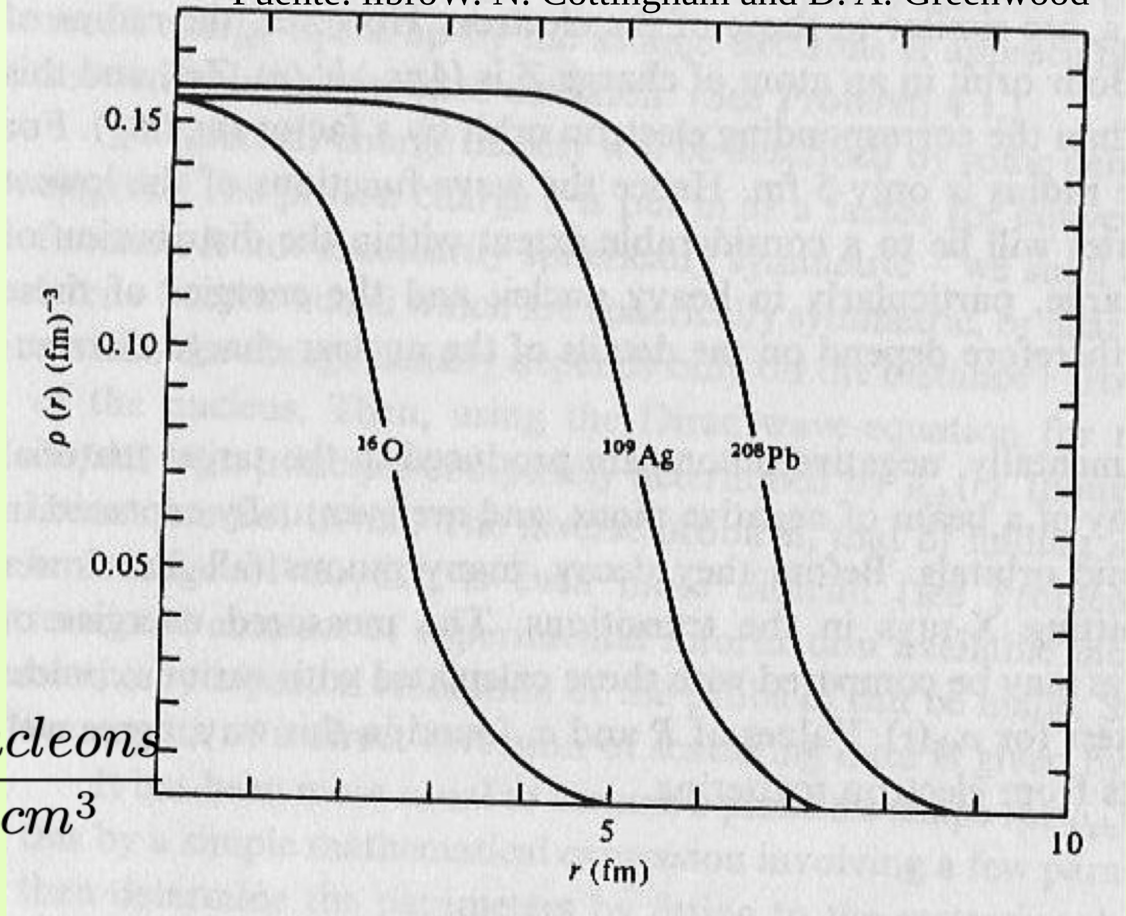
Densidad de número de protones

$$\rho_p(r) = \rho_{ch}(r)$$

Densidad de número de neutrones

$$\frac{\rho_n(r)}{\rho_p(r)} = \frac{N}{Z}$$

Fuente: libroW. N. Cottingham and D. A. Greenwood



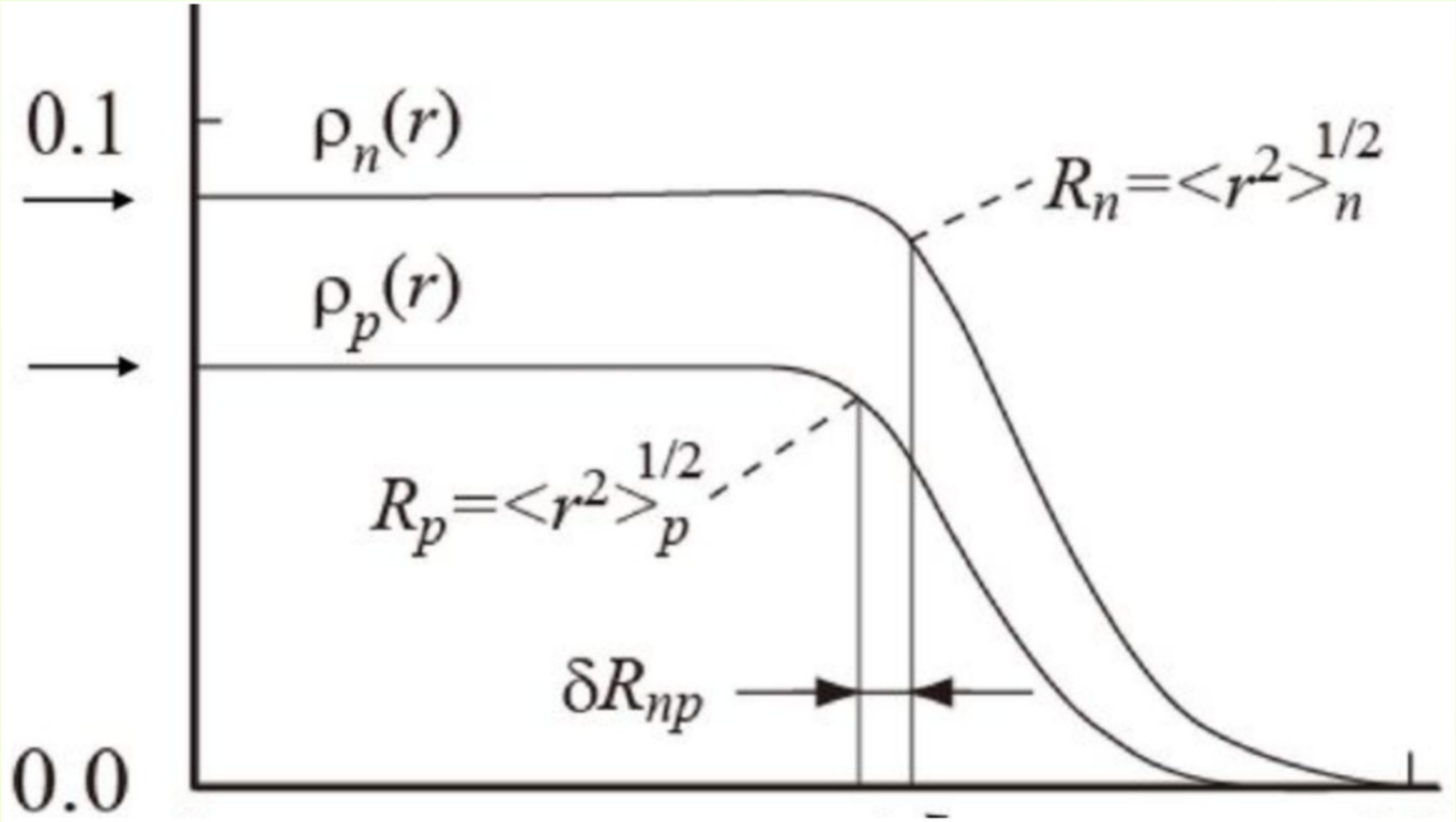
Densidad de número de neutrones

$$\rho = \frac{N}{Z}\rho_p + \rho_p$$

$$\rho = \frac{A}{Z}\rho_{ch}$$

$$\rho_0 \cong 0.17\,\frac{nucleons}{fm^3} = 1.7\times 10^{38}\,\frac{nucleons}{cm^3}$$

Piel de neutrones

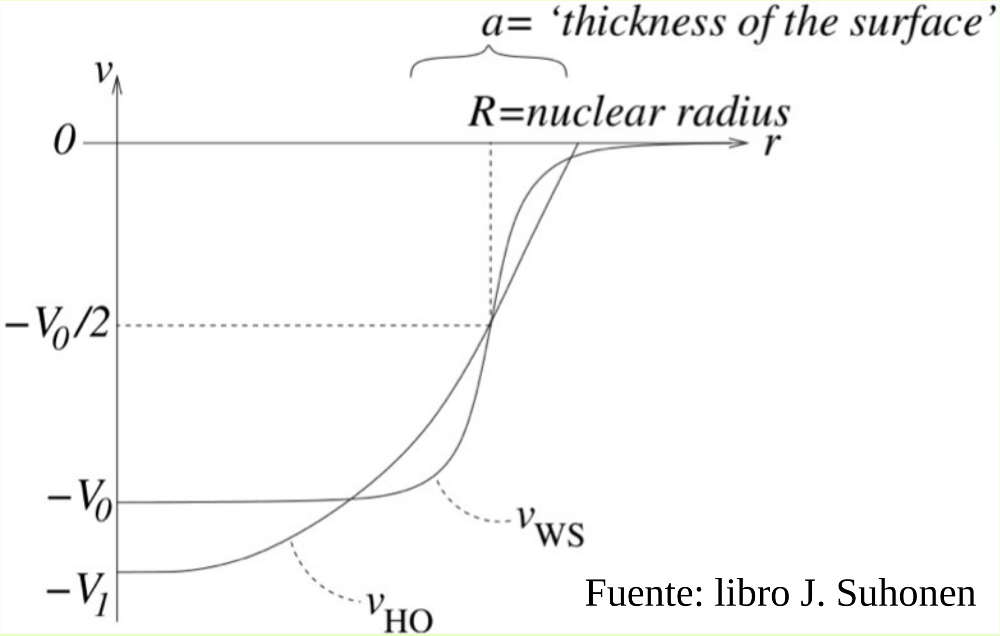


Crédito: Atsushi Tamiil. Osaka U. (2013)

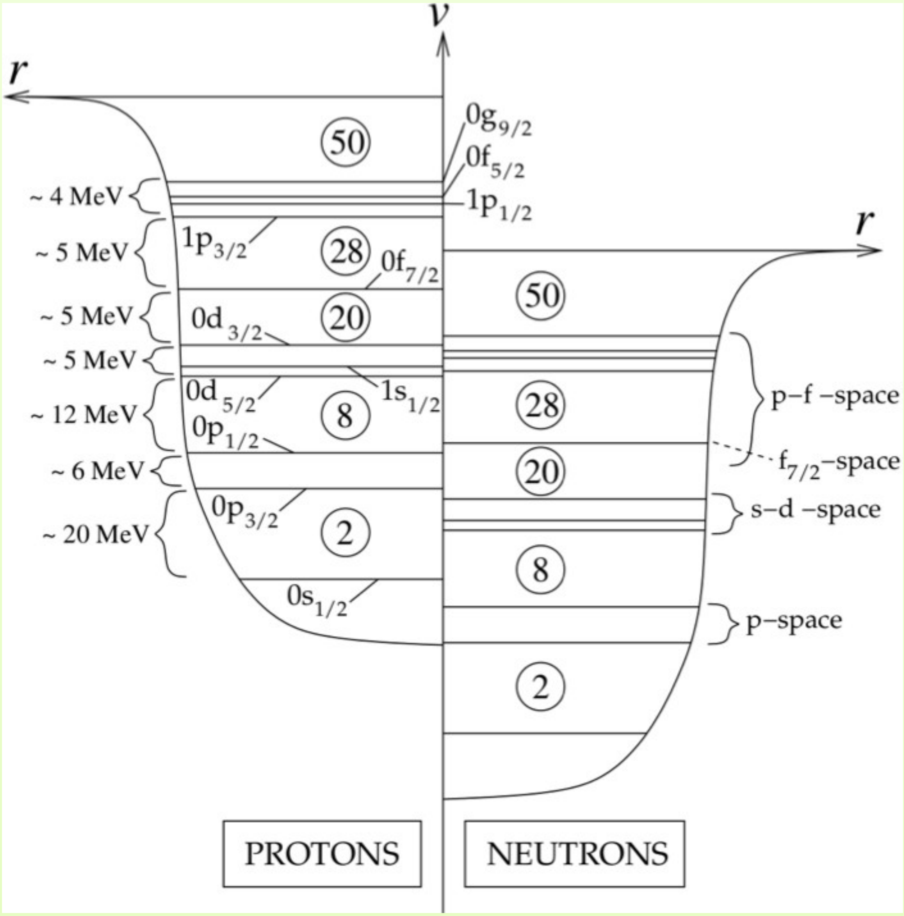
Campos medio usuales

Woods-Saxon

$$V(r) \sim \rho(r) \rightarrow V(r) = \frac{-V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$$



Fuente: libro J. Suhonen



Oscilador armónico

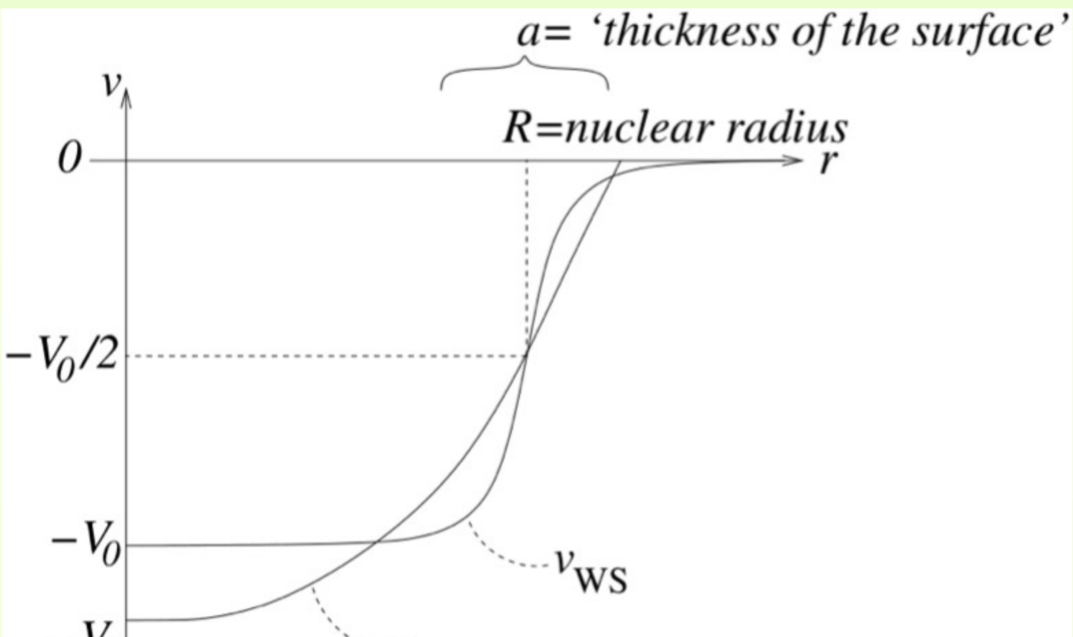
$$V(r) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$$

Interacción de un nucleón con un núcleo

Woods-Saxon

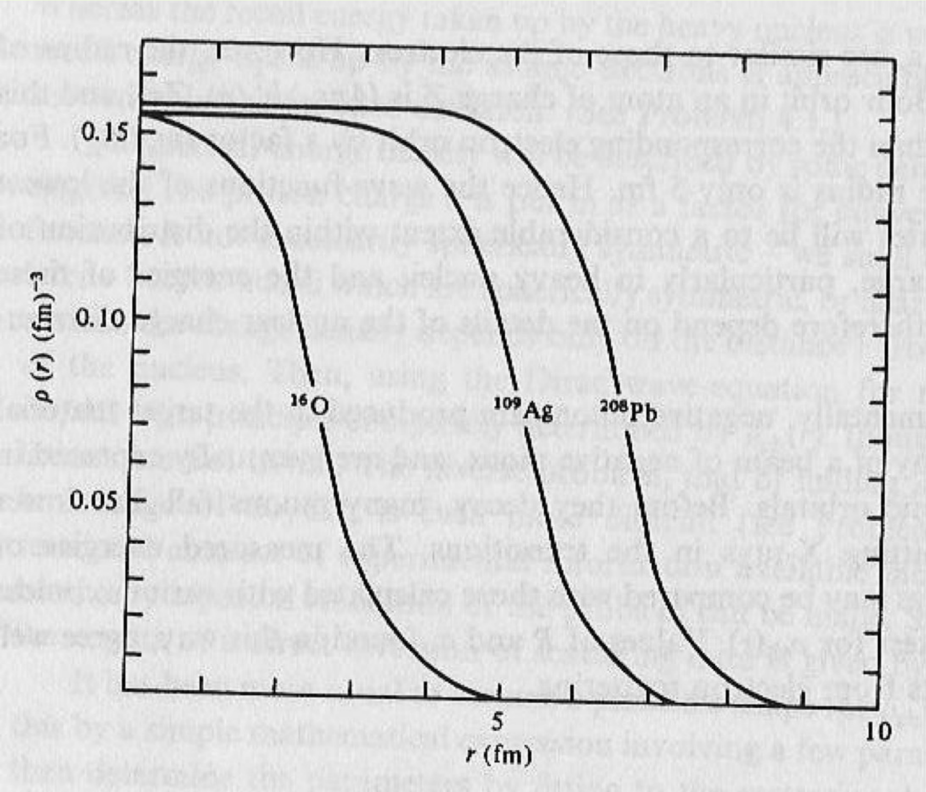
$$V(r) \sim \rho(r) \rightarrow V(r) = \frac{-V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$\boxed{R = r_0 A^{1/3}}$$

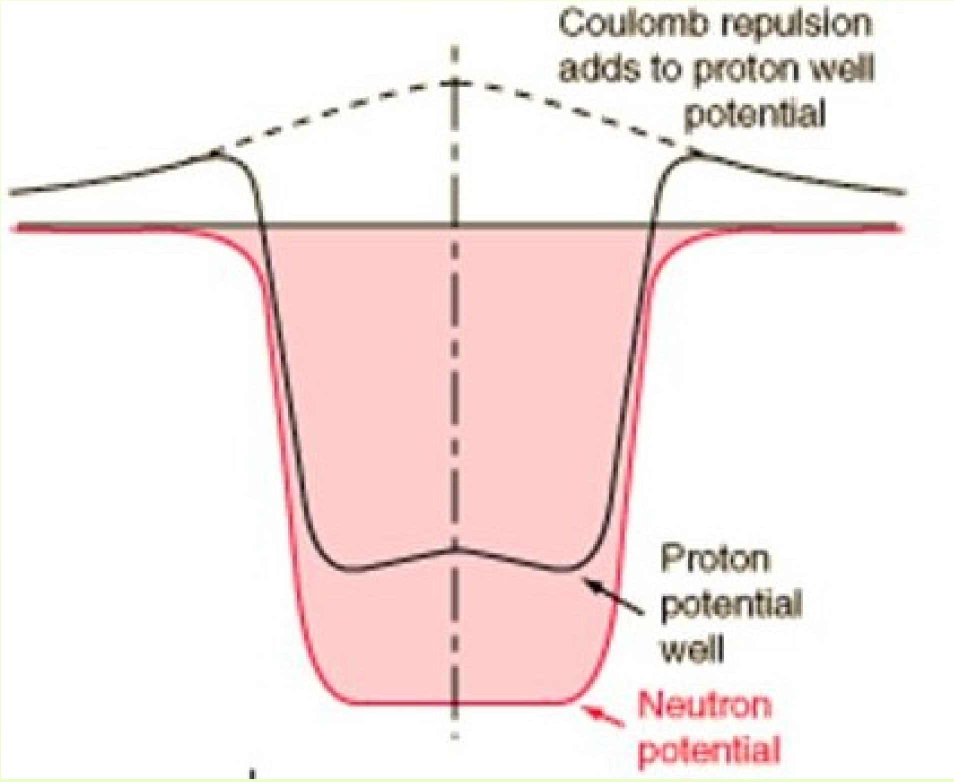


Fuente: libro J. Suhonen

Densidad de materia



Potencial de Coulomb



Distribución uniforme

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{2R_c}\left(3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right) \quad r < R_c$$

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{r} \quad r > R_c$$

Distribución gaussiana

$$V_C(r) = Ze^2 \frac{\mathrm{Erf}(r/\alpha)}{r}$$

Potencial de Coulomb: deducción

Distribución uniforme

$$\rho = \frac{Ze}{V} = \frac{Ze}{\frac{4\pi R_c^3}{3}}$$

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr'$$

$$E(r > R_c) = \frac{\frac{4\pi R_c^3}{3}\rho}{r^2} = \frac{Ze^2}{r^2}$$

$$E(r < R_c) = \frac{\frac{4\pi r^3}{3}\rho}{r^2} = \frac{\frac{4\pi r^3 R_c^3}{3R_c^3}\rho}{r^2} = \frac{Ze^2 r}{R_c^3}$$

$$V(r < R_c) = -\int_{\infty}^{r} E(r')dr' = -\int_{\infty}^{R_c} E(r')dr' - \int_{R_c}^{r} E(r')dr'$$

Potencial de Coulomb: deducción

Distribución uniforme

$$V(r<R_c) = -\int_\infty^r E(r')dr' = -\int_\infty^{R_c} E(r')dr' - \int_{R_c}^r E(r')dr'$$

$$E(r>R_c) = \frac{\frac{4\pi R_c^3}{3}\rho}{r^2} = \frac{Ze^2}{r^2}$$

$$E(r<R_c) = \frac{Ze^2}{R_c^3}r$$

$$\begin{aligned} V(r<R_c) &= -\int_\infty^r E(r')dr' = -\int_\infty^{R_c} E(r')dr' - \int_{R_c}^r E(r')dr' \\ &= -\int_\infty^{R_c} \frac{Ze^2}{r^2}dr' - \int_{R_c}^r \frac{Ze^2 r}{R_c^3}dr' \\ &= \frac{Ze^2}{R_c} - \frac{Ze^2}{2R_c^3}(r^2 - R_c^2) \\ &= \frac{3}{2}\frac{Ze^2}{R_c} - \frac{Ze^2 r}{2R_c^3}r^2 \end{aligned}$$

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{2R_c}\left(3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right)$$

$$r > R_c$$

$$V(r>R_c) = -\int_\infty^r E(r')dr' = -\int_\infty^r \frac{Ze^2}{r'^2}dr' = \frac{Ze^2}{r}$$

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{r} \qquad r > R_c$$

Curiosidades:
Sobre la analiticidad de los potenciales

Sobre la aplicación del complex scaling a los dos potenciales

$$r \to r\, e^{i\theta}$$

$$h(r) \to h(r\, e^{i\theta})$$

$$V_{coul}\, es\, discontinua\, para\, \theta \neq 0$$

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{2R_c}\left(3 - \frac{r^2}{R_c^2}\right)$$

Densidad **uniforme**

$$V_{coul} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{1}{r}$$

$$V_C\, es\, continua\, para\, \theta \neq 0$$

$$V_C(r) = Ze^2 \frac{\mathrm{Erf}(r/\alpha)}{r}$$

Densidad **gaussian**

Sobre la analiticidad de Woods-Saxon

$$\theta < \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{R/a}\right)$$

Veamos...

$$V_{WS} = \frac{-V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

$$1 + e^{\frac{r-R}{a}} = 0$$

$$\frac{r-R}{a} = \ln(-1) = \ln|-1| + i(arg(-1) + n\pi) = i(\pi + n\pi)$$

$$singularidad\,(n=0)\, en\, r = R + i\pi\, a \to \tan(\theta) < \frac{\pi a}{R}$$

Sugerencia:
Graficar V con r complejos y visualizar las singularidades

Relación entre el radio R y el radio cuadrático medio

Densidad constante

$$\psi(r) = \begin{cases} \left(\frac{3}{4\pi R^3}\right)^{1/2} & 0 < r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

$$\int_0^R cte^2 \, d\bar{r} = 4\pi cte^2 \int_0^R r^2 dr$$

$$.= 4\pi cte^2 R^3/3 = 1$$

Root-mean-square radius

$$\begin{aligned} r_{rms}^2 &= \langle r^2 \rangle = \int \psi^*(r) r^2 \psi(r) d\bar{r} \\ &= 4\pi \int_0^R \psi^*(r) r^2 \psi(r) r^2 dr = 4\pi \frac{3}{4\pi R^3} \frac{R^5}{5} \end{aligned}$$

$$\boxed{r_{rms} = \sqrt{\frac{3}{5}} R}$$

Otras relaciones entre el radio R y el radio cuadrático medio

Densidad de Fermi

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

Con:

$$\rho_0 = \frac{3A}{4\pi R^3}\left[1 + \left(\frac{\pi a}{R}\right)^2 + 6\left(\frac{a}{R}\right)^3 e^{-R/r} + \cdots\right]$$

$$r^2_{rms} = \langle r^2 \rangle = \int \psi^*(r) r^2 \psi(r) d\bar{r}$$

$$\rho(r) = \psi*(r)\,\psi(r)$$

$$\boxed{r_{rms} \approx \left[\frac{3}{5}\left(R^2 + \frac{7}{3}\pi^2 a^2\right)\right]^{1/2}}$$

$$\frac{7}{3}\pi^2 a^2 \approx 9.72 \sim 10$$

$$a = 0.65\, fm$$

Densidad de Gaussiana

$$\rho(r) = \rho_0\, e^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

Con:

$$\rho_0 = \frac{A}{\pi^{3/2} R^3}$$

$$\boxed{r_{rms} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, R}$$

Densidad cte

$$\boxed{r_{rms} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, R}$$

Fin