

Introducción a la Física Nuclear 2023

Rodolfo M. Id Betan (Rolo)

idbetan@ifir-conicet.gov.ar

Edificio Ifir, Of. 235 (Esmeralda y Ocampo)

Tel. 4853200 Int. 486

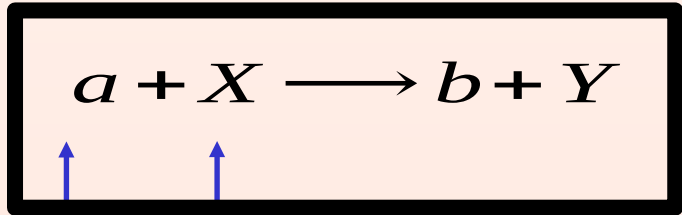
Teoría de dispersión

Contenido:

Separación centro de masa. Canales de reacción. Sección eficaz experimental. Condición de contorno. Amplitud de dispersión. Densidad de corriente. Sección eficaz teórica. Solución de la ecuación de Schroedinger del movimiento relativo con condición de contorno de scattering. Expansión en ondas parciales. Cambio de fase. Matriz de dispersión. Expansión amplitud de dispersión en ondas parciales. Sección eficaz diferencial y total. Ejemplo. Sección eficaz de absorción. Potencial óptico. Sección eficaz total. Teorema óptico.

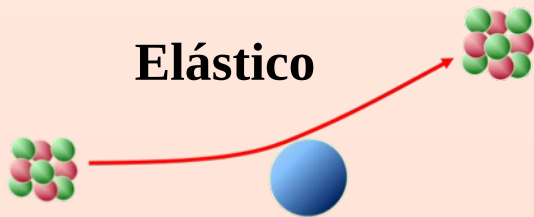
Definiciones

Reacciones nucleares

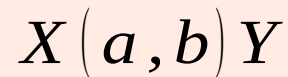
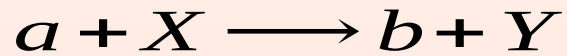


Proyectil

Blanco



Reacciones nucleares



Se conservan

$$Z_a + Z_X = Z_b + Z_Y$$

$$A_a + A_X = A_b + A_Y$$

No se conserva

$$m_a + m_X \neq m_b + m_Y$$

Q value - Valor Q

$$Q = [(m_a + m_X) - (m_b + m_Y)]c^2$$

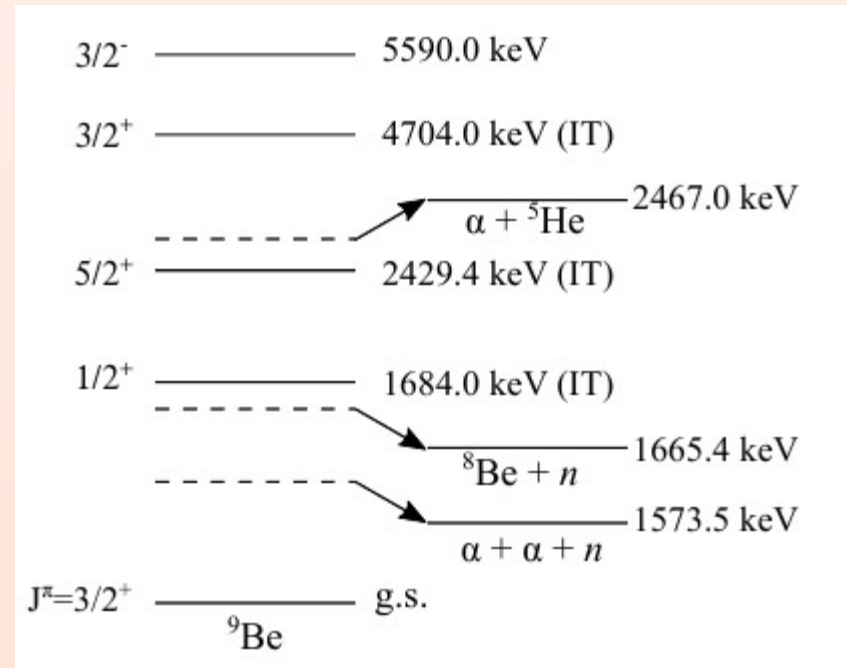
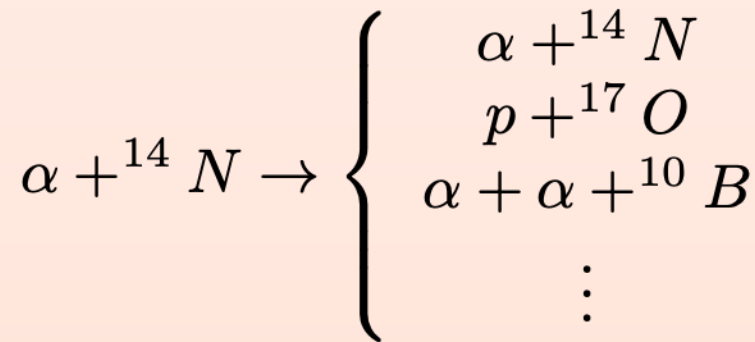
Algunas Clasificaciones

Reacción	Ejemplo	Comentarios
Elástica $A(a, a)A$	$^{208}\text{Pb}(n, n)^{208}\text{Pb}$	Da información de interacciones efectivas, radios y densidad
Inelástica $A(a, a')A^*$	$^{90}\text{Zr}(\alpha, \alpha')^{90}\text{Zr}$	Da información de transiciones electromagnéticas y deformaciones
Intercambio de carga $A(a, c)C$	$^{14}_6\text{C}(p, n)^{14}_7\text{N}$	Estudia el decaimiento beta y la interacción débil
Captura $A(a, \gamma)C$	$^{16}_8\text{O}_8(\alpha, \gamma)^{20}_{10}\text{Ne}_{10}$	Da información de los parámetros de las resonancias
Ruptura $A(a, bc)C$	$d + ^{90}\text{Zr} \rightarrow ^{90}\text{Zr}^* + p + n$	Da información de estados ligados

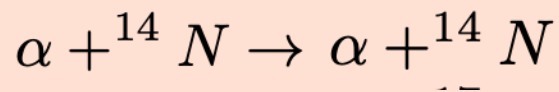
Sobre los canales de reacción

Definición de canales

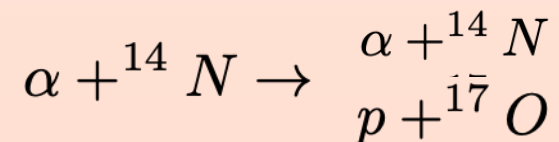
Canales salida



Tratamiento de canal simple



Tratamiento de canales acoplados

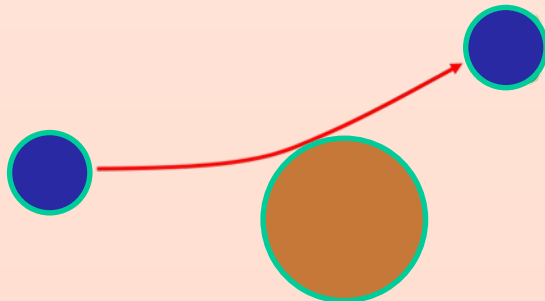


Modelo Potential dispersión

Canales

$$\alpha +^{14} N \rightarrow \begin{cases} \alpha +^{14} N \\ p +^{14} O \\ \alpha +^{10} B \\ \vdots \end{cases}$$

Dispersión de dos cuerpos



Canal Elástico

$$\alpha +^{14} N \rightarrow \alpha +^{14} N$$

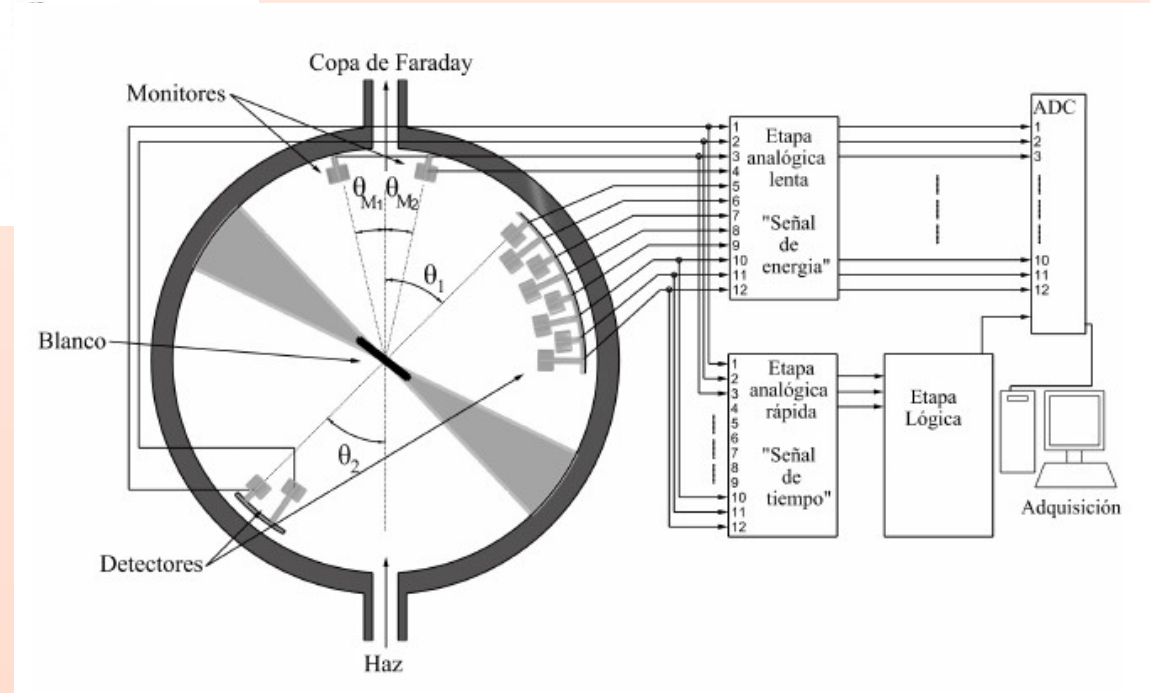
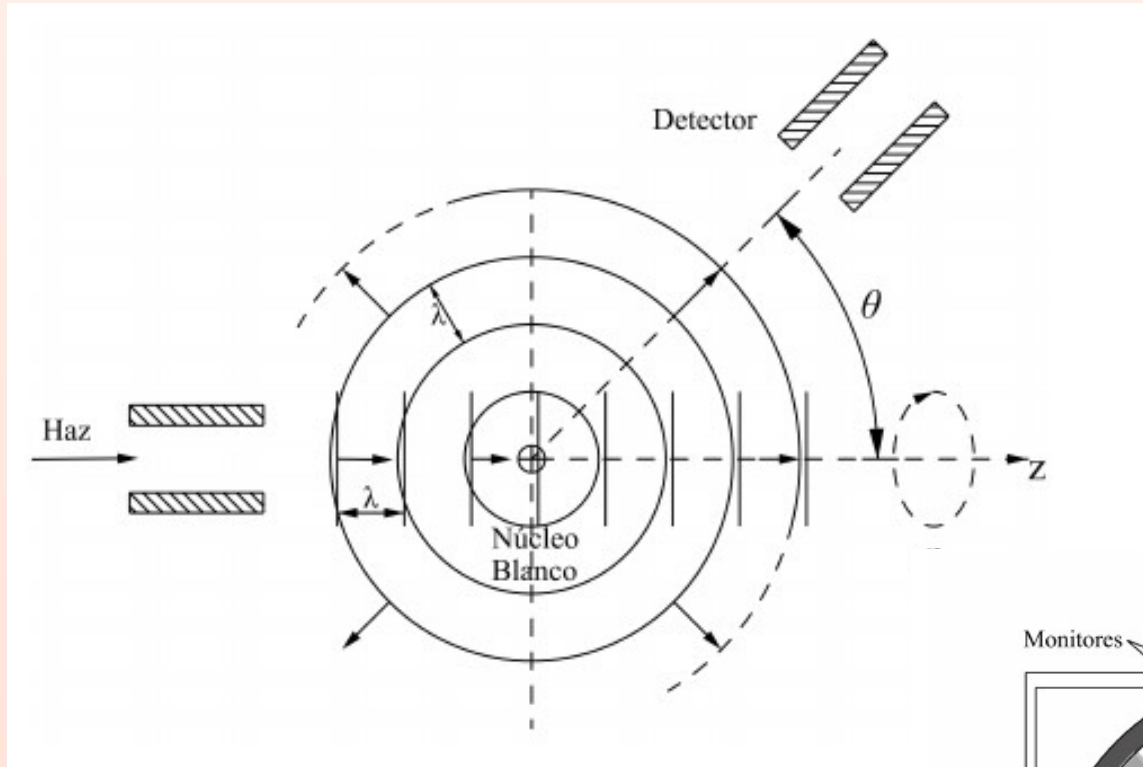
Tratamiento de canales acoplados

$$\alpha +^{14} N \rightarrow \begin{cases} \alpha +^{14} N \\ \alpha +^{17} O \end{cases}$$

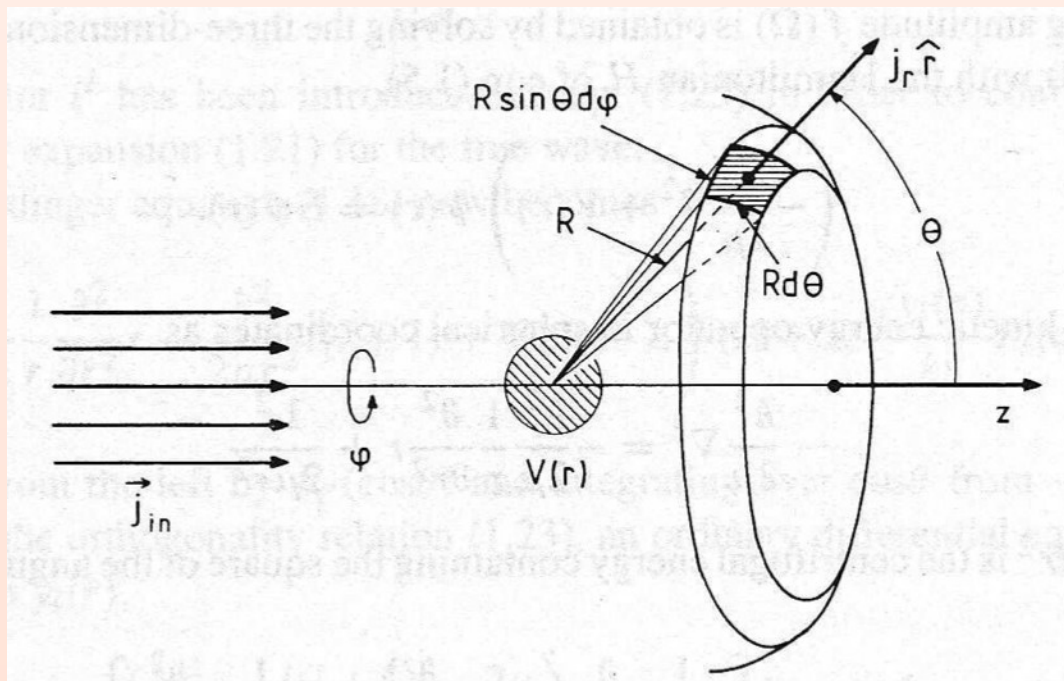
...sobre el potencial óptico...

Definición de sección eficaz

Esquema experimental



Esquema teórico



Crédito: P. Frobrich and R. Lipperheide. Theory of Nuclear Reactions

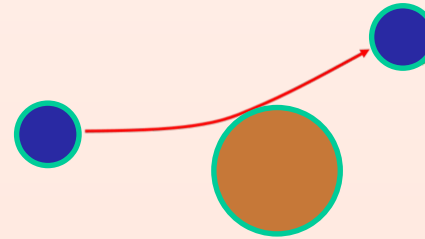
$$d\sigma = \frac{\text{corriente saliente en } d\Omega}{\text{corriente incidente}}$$

Separación centro de masa

Separación del Hamiltoniano

Hamiltoniano del sistema

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(r)$$



Coordenadas centro de masa

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

$$\mathbf{p} = \frac{m_2 \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{p}_2}{m_1 + m_2}$$

Hamiltoniano separable

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + h(\mathbf{r})$$

Masa Total

$$M = m_1 + m_2$$

Hamiltoniano relativo

$$h(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r)$$

Masa Reducida

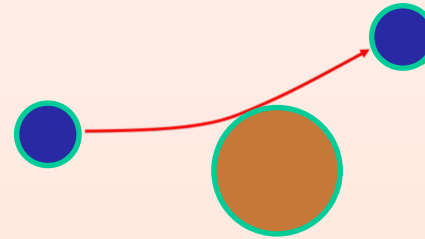
$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Solución separable

Hamiltoniano del sistema

$$H = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{r})$$

$$H = \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V(\mathbf{r})$$



$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}\psi(\mathbf{r})$$

Movimiento del centro de masa

$$\frac{P^2}{2M} \rightarrow e^{i\mathbf{K}\mathbf{R}}$$

Movimiento relativo

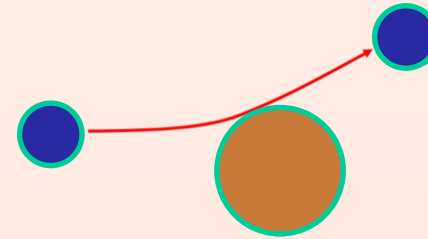
$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Amplitud de dispersión

Amplitud de Dispersión

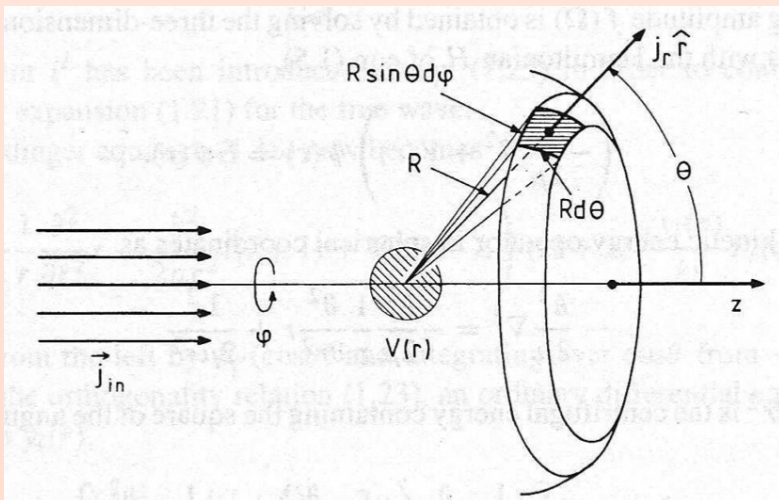
Comportamiento asintótico

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$



$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Conexión con el experimento



Amplitud de dispersión

Sección eficaz

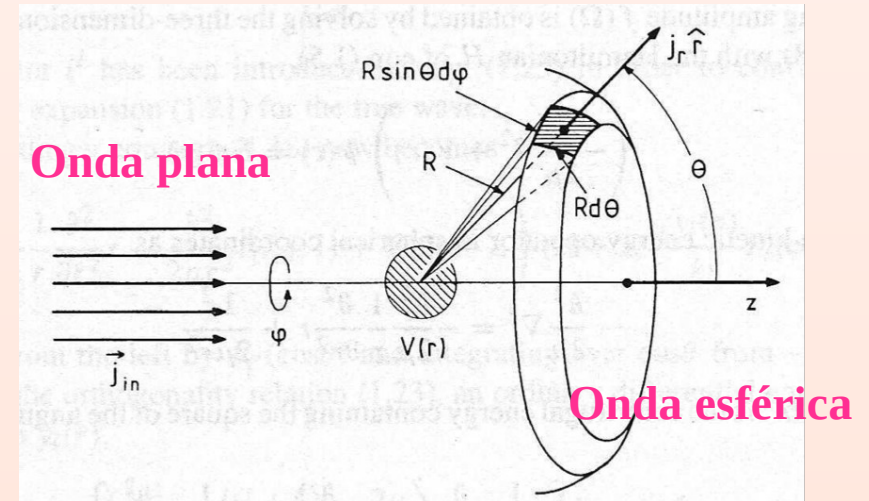
$$d\sigma = \frac{\text{corriente saliente en } d\Omega}{\text{corriente incidente}}$$

Condición de contorno

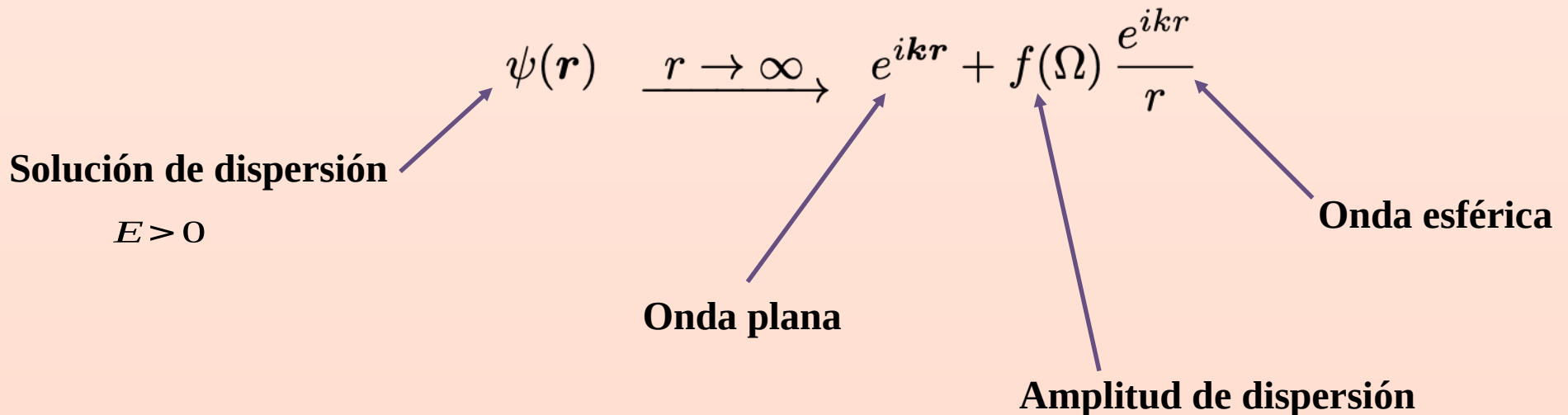
Movimiento relativo

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Autoenergía del continuo



Comportamiento asintótico



Densidad de corriente

Densidad de corriente

Hamiltoniano

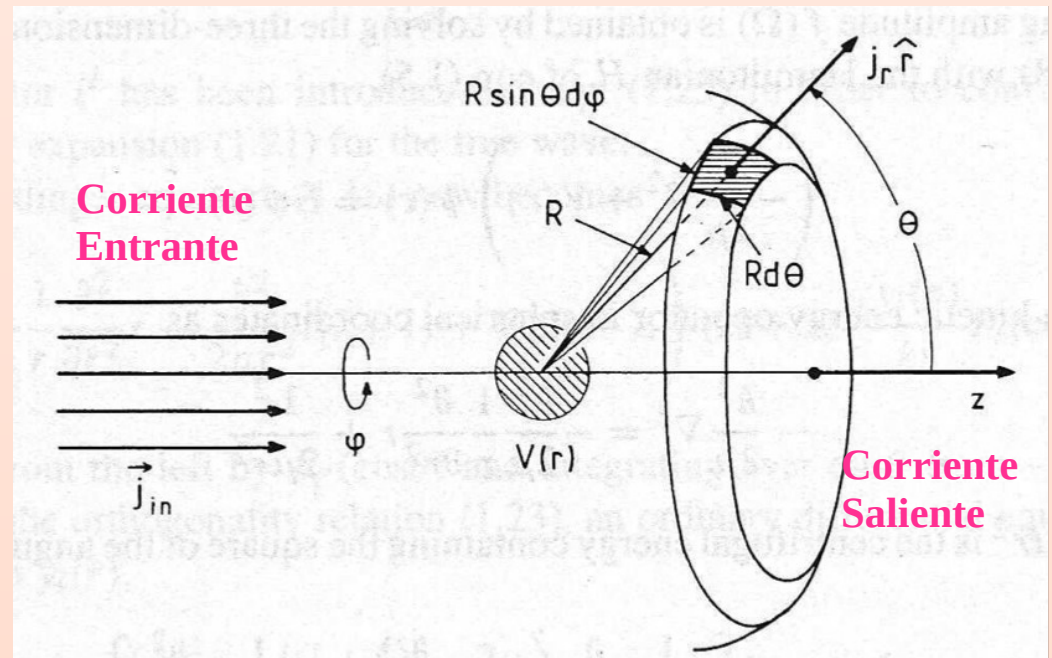
$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Condición de contorno

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Densidad de probabilidad de corriente

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$



Densidad de corriente

Función de onda

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Corriente

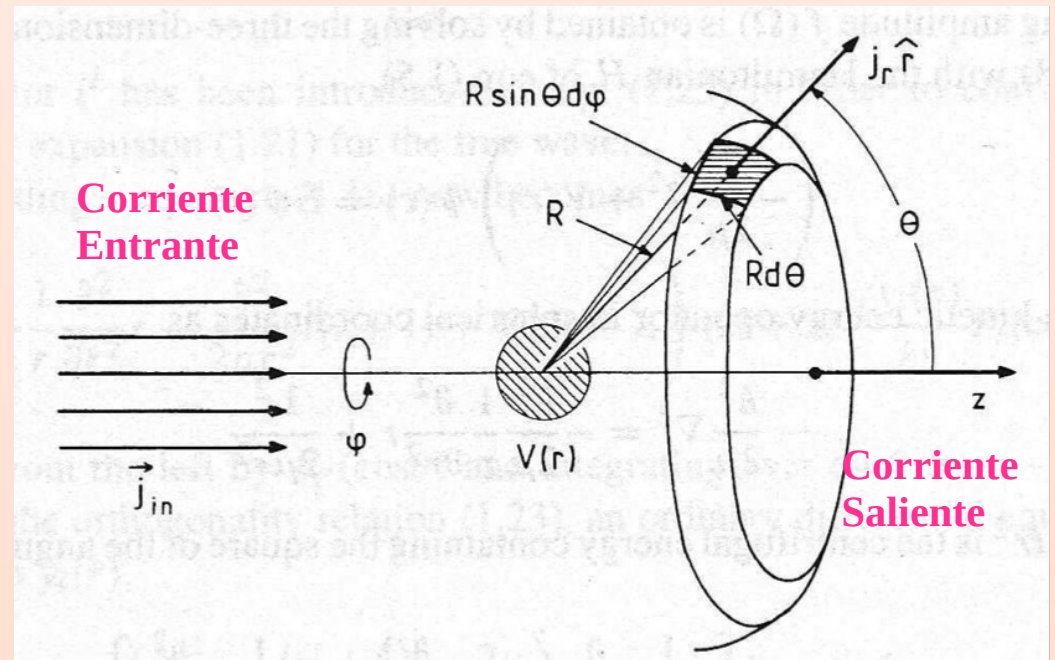
$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$

Corriente incidente

$$\mathbf{j}_{in} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{\mu} = \mathbf{v} \quad \text{TP}$$

Corriente saliente

$$j_r r^2 d\Omega \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v |f(\Omega)|^2 d\Omega$$



Sección eficaz $d\sigma = \frac{\text{corriente saliente en } d\Omega}{\text{corriente incidente}}$

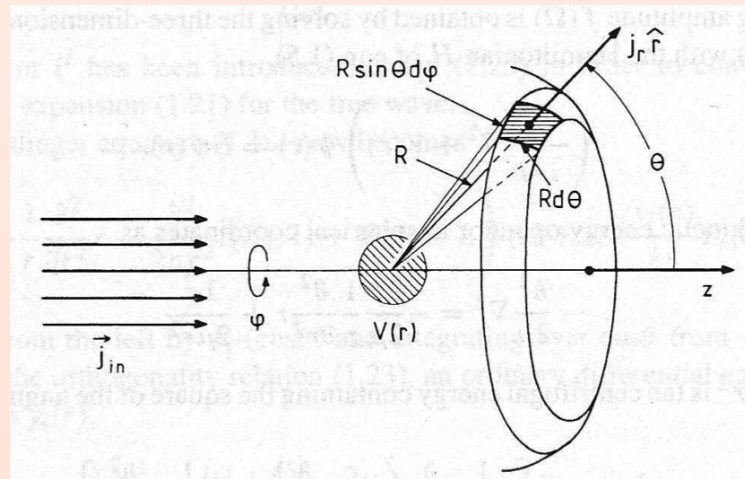
Sección eficaz

Sección eficaz diferencial

$$d\sigma(\Omega) = \frac{\text{probabilidad de corriente en } d\Omega \text{ en la dirección } \hat{r}}{\text{densidad de probabilidad de corriente incidente}}$$

Corriente incidente

$$\mathbf{j}_{in} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{\mu} = \mathbf{v}$$



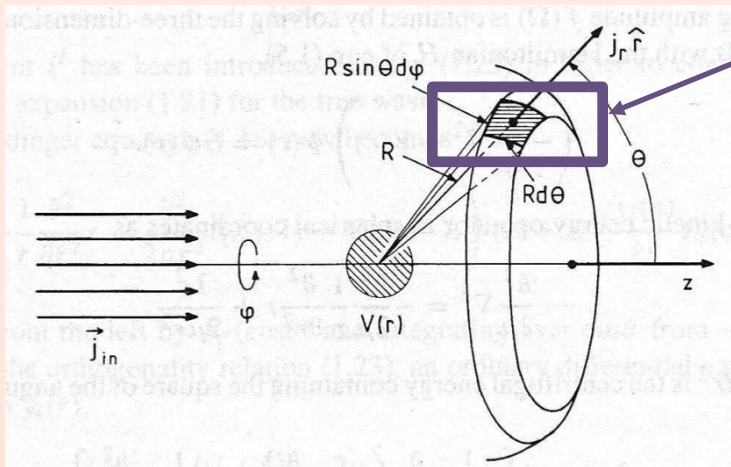
Corriente saliente

$$j_r r^2 d\Omega \xrightarrow{r \rightarrow \infty} v |f(\Omega)|^2 d\Omega$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_r r^2}{|\mathbf{j}_{in}|} = |f(\Omega)|^2$$

Sección eficaz total

Sección eficaz diferencial



$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$$

Sección eficaz total

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\Omega)|^2 \longrightarrow$$

$$\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$$\sigma_{el} = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) |f(\theta)|^2$$

Siguiente paso: calcular la amplitud de dispersión

Cálculo de la amplitud de dispersión :

- Cambio de fase**
- Matriz de dispersión**

Solución de la ecuación de Schroedinger

Hamiltoniano

$$\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Separación de variables

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Condición de contorno

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$

Parte angular

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$L^2 P_l(\cos \theta) = \hbar^2 l(l+1) P_l(\cos \theta)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_{l'}(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Parte radial

Solución libre

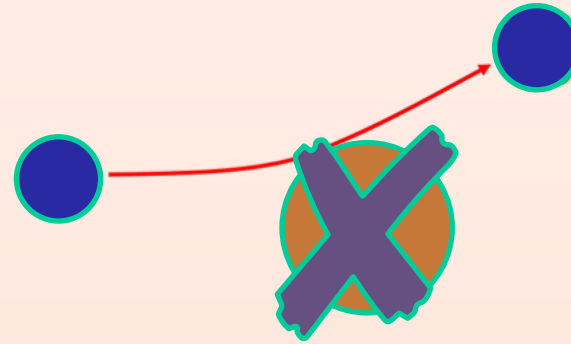
Solución con interacción

Solución libre

Hamiltoniano

$$\frac{p^2}{2\mu} \psi(r) = E \psi(r)$$

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$



Solución

$$\psi(r) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$$

Demasiado simple para ser lo que estamos buscando!

Solución en ondas parciales

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$

Funciones de Bessel

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$
$$f(\Omega) = 0$$

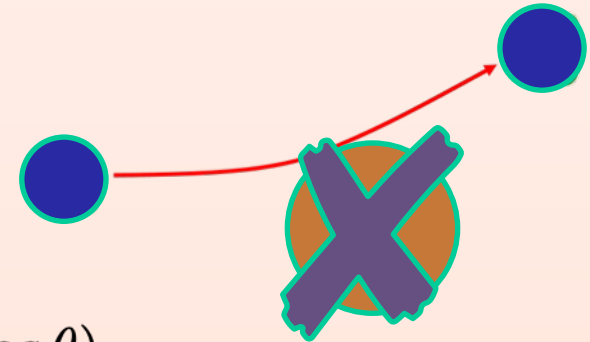
Solución libre

Hamiltoniano

$$\frac{p^2}{2\mu} \psi(r) = E \psi(r)$$

Solución

$$\psi(r) = i e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta)$$



Comportamiento asintótico en ondas parciales

$$j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}l)}{kr} = i^{-l} \left[\frac{e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}}{2ikr} \right]$$

Superposición de dos ondas esféricas

Solución con interacción

Hamiltoniano

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

$$\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

Expansión en ondas parciales

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l u_l(r) P_l(\cos \theta)$$

Parte angular

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\mathbf{L}^2}{2\mu r^2}$$

Parte radial

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right] u_l(r) = 0$$

Solución con interacción

Hamiltoniano

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

Expansión en ondas parciales

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l u_l(r) P_l(\cos \theta)$$

Parte radial

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) + k^2 \right] u_l(r) = 0$$

Comportamiento asintótico

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right) = a_l \left[\frac{i^{-l} e^{i\delta_l} e^{ikr} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}}{2ikr} \right]$$

Ondas esféricas

Cambio de fase

Cambio de fase

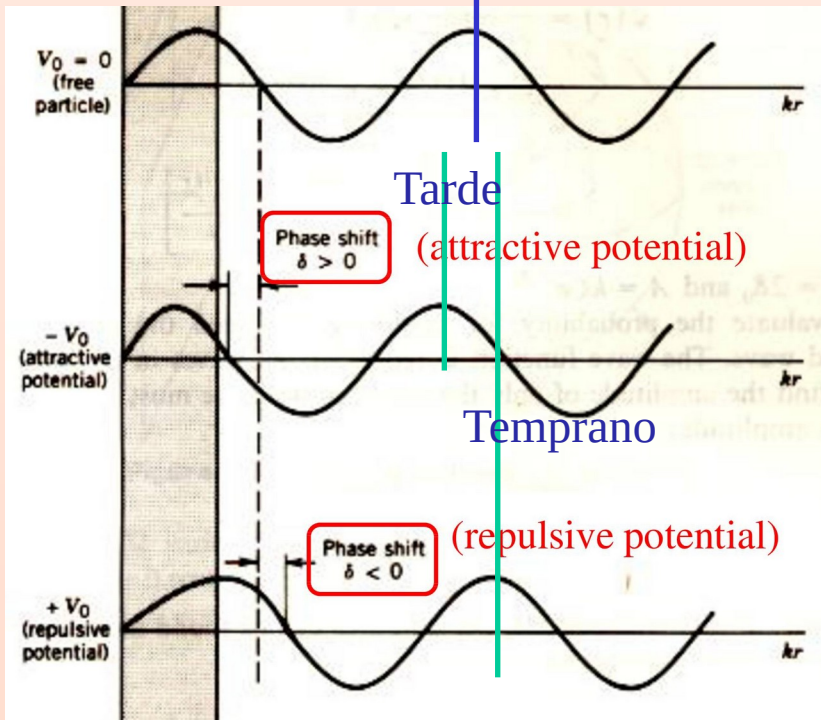
$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

Comparación con solución libre

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right) = a_l \left[\frac{i^{-l} e^{i\delta_l} e^{ikr} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}}{2ikr} \right]$$

Referencia

Cambio de fase



Sistema libre

$$\frac{p^2}{2\mu} \psi(r) = E \psi(r)$$

$$j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l\right)}{kr} = i^{-l} \left[\frac{e^{ikr} - (-)^l e^{-ikr}}{2ikr} \right]$$

Matriz de dispersión

Matriz de dispersión

$$\left[\frac{p^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

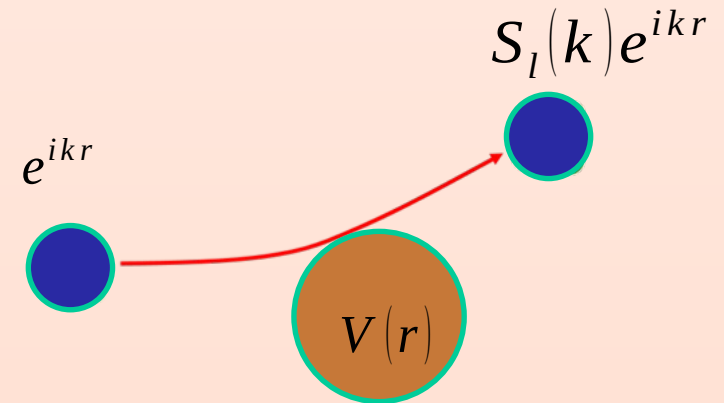
$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a_l \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right) = a_l \left[\frac{i^{-l} e^{i\delta_l} e^{ikr} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-ikr}}{2ikr} \right]$$

Matriz de dispersión

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}$$

$$u_l(r) \sim -i^l e^{-i\delta_l} \left[e^{-ikr} + S_l(k) e^{ikr} \right]$$

Modifica la fase de la amplitud



Conservación de la probabilidad

$$|S_l(k)| = 1$$

Cálculo de la amplitud de dispersión

Expansión de ondas parciales de la amplitud de dispersión

Expansión la exponencial $\psi(\mathbf{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\Omega) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$

Amplitud de scattering en ondas parciales

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) f_l \boxed{P_l(\cos \theta)} \quad j_l(kr) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2}l)}{kr} = i^{-l} \left[\frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - (-)^l e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right]$$

Expansión en ondas parciales

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) i^l u_l(r) \boxed{P_l(\cos \theta)}$$

Usando las expresiones asintóticas

$$u_l(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} a_l \sin(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l) = a_l \left[\frac{i^{-l} e^{i\delta_l} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - i^l e^{-i\delta_l} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{2i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right]$$

Coeficientes de la amplitud de dispersión

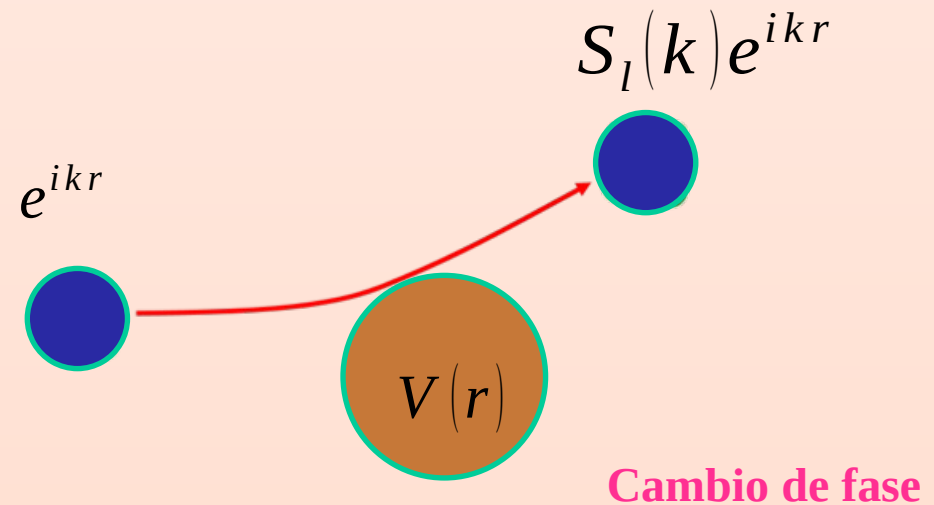
Amplitud de scattering en ondas parciales

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \text{sen}\delta_l$$

Cambio de fase $S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)}$

Amplitud de scattering

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) f_l P_l(\cos \theta)$$



$$u_l(r) \rightarrow \sin\left(kr - \frac{\pi}{2}l + \delta_l\right)$$

Sección eficaz diferencial y total

Sección eficaz diferencial

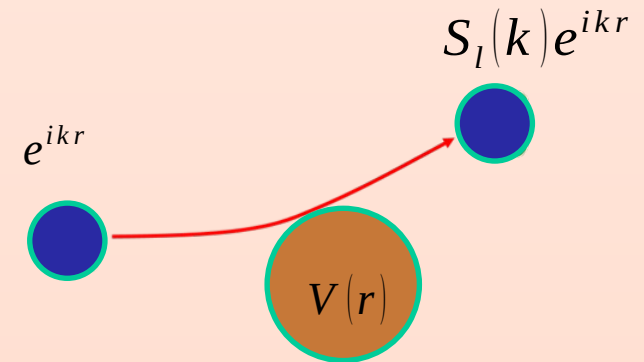
Sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$$

$$f_l = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_l} - 1) = \frac{1}{k} e^{i\delta_l} \text{sen}\delta_l$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) (S_l - 1) P_l(\cos \theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) (S_l - 1) P_l(\cos \theta) \right|^2$$



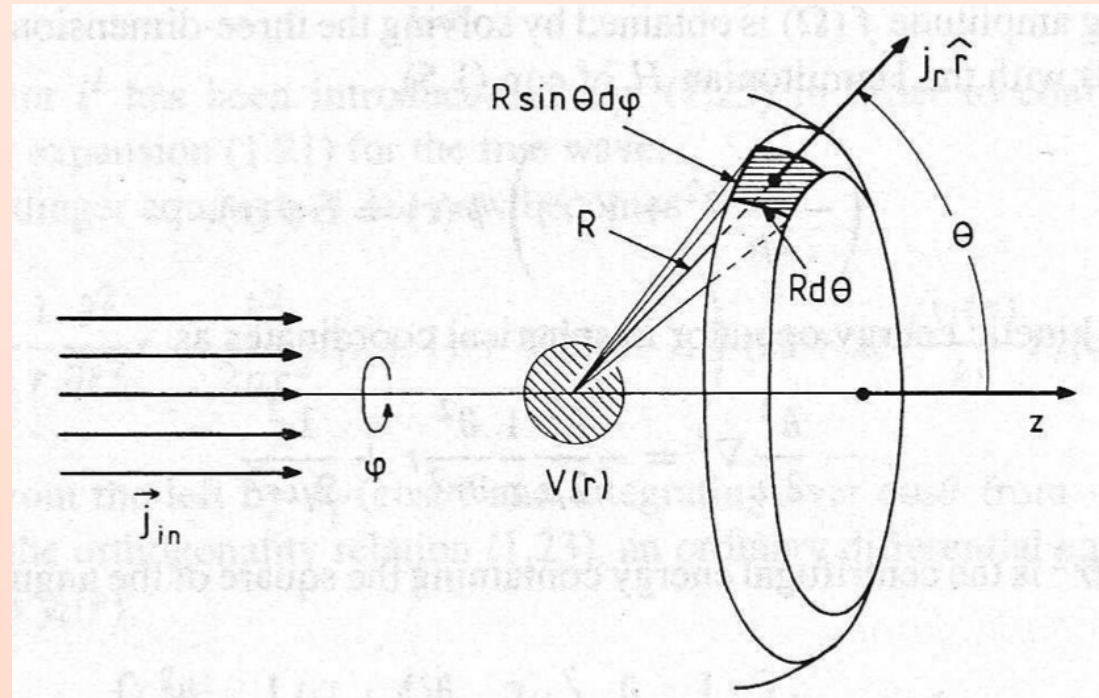
Sección eficaz total

Sección eficaz total

$$\sigma_{el} = 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)$$

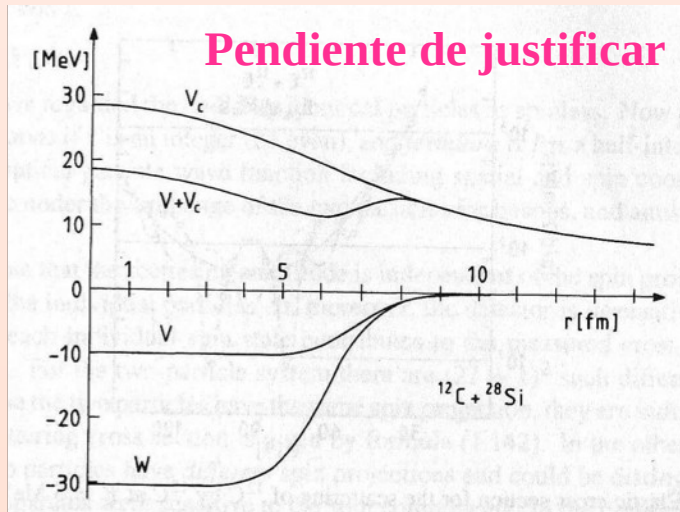
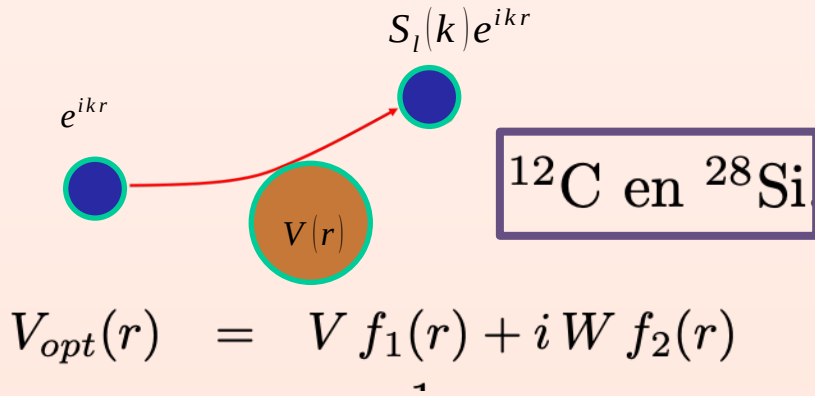
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{4k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) (S_l - 1) P_l(\cos \theta) \right|^2$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$



Ejemplo

Sección eficaz diferencial elástica: Aplicación



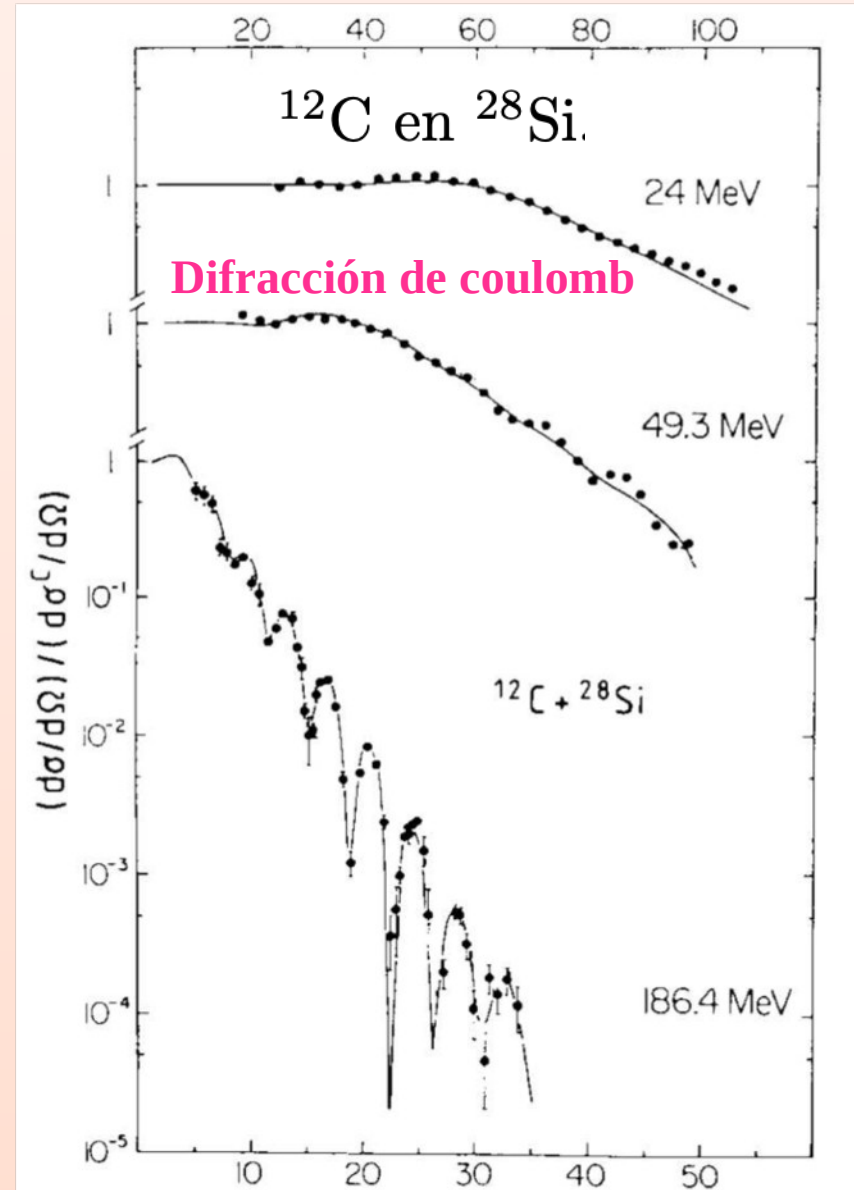
$$V = -10 \text{ MeV}, \quad f_i(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R_i}{a_i}}}$$

$$W = -30 \text{ MeV},$$

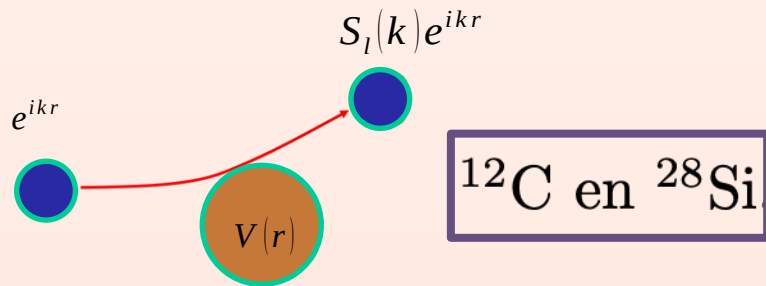
$$R_1 = 6.9238 \text{ fm}, \quad a_1 = 0.617 \text{ fm},$$

$$R_2 = 6.1782 \text{ fm}, \quad a_2 = 0.609 \text{ fm}$$

$$R_C = 6.3912 \text{ fm}$$

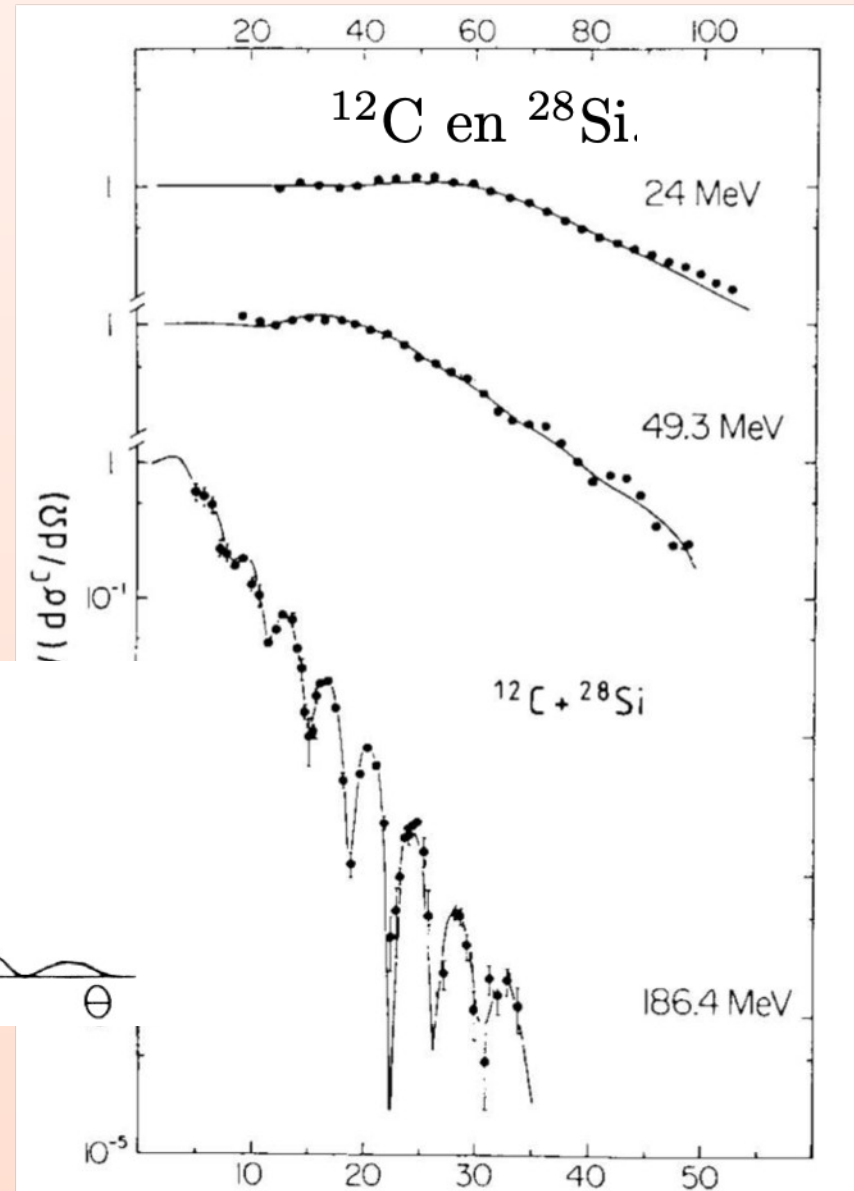
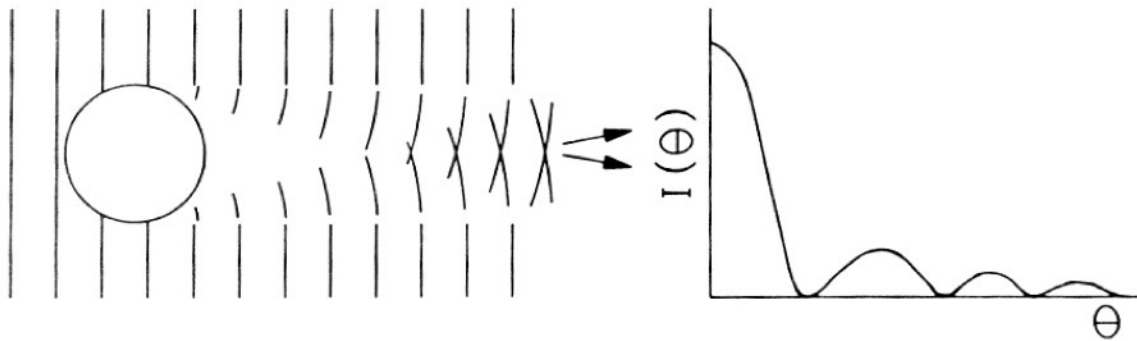


Sección eficaz diferencial elástica: Aplicación



$$V_{opt}(r) = V f_1(r) + iW f_2(r)$$

Difracción de Fraunhofer



Potencial complejo

Potencial óptico

Potencial complejo $W(r) < 0$

$$V_{opt}(r) = V(r) + i W(r)$$

Ecuación de Schroedinger

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(r) + i W(r) \right] \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r})$$

Ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) = \frac{2}{\hbar} |\psi|^2 W$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{2}{\hbar} \rho(r) W(r) < 0$$

Pérdida de flujo

Sección eficaz de absorción

Sección eficaz de absorción

$$\sigma_a = \frac{\text{probabilidad de corriente entrante} - \text{probabilidad de corriente saliente}}{\text{densidad de probabilidad incidente}}$$

Denominador

$$\mathbf{j}_{in} = \mathbf{v}$$

Numerador

$$-\int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{2}{\hbar} \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) W(r)$$

Sección eficaz de absorción

$$\sigma_a = -\frac{2}{\hbar v} \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) W(r)$$

Sección eficaz de absorción en ondas parciales

$$\psi(r, \theta) = \frac{1}{kr} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l u_l(r) P_l(\cos \theta)$$

$$\sigma_a = -\frac{2}{\hbar v} \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \int dr |u_l(r)|^2 W(r)$$

Matriz de dispersión con potencial óptico

Función de onda asintótica

$$\psi(r, \theta) \rightarrow \frac{1}{2ik} \sum_l (2l + 1) \left[(-)^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{r} + S_l \frac{e^{ikr}}{r} \right] P_l(\cos\theta)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{2}{\hbar} \rho(\mathbf{r}) W(r) < 0$$

Pérdida de flujo

$$|S_l|^2 < 1$$

Sección eficaz de absorción

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) (1 - |S_l|^2)$$

Algunos detalles para la ultima expresión

$$\sigma_a = -\frac{2}{\hbar v} \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \int dr |u_l(r)|^2 W(r)$$

$$\sigma_a = \sum_l \sigma_a(l) \quad \sigma_a(l) = \frac{\pi}{k^2} (2l + 1) T_l$$

$$T_l = -\frac{8}{\hbar v} \int dr |u_l(r)|^2 W(r)$$

$$T_l = 1 - |S_l|^2$$

Teorema óptico

Sección total y teorema óptico

$$\sigma_{total} = \sigma_{el} + \sigma_a$$

$$\sigma_{el} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) |e^{i\delta_l} \text{sen}\delta_l|^2$$

$$\sigma_a = \frac{\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) (1 - |S_l|^2)$$

Sección eficaz total

$$\sigma_{total} = \frac{2\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) (1 - \text{Re}S_l)$$

Amplitud de scattering en ondas parciales

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_l (2l + 1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta)$$

Teorema óptico

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k} \text{Im}f(\theta = 0)$$

Fin