MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA II (F1810)

3^{er} año Lic. Física. FCEIA. UNR.

1er Semestre 2024

<u>Módulo IV</u>:
Espacio de Hilbert - Representación Espectral

<u>Docentes</u>:
Federico Torresi
Alejandro Mezio
Rodolfo M. Id Betan(Rolo)

Reportar errores o comentarios a: idbetan@fceia.unr.edu.ar

July 12, 2024

Contents

Chapter 1

Espacios

Modificado: 2024.07.12

Contenido: Espacio normado. Convergencia. Clausura de un conjunto. Sucesión de Cauchy. Espacio de Banach. Espacio L_2. Nociones sobre integral de Lebesgue. Operador integral. Transformación de ecuación diferencial en integral. Producto interno. Base ortogonal. Espacio de Hilbert. Relación de Parseval. Teorema de Riesz-Fischer. Teorema de Riez para funcionales en Hilbert.
Apéndice: Puntos fijos. Ecuaciones integrales. Problema de Sturm-Liuville. Demostración de la desigualdad de Schwartz. Ortonormalización de Gram-Schmidt. Funcionales en espacio de Hilbert. Convergencia débil.

Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulos 4, 5 y 7.

Dedicación: dos clases y media (2.5).

1.1 Espacio de Banach

En la resolución de problemas por métodos aproximados, nos interesa cuantificar cuan cerca la solución aproximada se encuentra de la exacta. Cuando la solución forma parte de un espacio vectorial, esta información viene dada por cierta definición de longitud, que llamamos norma, equivalente al módulo en los espacios de números real y complejo.

Espacio vectorial con norma

El concepto de norma es una forma de expresar en forma abstracta las propiedades algebraicas de longitud de vectores en el espacio euclideano de tres dimensiones a los espacios vectoriales.

Definición: Un **espacio vectorial** (real o complejo) es un conjunto V tal que:

- Existe una regla designada como $+$, tal que, dados $x, y \in V$, determina un elemento de V denominado $x + y$, que satisface

i) $x + y = y + x$,

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

iii) Existe un elemento 0, tal que, $0 + x = x$,

iv) Dado x, existe un elemento, que denominamos $-x$ tal que, $x + (-x) = 0$.

- Existe otra regla, tal que, dado $x \in V$ y cualquier número real o complejo k, determina un elemento en V denominado kx, que satisface

v) $k_1(k_2 x) = (k_1 k_2)x$,

vi) $1x = x$,

vii) $(k_1 + k_2)x = k_1 x + k_2 x$, y

viii) $k(x + y) = kx + ky$.

Definición: Un **espacio normado** es un espacio vectorial V con una dada norma.

Definición: Una **norma** sobre un espacio vectorial V es una regla que, dada cualquier $x \in V$, asigna un número real $||x||$, tal que

i) $||x|| > 0$ si $x \neq 0$, y $||0|| = 0$,

ii) $||ax|| = |a|\,||x||$ para cualquier $x \in V$ y cualquier escalar a,

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ para cualquier $x, y \in V$.

Ejemplos:

- $\mathfrak{R}^n$ con norma
$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,,$$
es un espacio normado real.

- $\mathfrak{R}^n$ con norma
$$||x|| = \max |x_i|\,,$$
es un espacio normado real, diferente al anterior.

- $\mathfrak{C}^n$ con norma
$$||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}\,,$$
es un espacio normado complejo.

- El espacio de las funciones continuas $C[a, b]$ con norma
$$||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} . \qquad (1.1)$$
es un espacio normado.
La **norma** (1.1) se la denomina **norma en media** o **norma de cuadrado integrable**.

- El espacio de las funciones continuas $C[a,b]$ con norma [1]

$$||f|| = \sup\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}\,, \tag{1.2}$$

  es un espacio normado, diferente al anterior.
  La norma (1.2) se la denomina **norma uniforme**.

La definición de norma afecta a la convergencia de sus elementos. Podría ser que una sucesión converja con una norma pero no con otra.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

- Para cualesquiera números complejo $z_1, \cdots, z_n$, $w_1, \cdots, w_n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)$$

- Para cualesquiera funciones f y g tal que las integrales existan, se verifica,

$$\left|\int_a^b f(t)\bar{g}(t)\,dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2\right)$$

Convergencia

El objeto final de los espacios normados es tratar el problema de las aproximaciones a las soluciones de diferente tipos de ecuaciones. Esto es, mediante algún procedimiento uno obtiene iterativamente soluciones que espera que tiendan a la solución exacta. Luego, se necesita de un procedimiento para analizar cuan buena es la aproximación. En espacios normados, uno considera que dos elementos están cerca cuando la norma de su diferencia es pequeña.

Definición: Sea $X, x_1, x_2, \cdots \in N$, con N un espacio normado. Se dice que x_n **converge** a X cuando n tiende a ∞,

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} X$$

si, dado $\epsilon > 0$, existe M tal que

$$||x_n - X|| < \epsilon \text{ para todo } n > M\,.$$

Equivalentemente

$$||x_n - X|| \xrightarrow{n\to\infty} 0\,.$$

Definición: Sea $X, x_1, x_2, \cdots \in N$, con N un espacio normado. Se dice que la **serie** $x_1 + x_2 + \cdots$ converge a X,

$$x_1 + x_2 + \cdots \xrightarrow{n\to\infty} X\,,$$

y se escribe

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X\,,$$

si la sucesión $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ converge a X,

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \xrightarrow{n\to\infty} X\,.$$

[1] El supremo de un conjunto de números representa a su valor máximo en el sentido que el máximo podría no pertenecer al conjunto. Por ejemplo, $\sup(0,1) = 1$, $\sup(1 - e^{-x^2}) = 1$.

Convergencia uniforme: En el espacio $C[a, b]$, con la norma uniforme $||f|| = \sup\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}$, se dice que una sucesión de funciones f_n converge a la función F si

$$||f_n(t) - F(t)|| = \sup\{|f_n(t) - F(t)| : a \leq t \leq b\} \to 0\,.$$

Convergencia en media: En el espacio $C[a, b]$, con la norma $||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, se dice que una sucesión de funciones f_n converge a la función F si

$$||f_n - F||^2 = \int_a^b |f_n(t) - F(t)|^2 dt \to 0\,.$$

Ejemplo: El siguiente ejemplo muestra diferentes escenarios para una sucesión en el espacio $C[0, 1]$. Sea la sucesión (f_n)

$$f_n(x) = e^{-nx} \text{ con } n = 1, 2, \cdots\,.$$

Las funciones $f_n(x) \in C[0, 1]$. Para cada $x \in [0, 1]$ tenemos

$$f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{array} \right.\,, \tag{1.3}$$

con $F(x) \notin C[0, 1]$.

- Consideremos el límite $f_n \xrightarrow{n\to\infty} F$ con la norma en media,

  $$\begin{aligned} ||f_n - F||^2 &= \int_0^1 |f_n(x) - F(x)|^2 dx = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \left.\frac{e^{-2nx}}{-2n}\right|_0^1 = \frac{1 - e^{-2n}}{n} \\ ||f_n - F||^2 &\xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

  pero F no es continua.

- Sin embargo, si consideramos la función

  $$F_0(x) = 0 \text{ con } x \in [0, 1]\,,$$

  dado que

  $$\begin{aligned} ||f_n - F_0||^2 &= \int_0^1 |f_n(x) - F_0(x)|^2 dx = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \left.\frac{e^{-2nx}}{-2n}\right|_0^1 = \frac{1 - e^{-2n}}{n} \\ ||f_n - F_0||^2 &\xrightarrow{n\to\infty} 0\,, \end{aligned}$$

  con $F_0 \in C[0, 1]$, la sucesión f_n converge a F_0 en el espacio $C[0, 1]$ con la norma en media. Los límites en media no son únicos dado que la integral no se ve afectada por el cambio de la función en puntos aislados.

- Finalmente, consideremos el límite $f_n \xrightarrow{n\to\infty} F_0$ con la norma uniforme,

  $$\begin{aligned} ||f_n - F_0|| &= \sup\{|f_n(x) - F_0(x)| : 1 \leq x \leq 0\} \\ &= \sup\{|f_n(x)| : 1 \leq x \leq 0\} = e^{-nx} = 1 \\ ||f_n - F_0|| &\xrightarrow{n\to\infty} 1\,, \end{aligned}$$

  por lo tanto (f_n) no converge con la norma del supremo.

En los ejemplos hemos presentado dos tipos importantes de convergencia en el espacio de funciones. La convergencia uniforme, la cual da una convergencia definida a través de la norma del supremo, y la convergencia en media, la cual da una convergencia respecto a una integral. Cada sucesión uniformemente convergente en $C[a, b]$ converge en media (dado que puede ser integrada término a término). Luego, **convergencia con la norma del supremo implica convergencia con la norma de la integral, pero no vale el recíproco.**

Definición: Si S es un subconjunto de un espacio normado, decimos que x es un **punto límite** de S (no necesariamente $x \in S$), si existe una sucesión (y_n) de elementos de S tal que $y_n \to x$, y para cada n, $y_n \neq x$.
Ejemplo: La función discontinua $F(x)$, Ec. (1.3), es un punto límite de la sucesión $f_n(x) = exp(-nx)$.

Definición: Para cualquier conjunto S en un espacio normado, la **clausura** de S es la unión de S con el conjunto de todos los puntos límites de S. Se denota la clausura de S como $\bar{S}$.

Definición: Sean S y T subconjuntos de un espacio normado, con $S \subset T$. El **subconjunto** S es **denso** en T si para cada $t \in T$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $s \in S$ con $||s - t|| < \epsilon$.

Esto es, para cada elemento en $t \in T$, existen elementos en S de modo que uno puede estar tan cerca de t como quiera.

Podría ser que los elementos de S estén densamente distribuidos entre los elementos de T, como por ejemplo ocurre entre los racionales ($\mathcal{Q} = S$) y los reales ($\mathcal{R} = T$).

Cada conjunto S es denso en su clausura $\bar{S}$. Además $\bar{S}$ es el conjunto más grande en el cual S es denso.

En lo que sigue introducimos una definición de convergencia alternativa que no hace uso del límite de la sucesión.

Definición: Una **sucesión de Cauchy** de elementos de un espacio normado es una sucesión (x_n) tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número N tal que $||x_n - x_m|| < \epsilon$ para todo $n, m > N$.

Ejemplo: Sea $g_n(x) = \tanh(nx)$, con $n = 1, 2, \cdots$.

$$|\tanh mx - \tanh nx| = \left| \frac{\sinh(m-n)x}{\cosh mx \cosh nx} \right| \leq \left| \frac{\sinh mx}{\cosh mx \cosh nx} \right| \leq \operatorname{sech} nx$$

donde hemos usado $|\tanh mx| < 1$ y $m > n$.

Entonces,

$$||g_m - g_n||^2 \leq \int_{-1}^{1} \operatorname{sech}^2 nx \, dx = \frac{2 \tanh n}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde hemos usado la norma en media. Esto muestra que $g_n(x) = \tanh(nx)$ es una suseción de Cauchy.

Notemos, por otro lado que $g_n(x) \in C[-1, 1]$ y que converge, con la norma en media, a la función $sig(x) \notin C[-1, 1]$. Luego, la sucesión de funciones $g_n(x)$ no converge en el espacio $C[-1, 1]$ con la norma en media. Esto implica, que ser una sucesión de Cauchy no implica la convergencia en el espacio normado.

Teorema: Cada **sucesión convergente** en un espacio normado es una sucesión de Cauchy.

Definición: Un **espacio normado es completo** si cada sucesión de Cauchy es convergente, e incompleto si no.

Ejemplos:

- Los espacios normados $\mathcal{R}^n$ y $\mathcal{C}^n$, con la norma $(\sum |x_i|^2)^{1/2}$ son completos.
- El espacio $C[a,b]$ con la norma $||f|| = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ es completo.
- $C[a,b]$ con la norma en media es incompleto, dado que la sucesión $g_n(x) \in C[-1,1]$ es de Cauchy, pero (g_n) converge a una función discontínua.

Definición: Un espacio normado completo es denominado un **espacio de Banach**.

Espacio L_2

Hemos visto que $C[a,b]$ con la norma en media no es completo, por ejemplo, la sucesión $g_n(x) = tanh(nx)$ no converge a una función de $C[a,b]$. Es posible agregarle al espacio incompleto los elementos 'faltantes', definiendo de este modo un nuevo espacio el cual resulta completo e incluye al espacio original. Esto es enunciado en el siguiente teorema.

Teorema: Para cualquier espacio normado N existe un **espacio completo** Ω de modo que N es un subespacio denso de Ω. El espacio Ω es denominado la completación de N.

Definición: El **espacio** $L_2[a,b]$ denota la completación de $C[a,b]$ con la norma de la integral del cuadrado (o en media).

De este modo L_2 contiene todas las funciones que son el límite de funciones continuas en el sentido de convergencia en media. Por ejemplo, el límite de $g_n(x) = \tanh(nx)$, la función $sig(x) \in L_2[-1,1]$.

Por ser L_2 la completación de C con la norma en media, C es denso en L_2.

El espacio L_2 puede contener ciertas funciones con discontinuidad infinita, siempre que la discontinuidad sea los suficientemente suave de modo que el cuadrado de la función sea integrable.
Ejemplo: Por ejemplo, $x^{-1/3} \in L_2[a,b]$, pero $x^{-2/3} \notin L_2[a,b]$. Pues,

$$\int_a^b |x^{-1/3}|^2 dx = x^{1/3}\Big|_a^b < \infty\,,$$

mientras que

$$\int_a^b |x^{-2/3}|^2 dx = x^{-1/3}\Big|_a^b \not< \infty(\text{si contiene el origen}).$$

El espacio L_2 también contiene funciones que no son integrables según la definición de integral de Riemann pero que sí lo son con la integral de Lebesgue (que introducimos en la siguiente sección.)
Ejemplo: La función de Dirichelt $D(x) = 1$ para x racional y $D(x) = 0$ para x irracional, es un ejemplo de función no integrable por Riemann.

Definición: Cada función f para la cual $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$ existe es denominada **función de cuadrado integrable** en $[a,b]$.

Cada función f de cuadrado integrable pertenece a L_2.

Para que el espacio L_2 satisface el primer axioma de norma hace falta reemplazar la noción de función como elemento por clase de funciones. La $||f|| = 0$ con la norma en media no implica $f = 0$, pues cualquier función que sea cero excepto en un número finito de puntos dará, $\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0$. La forma de resolver esta inconsistencia es utilizar clases de equivalencia [2].

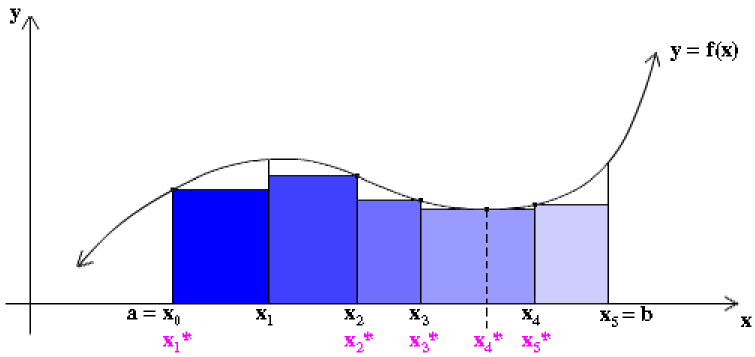
El espacio $L_2[a,b]$ definido con clases de equivalencia de funciones es un espacio de Banach.

Integral de Lebesgue

El objetivo de esta sección es dar una noción sobre la *integral de Lebesgue.* Esta integral es más simple y general que la usual integral de Riemann. Aunque en la práctica uno usa la técnica de Riemann para calcular integrales, en lo formal se asume que la integral de Legesgue es la que se está usando. Por un lado los valores de la integral de Riemann, cuando existe, coincide con la de Lebesgue. Por otro, la integral de Lebesgue es la que se utiliza cuando se trabaja con espacios de Hilbert. Finalmente, el intercambio entre límite e integral es más funcional con la integral de Lebesgue (ver abajo).

Integral de Riemann: Recordemos que la integral de Riemann se define como el límite de sumas de una partición de la abscisa.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$



Para que el límite exista $f(x)$ debe ser bastante regular, por ejemplo, con un número finito de discontinuidades.

Para tratar funciones más generales, por ejemplo, la función de Dirichlet $D(x)$,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{Q} \\ 0 & x \in \mathcal{I} \end{cases}$$

(con $\mathcal{Q}$ significando los números racionales e $\mathcal{I}$ los irracionales), y para obtener funciones límites que también sean integrales; se introduce la integral de Lebesgue.

Integral de Lebesgue: La integral de Lebesgue reemplaza la partición en las abscisa por una partición en la ordenada, como se muestra en la figura 1.1.

[2] *Clase de equivalencia de funciones:* dos funciones f y g se dicen equivalentes si $\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx = 0$, esto es, si f y g son iguales en casi todo punto.

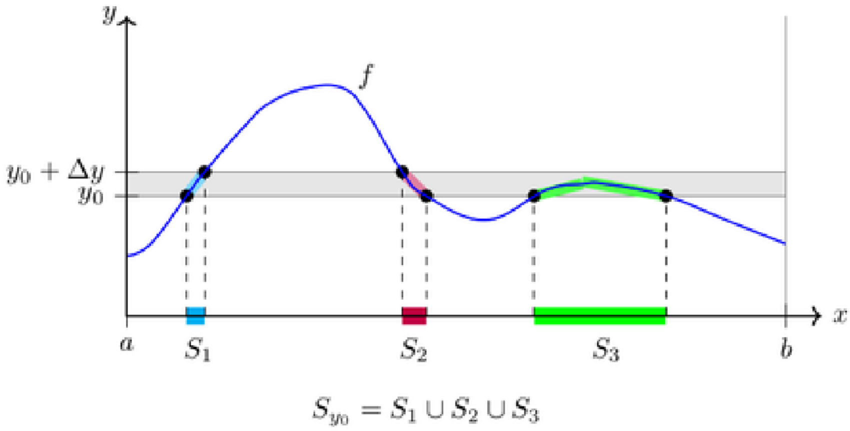


Figure 1.1:

Luego, la integral se define multiplicando la medida de la preimagen S_i de $\varphi_i = f(x_i)$ con el valor de $f(x)$ en la partición i,

$$\int_a^b f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mu(S_i)$$

Para $x \in \mathcal{R}$ la medida es

$$\mu(x_a, x_b) = x_b - x_a$$

con $x_b > x_a$ y, si S es la unión de $S_1, S_2, \cdots, S_k$ intervalos disjuntos, $\mu(S) = \sum_{j=1}^{k} S_j$.

Cuando la función $f(x)$ es integrable según la definición de Riemann, coincide con la integral de Lebesgue.

Teorema de Lebesgue: Si una serie de funciones $f_k(x)$, con x real, converge puntualmente a $f(x)$ cuando k tiende a infinito, y si existe una función $g(x)$ positiva tal $|f_k(x)| \leq g(x)$ para todo k, entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx = \int \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int f(x)dx\,,$$

esto es, el límite y la integral son intercambiables. Esta propiedad permite demostrar fácilmente la completitud del espacio L_2.

Teorema de Fubini-Lebesgue: Sea $f(x, y)$ una función de x e y. Su integral con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathcal{R}^2$ se escribirá $\int f(x, y)dxdy$. Si $f(x, y) \geq 0$, se tendrá siempre

$$\int f(x,y)dxdy = \int dx \int f(x,y)dy = \int dy \int f(x,y)dx\,,$$

esto es, el orden de integración no afecta a la integral. Esta propiedad nos permite reducir integrales múltiples en integrales simples, de modo, que la integral no depende de la elección hecha como primera variable.

1.2 Operador Integral

En esta sección introducimos la noción de operador integral en el espacio L_2. Como material complementario, en el Apéndice A.1, se introduce la noción de punto fijo, el cual permite obtener soluciones aproximadas por iteracción de ciertos operadores integrales.

Definición: Sea $C[a,b]$ un espacio real o complejo de las funciones continuas. Para cada función dada $K : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ o $K : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{C}$, se puede definir la transformación $T : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

para toda $f \in C[a,b]$. El operador T es denominado **operador integral** lineal sobre $C[a,b]$, mientras K es denominado **núcleo integral**.

Si el núcleo integral K satisface

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty \,,$$

entonces

$$Tf \in L_2 \,.$$

Veamos...
La desigualda alcanzada en este desarrollado nos será de utilidad para dar como ejemplo de norma de operador la norma de operadoradores integrales.

Dado que

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy < \infty \,,$$

entonces también vale

$$\begin{aligned}
\infty > \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 \, ||f||^2 dxdy &= \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 \int_a^b |f(y')|^2 dy' dxdy \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b |K(x,y)|^2 dy \int_a^b |f(y')|^2 dy' \right] dx \\
&\geq \int_a^b \left| \int_a^b K(x,y)f(y)dy \right|^2 dx
\end{aligned}$$

Luego,

$$||Tf||^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(x,y)f(y)dy \right|^2 dx < \infty \,,$$

por lo que Tf es de cuadrado integrable.

Transformación de ecuación diferencial en integral

Tomemos como ejemplo la, así llamada, ecuación de Sturm-Liuville, y convirtámosla en una ecuación integral de punto fijo (ver Apéndice A.1) con un operador integral.

$$u''(x) + \lambda f(x)u(x) = 0$$

con condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$.

La ecuación diferencial puede ser escrita de la siguiente forma

$$-u''(x) = F(x)$$

con $F(x) = \lambda f(x)u(x)$.

Usando como solución la función de Green $g(x,y)$ (notar las condiciones de contorno homogéneas),

$$-g''(x,y) = \delta(x-y)$$

podemos escribir la solución formal

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)F(y)dy \\ &= \int_0^1 g(x,y)\lambda f(y)u(y)dy \\ &= \int_0^1 K(x,y)u(y)dy \\ &= Tu \end{aligned}$$

donde hemos definido el operador integral T con núcleo integral $K(x,y) = \lambda g(x,y)f(y)$.

De este modo hemos transformado la ecuación diferencial en un problema que puede resolverse en forma iterativa (ver los ejemplos del Apéndice A.1)

$$u_{n+1} = Tu_n$$

Para que la sucesión converja el núcleo integral debe verificar ciertas condiciones que son especificadas en el Apéndice A.2

Ejemplo: En el Apéndice A.3 desarrollamos los criterios para la existencia de solución de la ecuación de Sturm-Liuville. En este ejemplo damos un resultados numérico para $f(x) = 1$, esto es, la ecuación diferencial

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0\,.$$

Dado que esta ecuación puede resolverse en forma analítica, conocemos sus autovalores: $\lambda = \pi^2, 4\pi^2, \ldots$.

Ahora apliquemos las condiciones para el núcleo integral correspondiente a esta ecuación como método para estimar el primer autovalor.

Calculando la función de Green se encuentra,

$$g(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & x \leq y \\ \\ y(1-x) & x \geq y \end{cases}$$

Luego, evaluando la integral

$$I = \int_a^b dx \int_a^b dy |g(x,y)f(y)|^2$$

con $f(y) = 1$, resulta $I = \frac{1}{90}$, lo que implica que λ debe verificar,

$$\lambda \geq 3\sqrt{10} = 9.4868\,,$$

comparemos este número con el primer autovalor $\pi^2 = 9.86960$!!.

1.3 Espacio de Hilbert

En esta sección se define producto interno, el cual constituye una versión abstracta del producto escalar entre vectores para espacios vectoriales. El producto escalar permite definir una versión generalizada de ángulo y en particular, ángulo recto u ortogonalidad. Esta nueva propiedad complementa a los espacios normados donde sólo teníamos definida una longitud pero no ángulos. En el Apéndice se define funcionales en espacios normado y de Hilbert y la noción de convergencia débil.

Definición: Un **espacio producto interno** (real o complejo) es un espacio vectorial V con un producto interno especificado. Producto interno es una regla que, dados x, $y \in V$ especifica un número (x, y) (real o complejo), denominado producto interno de x e y, tal que

i) (x, x) es real y positivo para todo $x \neq 0$, y $(0, 0) = 0$

ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ para todo $x, y \in V$

iii) $(ax, y) = a(x, y)$ para cualquier escalar a y $x, y \in V$.

iv) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ para todo $x, y, z \in V$

De (ii) y (iii) resulta,

$$(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \bar{a}\,\overline{(y, x)} = \bar{a}(x, y)$$

Ejemplos: Los siguientes son ejemplos de espacios producto interno

- El **espacio real n-dimensinal $\mathcal{R}^n$** con

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- El **espacio complejo n-dimensinal $\mathcal{C}^n$** con

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

- **Espacio $\boldsymbol{l_2}$** formado por todas las sucesiones de números (x_i) tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ converge con

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \,.$$

- **Espacio $\boldsymbol{L_2[a, b]}$** con

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx \,.$$

Desigualdad de Schwartz: Para cualquier x, y en un espacio producto interno se verifica

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \,,$$

donde la igualdad $|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y)$ vale si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

En el Apéndice A.4 se demuestra la desigualdad de Schwartz.

Definición: En cualquier espacio producto interno se define la **norma** como

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}$$

Luego, cualquier espacio producto interno genera un espacio normado. El recíproco no necesariamente es válido.

Definición: A partir desigualdad de Schwarz definimos **ángulo** entre elementos de un espacio producto interno,

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y) = ||x||\,||y||\,,$$
$$-1 \leq \frac{(x,y)}{||x||\,||y||} \leq 1$$
$$\theta = \cos^{-1}\frac{(x,y)}{||x||\,||y||}$$

Definición: Dos vectores x, y en un espacio producto interno se dicen **ortogonales** si

$$(x,y) = 0\,,$$

y escribimos $x \perp y$.

Ejemplos:

- En $\mathcal{C}^2$ con
$$(x,y) = x\bar{y}\,,$$
los vectores $x = (1,i)$ e $y = (1,-i)$ son ortogonales.

- En $C[0,\pi]$ con
$$(f,g) = \int_0^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$$
las funciones $\sin mx$ y $\sin nx$ son ortogonales para cualesquiera entero positivos con $m \neq n$.

- En cualquier espacio, el vector zero es ortogonal a cada vector.

Continuidad del producto interno:

- Si $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, entonces
$$(x_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} (x,y)$$
para cualquier y.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ entonces,
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n, y) = (u,y)$$
para cualquier y.

Bases ortogonales

En esta sección extendemos la noción de base a espacios de dimensión infinita. En el Apéndice A.5 damos el procedimiento para generar una sucesión ortogonal a partir de una sucesión arbitraria (ortonormalización de Gram-Schmidt).

Definición: Un conjunto de vectores $\{x_i\}$ en un espacio producto interno es llamado un **conjunto ortogonal** si,

i) $(x_i, x_j) = 0$ siempre que $i \neq j$. Podemos escribir $(x_i, x_j) = \delta_{ij}(x_i, x_i) = \delta_{ij}||x_i||^2$, con δ_{ij} la delta de Kronecker.

ii) Para cada i, $x_i \neq 0$, esto es, el vector nulo es excluído.

El vector nulo es excluído de la definición de conjunto ortogonal, de modo que para espacios finitos, un conjunto ortogonal sea linealmente independiente.
Veamos...
Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto ortogonal, y sea $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, entonces para cada j tenemos,

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, x_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i, x_j) = 0 \quad \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{i,j}(x_j, x_j) \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j(x_j, x_j) = 0\,.$$

Luego, dado que $x_j \neq 0$ para todo j, resulta $c_j = 0$ para cada j. Lo que muestra que *un conjunto ortogonal finito es linealmente independiente.*

Definición: Una **base ortogonal** para un espacio producto interno S es un conjunto ortogonal (e_n) tal que para cualquier $x \in S$ existen escalares c_n tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

Nuestra definición de base usa un conjunto contable. Es posible definir una base ortonormal con conjuntos no contables. Por otro lado, no todo espacio tiene una base. Un espacio puede ser, en cierto sentido, tan grande que ningún conjunto contable puede generar todo el espacio a través de sus infinitas combinaciones lineales.

Definición: Un espacio producto interno completo con una base es llamado un **espacio de Hilbert**.

Ejemplos:

- El **espacio $\boldsymbol{\mathcal{R}^n}$** con la norma generada por el producto interno $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ es completo. Tiene por base los versores. Por lo que $\boldsymbol{\mathcal{R}^n}$ es un espacio de Hilbert.
- De igual modo, el **espacio $\boldsymbol{\mathcal{C}^n}$**, con $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$, es un espacio de Hilbert.
- El **espacio $\boldsymbol{C[0, \pi]}$**, con $(f, g) = \int_0^{\pi} f(x)\bar{g}(x)dx$ y base $\sin nx$, **no** es un espacio de Hilbert, dado que no es completo (por ejemplo, la sucesión $\tanh \mathrm{nx}$ converge a la función $\mathrm{sg\,x}$).

En los espacios de dimensiones finitas las bases fueron útiles porque, en lugar de operar con los vectores uno opera o manipula las componentes (lo que en álgebra lineal llamamos vector coordenadas) que son una colección de números reales o complejos. En espacios de dimensión infinita también manipular las coordenadas resulta computacionalmente más práctico que manipular los elementos del espacio. En el Apéndice A.5 damos el procedimiento iterativo para constuir una base ortonormal a partir de un conjunto infinito de vectores.

Expansión ortogonal

En esta sección aprendemos a representar vectores de espacios de Hilbert en término de una base infinita.

Teorema: Sea (e_n) una base ortogonal en un espacio producto interno V. Para cualquier $x \in V$, vale

$$x = \sum_{n}^{\infty} c_n e_n$$

donde c_n se obtienen de proyectar x sobre e_m:

$$\begin{aligned}(x, e_m) &= (\sum_n c_n e_n, e_m) = \sum_n c_n (e_n, e_m) \\ &= \sum_n c_n \delta_{n,m} (e_m, e_m) = c_m (e_m, e_m) \Rightarrow c_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)}\end{aligned}$$

Los coeficientes c_n se denominan coeficientes de Fourier generalizados

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{(e_n, e_n)} = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} .$$

Teorema: Sea $\{e_1, \cdots, e_N\}$ un conjunto ortogonal en un espacio producto interno. Para cualquier x, la mejor aproximación de x

$$\sum_{n=1}^{N} c_n e_n$$

se consigue con los coeficientes de Fourier generalizados. Ver Apéndice A.6.

Teorema: Sea S un subconjunto denso de un espacio producto interno V. Si (e_n) es una base de S, entonces (e_n) **también es base para** V.

Este teorema completa los elementos necesarios para mostrar que L_2 es un espacio de Hilbert:

i) El conjunto $C_0^\infty[a, b]$ de funciones suaves que se anulan en a y b es denso en $C[a, b]$ con la norma de L_2.

ii) Dado que $C[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$ implica que $C_0^\infty[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$.

iii) Cada función suave que se anula en a y b puede ser expandida por las funciones $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$. La serie converge uniformemente.

iv) Dado que convergencia uniforme implica convergencia en media, significa que las funciones $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ forman una base para $C_0^\infty[a, b]$.

v) Por el teorema anterior, tenemos que $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ también es base para $L_2[a, b]$, y luego $L_2[a, b]$ es completo y tiene una base, por lo que es un espacio de Hilbert.

Desigualdad de Bessel: Si (e_n) es un conjunto ortonormal ($||e_n|| = 1$) en un espacio producto interno, entonces para cualquier x en el espacio se verifica,

$$\sum_{n}^{\infty} |c_n|^2 \leq ||x||^2 \, ,$$

con $c_n = (x, e_n)$.

Relación de Parseval: Sea (e_n) un conjunto ortonormal en un espacio producto interno. (e_n) es una base si y sólo si para cada x en el espacio se verifica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||x||^2 \, ,$$

con $c_n = (x, e_n)$.

Teorema de Riesz-Fischer: Sea (e_n) una base ortonormal para un espacio (real o complejo) de Hilbert H de dimensión infinita. Si (c_n) es una sucesión de números tal que $\sum_n |c_n|^2$ converge, entonces existe un $x \in H$ tal que

i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$, y

ii) $c_n = (x, e_n)$.

Este teorema indica que todos los espacios de Hilbert de dimensión infinita son **isomorfos** al espacio de las sucesiones l_2, en este sentido, sólo existe un espacio de Hilbert.

Descomposición ortogonal

En esta sección se introducen los conceptos para la interpretación geométrica en la teoría de espacio de Hilbert.

Definición: Sea X cualquier subconjunto de un espacio de Hilbert H. El **complemento ortogonal** de X es el conjunto

$$X^{\perp} = \{x \in H : x \perp X\} \, ,$$

donde $x \perp X$ significa que $x \perp \xi$ para todo $\xi \in X$.

Tanto X como $X^{\perp}$ son espacios de Hilbert.

Proyección ortogonal: Si E es un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces cada $x \in H$ puede ser unívocamente escrito como

$$x = y + z \, ,$$

con $y \in E$ y $z \in E^{\perp}$. El vector y es llamado proyección de x sobre E.

Definición: Cada elemento de H puede ser escrito unívocamente como la suma de un elemento de E y un elemento de $E^{\perp}$, de modo que H es la **suma directa** de E y $E^{\perp}$,

$$H = E \oplus E^{\perp} \, .$$

Si (e_n) es una base de E y (f_n) una base de $E^{\perp}$, entonces (e_n) y (f_n) juntas forman una base para H.

Ejemplo: Consideremos la descomposición de una función $f(x) \in C$ en su parte par e impar,

$$f_{par}(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \in E$$
$$f_{impar}(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \in E^{\perp},$$

con $C = E \oplus E^{\perp}$.

El espacio E hace las veces del espacio de las funciones impares con los senos como base (e_n), mientras $E^{\perp}$ representaría al espacio de las funciones pares, con los consenos como base (f_n). Los coeficientes de Fourier usuales hacen las veces de los coeficientes de Fourier generalizado $c_n = (\sin nx, f)$ o $c_n = (\cos nx, f)$.

Teorema de Riez: Para cada funcional lineal continuo f sobre un espacio de Hilbert H, existe un único $u \in H$ tal que

$$f(x) = (x, u)$$

para todo $x \in H$, con $(.,.)$ el producto interno definido en H.

En el Apéndice A.7 damos algunos elementos más sobre funcionales en espacios normados y espacio de Hilbert.

Definición: Sea $X, x_1, x_2, \dots \in H$, con H un espacio de Hilbert, se dice que la sucesión (x_n) **converge débilmente** a X cuando $n \to \infty$ si, para todo $y \in H$

$$(x_n, y) \xrightarrow{n\to\infty} (X, y)\,.$$

Supongamos que el producto interno es el definido en L_2. Lo que dice la convergencia débil es que una sucesión converge enmarcado en una integral, aún cuando la sucesión no converge en el sentido usual, denominado **convergencia fuerte**.

Ejemplo 1 de 2: Sea (e_n) un conjunto ortonormal infinito en un espacio producto interno. Por el teorema de la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_n |c_n|^2$ converge,

$$\sum_n |c_n|^2 = \sum_n |(e_n, y)|^2 \leq ||x||^2\,,$$

donde hemos usado $|(y, e_n)| = |(e_n, y)|$. Luego, para cada y

$$(e_n, y) \to 0 = (0, y)\,,$$

lo que indica que la sucesión (e_n) converge débilmente al elemento nulo. Pero, la sucesión (e_n) no converge en el sentido usual,

$$e_n \nrightarrow 0\,.$$

En el Apéndice A.8 damos algunos elementos más sobre convergencia débil.

Ejemplo 2 de 2: Consideremos la función e^{ikt} cuando $t \to \infty$. Según el lema de Riemann-Legesgue

$$\int \phi(k)\, e^{ikt}\, dk \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{1.4}$$

con ϕ funciones bien comportadas. La integral puede interpretarse como el producto interno (ϕ, e^{ikt}), luego, la función e^{ikt} converge débilmente pero no converge en el sentido usual (convergencia fuerte).

Actividad: Pensar un argumento plausible para justificar la convergencia a cero de la integral.

Chapter 2

Representación Espectral

En este capítulo se dan los elementos matemáticos relativos a operadores para definir bases en el espacio de Hilbert. Se introducen los autovectores de un operador y la representación espectral en término de proyectores. Todos estos conceptos tendrán una realización específica en Mecánica Cuántica.

Modificado: 2024.02.14

Contenido: Operadores. Espacio de Banach de operadores. Operadores autoadjuntos y unitarios. Operadores compactos. Proyectores. Teorema espectral.
Contenido Apéndice: ...

Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulos 6, 8 y 9.

Dedicación: dos (2) clases.

2.1 Operadores en espacios normados

En esta sección definimos propiedades de operadores en espacios normados.

Definición: Sean N, M espacios vectoriales. Un **operador** $A : N \to M$ es **lineal** si, para escalares a, b y todo x, $y \in N$, se verifica

$$A(ax + by) = aAx + bAy\,.$$

Ejemplos:

- El **operador integral** $T : C[a, b] \to C[a, b]$ es lineal.
- El **operador integral** $T : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$, con núcleo integral acotado es lineal.
- El **operador diferencial** $D : C^1[a, b] \to C[a, b]$ es lineal.
- Las **distribuciones** son lineales.

Definición: Sean N, M espacios normados, y X un subconjunto de N. Un **operador** $T : X \to M$ es **continuo en un punto** $x \in X$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in X$,

$$||Tx - Ty|| < \varepsilon$$

tal que $||x - y|| < \delta$. El **operador** T es **continuo en el subespacio** X, si es continuo en todos los puntos de X.

Ejemplo: El operador T en $\mathcal{R}^2$ que traslada cada elemento verticalmente una unidad $T : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \to (x_1, x_2 + 1)$ es continuo.
Veamos...

$$||T\boldsymbol{x} - T\boldsymbol{x}'|| = ||(x_1, x_2 + 1) - (x_1', x_2' + 1)|| = ||(x_1 - x_1', x_2 - x_2')|| = ||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|| < \varepsilon\,.$$

Por otro lado,

$$||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|| = ||(x_1, x_2) - (x_1', x_2')|| = ||(x_1 - x_1', x_2 - x_2')|| < \delta$$

Luego, para cada ε podemos tomar $\delta = \varepsilon$ para que se verifique $||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|| < \delta$. Esto vale para cualquier $\boldsymbol{x}' \in \mathcal{R}^2$, luego T es continuo en $\mathcal{R}^2$.

Definición: Sean N, M espacios normados, y X un subconjunto de N. Un **operador** $T : X \to M$ (no necesariamente lineal) es **uniformemente continuo** sobre X si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$, dependiendo sólo de ε tal que

$$||Tx - Ty|| < \varepsilon$$

siempre que $||x - y|| < \delta$.

Ejemplos:

- $T : \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \to \boldsymbol{x}' = (x_1, x_2 + 1)$ es uniformemente continuo porque δ, depende sólo de ε y no de $\boldsymbol{x}'$.
- En cada espacio normado N, la norma $x \to ||x||$ es una transformación uniformemente continua.
- El operador integral T en el espacio L_2, con núncleo integral $K(x, y)$ acotado, es uniformemente continuo.

Teorema: Si un **operador lineal** $A : N \to M$ es **continuo** en cada punto $x \in N$, entonces el operador es **uniformemente continuo** en N.

Definición: Sea A un operador (no necesariamente lineal) de $N \to M$, con N, M espacios normados. El **operador** A es **acotado** si, para todo $x \in N$, existe un número m tal que

$$||Ax|| \leq m||x||\,.$$

Teorema: Para un operador **lineal**, continuidad y acotado son **equivalentes**.

Definición: En un espacio normado, un **conjunto acotado** es un conjunto tal que todos sus puntos están a una distancia finita de cualquier punto dado.

Teorema: Un operador lineal es **acotado** si y sólo si **mapea** cada conjunto acotado en un conjunto acotado.

Definición: Si A es acotado se define su **norma** como

$$||A|| = \sup \left\{ \frac{||\mathrm{Ax}||}{||\mathrm{x}||} : \mathrm{x} \in \mathrm{N}, \mathrm{x} \neq 0 \right\} .$$

Luego,

$$||Ax|| \leq ||A|| \, ||x|| \, .$$

Ejemplo: Consideremos un operador integral sobre $L_2[a,b]$. Si el núcleo integral K es de Lipschitz (ver Apéndice A.2), entonces K es un operador acotado. Del análisis que hicimos allí tenemos que para el operador

$$T : f \to \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

resulta

$$||T|| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

Con una definición de norma para operadores estamos en condiciones de definir espacios normados de operadores.

Definición: Si N, M son espacios normados, el **conjunto de todos los operadores lineales acotados** $N \to M$ **es un espacio normado** con las operaciones de suma $(A+B)x = Ax+Bx$, producto con escalar $(cA)x = c(Ax)$ y norma $||A|| = sup \left\{ \frac{||Ax||}{||x||} : x \in N, x \neq 0 \right\}$. Este espacio es denotado como

$$B(N, M) \, .$$

Definición: El **espacio** $B(N,M)$ de operadores lineales acotados $N \to M$ es un **espacio de Banach** si el espacio M es de Banach.

Definición: Si $A, B \in B(N,N)$, entonces el operador AB definido como

$$(AB)x = A(Bx)$$

para todo $x \in N$ define el **operador producto** AB, el cual es acotado y lineal, y satisface

$$||AB|| \leq ||A|| \, ||B|| \, .$$

Propiedades:

- $(AB)C = A(BC)$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $A(B+C) = AB + AC$

Definición: La **indentidad** $I_N : N \to N$ es el operador que mapea cada vector de N en sí mismo. Usualmente lo notamos I en lugar de I_N.

Definición: Si $x_1, x_2, \cdots$ son elementos de un espacio normado, se dice que la serie $\sum_n x_n$ **converge absolutamente** si la serie de números $\sum_n ||x_n||$ converge.

Teorema: Una **serie absolutamente convergente** en un espacio de Banach es **convergente**.

Series absolutamente convergentes de operadores lineales acotados de un espacio de Banach pueden ser reacomodadas y multiplicadas término a término (como en el análisis usual).

Los teoremas que siguen dan un criterio para la convergencia de series de potencia de operadores en término de convergencia de una serie asociada a números.

Teorema: Sea $A \in B(N,N)$, y sea (c_n) una sucesión de números. Si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n ||A||^n$$

converge absolutamente, entonces la serie de operadores

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

converge absolutamente a un elemento de $B(N,N)$.

Definición: Un **operador** $A : N \to M$ es **invertible** si para cada $x \in M$ existe uno y sólo un $y \in N$ tal que $Ay = x$. El mapeo

$$x \to y$$

es llamado inversa de A, y lo denotamos como

$$y = A^{-1}x\,.$$

Teorema: Sea A un operador lineal acotado $N \to N$ con N un espacio de Banach. Si $||A|| < 1$ entonces $I - A$ es invertible,

$$(I - A)^{-1}\,,$$

acotado, y

$$||(I-A)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||A||}\,.$$

2.2 Operadores Unitarios

En esta sección definimos operadores en espacio de Hilbert. Recordemos que pueden definirse en ellos una norma.

Definición: Si $A : H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces existe un único operador $A^* : H \to H$ tal que

$$(x, A^*y) = (Ax, y)$$

para todo $x, y \in H$. El **operador** A^* es lineal y acotado, con $||A^*|| = ||A||$ y $(A^*)^* = A$, y se lo denomina **adjunto de** A.

Ejemplos:

- Sea $A : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ un operador que multiplica cada vector por una matriz real M de $n \times n$,
$$A(x) = Mx\,.$$
Sea M^* la matriz adjunta de M correspondiente al operador adjunto A^*, resulta que M^* es la matriz traspuesta de M.
Veamos...
$$\begin{aligned}(x, A^*y) = (Ax, y) &= \sum_i (Ax)_i \bar{y}_i = \sum_i \sum_j A_{ij} x_j \bar{y}_i \\ &= \sum_j \sum_i A_{ji} x_i \bar{y}_j = \sum_i x_i \sum_j A^T_{ij} \bar{y}_j \\ &= \sum_i x_i (\overline{A^T y})_i = (x, A^T y)\end{aligned}$$

- Sea $A : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$ un operador que multiplica cada vector por una matriz compleja M de $n \times n$, $A(x) = Mx$. En este caso M^* es la traspuesta conjugada M.

- Sea $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$ un operador integral
$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy\,,$$
con K una función continua. Luego,
$$\begin{aligned}(f, A^*g) &= (Af, g) \\ &= \int_a^b (Af)(x)\overline{g(x)} dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y) f(y) dy\right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)} dx\right] f(y) dy\end{aligned}$$
intercambiamos $x \leftrightarrow y$ tenemos
$$\begin{aligned}&= \int_a^b \left[\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy}\right] f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) \left[\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy}\right] dx\end{aligned}$$
Luego,
$$(A^*g)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy\,,$$

esto es, el adjunto del operador integral es un operador integral con un núcleo que se construye a partir del primero intercambiando las variables y conjugando.

Definición: Un operador lineal acotado es **autoadjunto** o **hemitiano** si
$$A^* = A\,.$$

Ejemplo: Si el núcleo integral del ejemplo anterior fuera real y simétrico, esto es,

$$\overline{K(x,y)} = K(y,x)\,,$$

resultaría que A^* coincide con A, luego A es autoadjunto.
Veamos...

$$(f, A^*g) =_1 (Af, g) = \int_a^b (Af)(x)\overline{g(x)}dx$$

$$=_2 \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)f(y)dy\right]\overline{g(x)}dx = \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y)\overline{g(x)}dx\right] f(y)dy$$

$$=_3 \int_a^b \left[\overline{\int_a^b \overline{K(y,x)}g(y)dy}\right] f(x)dx = \int_a^b f(x)\left[\overline{\int_a^b K(x,y)g(y)dy}\right] dx$$

$$= (f, Ag)$$

Teorema: Si A es autoadjunto, entonces (u, Au) es **real** para cualquier u.
Veamos...

$$(u, Au) = \overline{(Au, u)} = \overline{(u, Au)}\,.$$

Definición: Si A es un operador acotado autoadjunto, entonces, su **norma** es

$$||A|| = \sup\{|(\mathrm{x}, \mathrm{Ax})| : ||\mathrm{x}|| = 1\}\,.$$

Teorema: Sea A un operador autoadjunto sobre H y sea V el rango de A. Si V es denso en H, entonces $A : H \to V$ es **invertible**.

Definición: Un **operador** lineal acotado sobre un espacio de Hilbert H es llamado **unitario** si

$$A^*A = AA^* = I\,.$$

Notar que los operadores unitarios son invertibles
Si A es unitario entonces

$$||Ax|| = ||x||\,,$$

para todo $x \in H$, esto es A no cambia la longitud. Geométricamente, puede intepretarse como una rotación.

Ejemplo: La siguiente exponencial del operador autoadjunto B es unitaria,

$$e^{iB}\,.$$

En Mecánica Cuántica, esta clase de operadores están asociados transformaciones de simetría (rotación, traslación, etc.)

Teorema: Todos los **autovectores** de un operador unitario tienen **módulo unidad**, y autovectores de autovalores diferentes son ortogonales.

Teorema: Si A es un operador autoadjunto de un espacio de Hilbert, entonces todos sus **autovalores** son **reales**, y autovectores de autovalores diferentes son **ortogonales**.
Veamos...
Sea
$$Ax = \lambda_x x :$$

- Sobre autovalor real,
$$\begin{aligned} &(Ax, x) = (\lambda_x x, x) = \lambda_x (x, x) \\ &(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax) = (x, \lambda_x x) = \bar{\lambda}_x (x, x) \\ \Rightarrow\ &\lambda_x (x, x) = \bar{\lambda}_x (x, x)\,, \end{aligned}$$
con $(x, x) \neq 0$. Luego, $\lambda_x = \bar{\lambda}_x \in \mathcal{R}$.

- Sobre ortogonalidad,
$$\begin{aligned} &(Ay, x) = (\lambda_y y, x) = \lambda_y (y, x) \\ &(Ay, x) = (y, A^* x) = (y, Ax) = (y, \lambda_x x) = \bar{\lambda}_x (y, x) = \lambda_x (y, x)\,, \end{aligned}$$
restando miembro a miembro
$$0 = (\lambda_y - \lambda_x)(y, x)$$
si $\lambda_y \neq \lambda_x$, entonces $(y, x) = 0$.

Teorema: Si A es un operador acotado y λ un autovalor de A, entonces lo **autovalores están acotados** por la norma de A,
$$|\lambda| \leq ||A||\,.$$

2.3 Operadores compactos

Comencemos definiendo conjunto compacto y conjunto relativamente compacto.

Definición: Un **subconjunto** S de un espacio normado B es **compacto** si cada sucesión de elementos de S tiene una sub sucesión la cual converge a un elemento de S.

Ejemplos:

- Existe un teorema del análisis clásico que afirma que cada sucesión infinita de números reales en un **intervalo cerrado** tiene una sub sucesión convergente, luego, los intervalos cerrados en $\mathcal{R}$ son compactos.

- Los **intervalos abiertos** en $\mathcal{R}$ **no** son compactos. Por ejemplo, en $(0, 1)$ la sucesión $1/2,\ 1/3, \cdots$ converge a 0. Luego, cada sub sucesión converge a cero y ninguna sub sucesión converge a un elemento de $(0, 1)$.

Definición: Un **subconjunto** S de un espacio normado N es **relativamente compacto** si cada sucesión en S tiene una subsucesión que converge a un elemento de N.

A diferencia de la compacticidad no pide que la sub sucesión converja en S sino en N, luego, la clausura de S es compacto.

Ahora sí estamos en condiciones de definir operadores compactos.

Definición: Un **operador** A sobre un espacio normado es **compacto** si mapea cada conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto.

Teorema: Para **operadores lineales**, compacticidad es más fuerte que acotado; cada operador **compacto es acotado**, pero no vale la inversa.

Teorema: Cada operador lineal acotado en un espacio de **dimensión finita** es compacto.

Teorema: En un espacio de dimensión infinita, cada operador lineal acotado cuyo rango es finito es compacto.

Ejemplos:

- El operador integral
$$Tu = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)u(y)dy\,,$$
mapea cada función en una combinación lineal de $\sin x$ y $\cos x$ (ver detalles el pág. 227 del libro), esto es, en un subespacio de $L_2[0, 2\pi]$ de dos dimensiones, por lo tanto, T es compacto.

- Si $K(x, y)$ es continuo para $a \leq x,\ y \leq b$, y $f(y, z)$ es continua para $a \leq y \leq b$ y todo z, entonces el operador integral $T : C[a, b] \to C[a, b]$ es compacto,
$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y, u(y))dy\,.$$

- El operador identidad es acotado pero no compacto en un espacio de dimensión infinita.

- El operador lineal integral T sobre $L_2[a, b]$ con núcleo integral K es compacto si K es acotado, $\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy < \infty$.

El Apéndice A.9 introduce operadores integrales compactos con núcleo separable.

Todas las definiciones y teoremas introducidos hasta el momento fueron necesarios para justificar que los autovectores de operadores autoadjuntos compactos sobre un espacio de Hilbert forman una base para el espacio. Recordar que en el capítulo anterior aprendimos sobre las propiedades de las bases pero no se dio una forma de determinarla.

Teorema espectral: Sea A un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H. Entonces H tiene una base (e_n) consistente de autovectores ortonormales de A. Si H es de dimensión infinita, los autovalores $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y si
$$x = \sum_n c_n e_n\,,$$
entonces
$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n e_n\,.$$

El hecho que H tenga una base ortonormal que son autovectores de A es equivalente a lo siguiente: si tomamos una base ortonormal para cada autoespacio E_i de A, entonces la unión de todos estos conjuntos es una base ortonormal de H, esto es
$$H = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots\,.$$

Definición: Un **conjunto completo** en un espacio producto interno es un conjunto tal que el único vector ortogonal a todos los miembros del conjunto es el vector nulo. Un conjunto ortogonal completo es lo mismo que una **base**. Un conjunto ortogonal de vectores en un espacio producto interno es **completo** si y sólo si es una base.

Teorema: Si A y B son operadores autoadjuntos compactos que conmutan, esto es

$$AB = BA\,,$$

entonces, **ambos tienen un conjunto ortonormal completo** que son autovectores a ambos.

Definición: Suele usarse la siguiente expresión para notar operadores que conmuntan

$$[A, B] = 0\,,$$

donde a $[\cdot,\cdot]$ se le llama **conmutador** y significa

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

2.4 Proyectores

Definición: Sea S un subespacio del espacio de Hilbert H. El operador $P : H \to S$, definido por

$$Px = y\,,$$

con $x = y + z$, $x \in H$, $y \in S$ y $z \perp S$, se denomina **operador proyección** sobre S, siendo el subespacio S el **rango** de P.

Teorema: Un operador proyección P es lineal, acotado, autoadjunto, y satisface $P^2 = P$. Si $P \neq 0$, entonces, $||P|| = 1$.

Teorema: Si P es un operador lineal autoadjunto acotado con $P^2 = P$, entonces P es un operador proyección.

Definición: Dos **subespacios** S y T de un espacio de Hilbert **son ortogonales** si $(s, t) = 0$ para todo $s \in S$ y todo $t \in T$.

Definición: Dos **proyectores** P y Q en un espacio de Hilbert H son **ortogonales**, si sus rangos son subespacios de Hilbert ortogonales.

Teorema: Si P y Q son proyectores ortogonales, entonces

$$PQ = 0\,.$$

Definición: Un **conjunto** $\{P_n\}$ de **proyectores** es llamado **conjunto ortogonal** de proyectores si

i) P_i es ortogonal a P_j para todo $i \neq j$.

ii) $P_i \neq 0$ para cada i.

Ejemplo: Sea (e_n) una base ortonormal de H, y sea que para cada r, P_r es el proyector del subespacio unidimensional E_r expandido por e_r. Si $r \neq n$, los subespacios E_n y E_r son ortogonales, y los proyectores P_n y P_r son ortogonales. $\{P_n\}$ es un conjunto ortogonal de proyectores.

Teorema espectral en término de proyectores: Sea A un operador autoadjunto compacto sobre un espacio de Hilbert H, con autovectores ortogonales $e_1, e_2, \cdots$ y autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. Sea P_r un proyector sobre el subespacio expandido por e_r. Entonces, para cada $x \in H$

$$x = \sum_r P_r x\,,$$

y

$$A = \sum_r \lambda_r P_r\,.$$

Ejemplos: Sea $A = \sum_r \lambda_r P_r$, entonces

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_r \lambda_r^n P_r \\ p(A) &= \sum_r p(\lambda_r) P_r \quad \text{con} \quad p(x) = \sum_{s=1}^{n} a_s x^s \\ f(A) &= \sum_r f(\lambda_r) P_r \quad \text{con} \quad f(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to 0} 0 \end{aligned}$$

Appendix A

Material Complementario

Este apéndice contiene información que complementa o contextualiza conceptos para una mejor comprensión de los temas desarrollados en los capítulos anteriores.
Los temas contenidos en este apéndice no entran en la evaluación del curso.

A.1 Punto fijo

Las soluciones x a la ecuación

$$x = Tx$$

son denominadas puntos fijos de la transformación T, con x un elemento del espacio normado.

El interés en ecuaciones de la forma $x = Tx$ radica en el hecho que muchas ecuaciones de la Física Matemática pueden reescribirse de modo que tengan esta estructura. Lo práctico de esta formulación es que, mediante un procedimiento iterativo, se podría hallar las soluciones de interés. Esto es, comenzando con una solución aproximada x_0, resultará que $Tx_0 \neq x_0$ pero podría ser que $x_1 = Tx_0$ sea una mejor aproximación a la solución exacta x que x_0. Si el razonamiento fuera correcto, sucesivas aplicaciones de T, esto es, $Tx_1 = x_2$, $Tx_2 = x_3, \cdots$, llevaría a que x_n (con $x_n = Tx_{n-1}$ y n suficientemente grande), estaría más 'cerca' de x. Las soluciones x_n generan una sucesión que se espera converja a la solución exacta x.

Ejemplo que converge: $x = Tx$ con $T = cos$, y $x \in [0, \pi/2]$.

Ejemplo que no converge: $x = Tx$ con $T = tg$, y $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

Para garantizar la convergencia del proceso iterativo introducimos algunas definiciones y enunciamos el teorema de la contracción.

Definición de contracción: Una transformación $T : X \to X$, con X un subconjunto de un espacio normado N, es denominada una transformación de contracción si existe $0 < a < 1$ tal que,

$$||Tx - Ty|| \leq a||x - y||$$

para todo $x, y \in X$.

El siguiente caso muestra la sutileza en la definición. Sea $T : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$, con $Tx = f(x) = x + e^{-x}$. Luego,

$$||Tx - Ty|| = |f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}|x - y| = |f'(\xi)||x - y|$$

con $\xi > 0$. El coeficiente $a = |f'(\xi)| < 1$ pero, debido a que $f'(\xi) = 1 - e^{-\xi}$ puede aproximarse a 1 tanto como uno quiera, por lo que no satisface la condición de contracción. (notar que si fuera una constante tan cerca como un quiera no habría problema, pero en este ejemplo no es una constante!).

El siguiente teorema garantiza que la sucesión x_n generada a partir de T^n converja a un elemento del espacio donde T fue definido.

Teorema de la contracción: si $T : X \to X$ es una contracción de un subconjunto cerrado X de un espacio de Banach (espacio normado completo), entonces existe exactamente un $x \in X$ tal que $Tx = x$. Para cada $x_0 \in X$, la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = Tx_n$ converge a x.

Demostración del teorema de contracción: Desarrollemos la demostración porque nos da una forma práctica de computar la solución. Vamos a ver que (i) sucesión (x_n) definida por la contracción es de Cauchy (no perder de vista que el espacio es completo!), (ii) el límite de la sucesión es un punto fijo y (iii) que la solución es única.

(i) Veamos que es una sucesión de Cauchy: Sea $m > n$, entonces

$$||x_m - x_n|| \leq ||x_m - x_{m-1}|| + ||x_{m-1} - x_{m-2}|| + \cdots + ||x_{n+1} - x_n||$$

donde hemos usado la desigualdad triangular. Veamos como acotar cada uno de los términos de la derecha.

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - x_k|| &= ||Tx_k - Tx_{k-1}|| \\
&\leq a^1 ||x_k - x_{k-1}|| = ||Tx_{k-1} - Tx_{k-2}|| \\
&\leq a^2 ||x_{k-1} - x_{k-2}|| = ||Tx_{k-2} - Tx_{k-3}|| \\
&\vdots \\
&\leq a^i ||x_{k-(i+1)} - x_{k-i}|| \\
&\vdots \\
&\leq a^k ||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$

Luego, en el desarrollo de $||x_m - x_n||$, acotamos cada sumando con la desigualdad $||x_{k+1} - x_k|| \leq a^k ||x_1 - x_0||$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
||x_m - x_n|| &\leq ||x_m - x_{m-1}|| + ||x_{m-1} - x_{m-2}|| + \cdots + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \left(a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a^n\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq a^n \left(a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \cdots + 1\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq a^n \frac{1 - a^{m-n-1}}{1 - a} ||x_1 - x_0|| = \left(\frac{a^n}{1-a} - \frac{a^{m-1}}{1-a}\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq \frac{a^n}{1-a} ||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$

donde hemos usado $a^k + a^{k-1} + \cdots + 1 = (1 - a^k)/(1 - a)$.

Luego, $||x_m - x_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que muestra que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Debido a que el espacio es completo, la sucesión (x_n) es convergente. Llamando $\bar{x}$ al límite, resta mostrar que $T\bar{x} = \bar{x}$ y que $\bar{x}$ es único.

(ii) Veamos que el límite es un punto fijo: Esto es, que $\bar{x}$ verifica $T\bar{x} = \bar{x}$.

$$\begin{aligned} ||T\bar{x} - \bar{x}|| &= ||T\bar{x} - Tx_n + Tx_n - \bar{x}|| \\ &\leq ||T\bar{x} - Tx_n|| + ||Tx_n - \bar{x}|| \\ &\leq ||T\bar{x} - Tx_n|| + ||x_{n+1} - \bar{x}|| \\ &\leq a||\bar{x} - x_n|| + ||\bar{x} - x_{n+1}|| \end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ ambos término tienden a cero, luego $||T\bar{x} - \bar{x}||$ tiende a cero, y $T\bar{x} - \bar{x} = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

(iii) Veamos que el límite es único: supongamos que $T\bar{x} = \bar{x}$ y $T\bar{y} = \bar{y}$. Entonces

$$||\bar{x} - \bar{y}|| = ||T\bar{x} - T\bar{y}|| \leq a||\bar{x} - \bar{y}||\,,$$

lo cual es una contradicción, a menos que $||\bar{x} - \bar{y}|| = 0$, luego $\bar{x} = \bar{y}$.

A.2 Ecuaciones integrales

La tecnología para hallar soluciones utilizando el teorema de punto fijo no puede utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales en forma directa, porque el operador diferencial no es una contracción. Pero convirtiendo la ecuación diferencial en una integral resulta en un problema que es resoluble por el teorema de punto fijo. Primero mostramos un ejemplo donde un operador diferencial no define una contracción.

Sea

$$f(x) = 1$$

para todo x y sea

$$g(x) = 1 + \frac{\sin n^2 x}{n}\,.$$

La cantidad

$$||Df - Dg|| = ||n \cos n^2 x||$$

con D el operador derivada, puede hacerse tan grande como uno desee. Mientras

$$||f - g|| = \left|\left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right|\right|$$

puede ser tan pequeño como queramos, tomando n suficientemente grande. Luego, el operador D no define una contracción, pues no existe $0 < a < 1$ que satisfaga $||Df - Dg|| \leq a||f - g||$ para todo f y g en el espacio normado C.

Estamos interesados en ecuaciones integrales de la forma,

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = f(x)$$

Introduzcamos algunas definiciones y condiciones para que la solución de punto fijo converja.

Condición de Lipschitz: Una función $F(x)$ se dice que satisface la condición de Lipschitz si existe una constante k tal que

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

para todo x_1, x_2.

Observación: Si F es diferenciable y $|F'(x)| \leq k$ para todo x, entonces F satisface la condición de Lipschitz. El recíproco no es cierto, esto es, una función que satisface la condición de Lipschitz, no necesariamente F es diferenciable.

En lo que sigue listamos las condiciones para las cuales la ecuación $u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = f(x)$ tiene solución en el espacio L_2.

Teorema sobre la existencia de solución de la ecuación integral: La siguiente ecuación integral

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = h(x)$$

tiene una solución única $u \in L_2[a, b]$, si

- $h \in L_2[a, b]$
- K satisface una condición de Lipschitz con respecto a su tercer argumento,

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq N(x, y)|z_1 - z_2|$$

  para todo z_1, z_2, donde N es de cuadrado integrable con

$$\int_a^b dx \int_a^b dy|N(x, y)|^2 = P^2$$

- $K(x, y, 0)$ es continua para $x, y \in [a, b]$
- $|\lambda| < \frac{1}{P}$

A.3 Ecuación de Sturm-Liuville

Apliquemos la transformación y condiciones de la sección anterior a la ecuación de Sturm-Liuville, con condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$,

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda f(x)u(x) &= 0 \\ -g''(x, y) &= \delta(x - y) \\ u(x) &= \lambda \int_0^1 K(x, y)u(y)dy \\ K(x, y) &= g(x, y)f(y) \end{aligned}$$

Para escribirlo en la forma

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = h(x)$$

notamos que

$$h(x) = 0 \in L_2$$

$$K(x, y, u(y)) = g(x, y)f(y)u(y) \Rightarrow K(x, y, z) = g(x, y)f(y)z$$

donde $K(x, y, z)$ debe verificar

$$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq N(x, y)|z_1 - z_2|$$

de modo que $N(x, y) = |g(x, y)f(y)|$.

El teorema afirma que existe una solución única si $\lambda < P^{-1}$, donde

$$P = \left(\int_a^b dx \int_a^b dy |N(x, y)|^2\right)^{1/2}$$

Pero la ecuación siempre tiene la solución trivial por solución, lo que implica que la solución

$$u(x) = 0$$

es la única solución si $\lambda < P^{-1}$.

Por lo expuesto, se infiere que no existen autovalores, esto es, valores de lambda para los cuales la ecuación $u''(x) + \lambda f(x)u(x) = 0$ tenga solución no trivial cuando $\lambda < P^{-1}$. Luego, todos los autovalores satisfacen

$$\lambda \geq \left|\int_a^b dx \int_a^b dy |g(x, y)f(y)|^2\right|^{-1/2}$$

lo que da una cota o estimación útil para la determinación de los autovalores.

En la Secc. 1.2 damos un ejemplo numérico calculando el primer autovalor de la ecuación de Sturm-Liuville para $f(x) = 1$.

A.4 Demostración de la desigualda de Schwartz

En este apéndice se demuestra la desigualdad de Schwartz $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$.

Demostración de $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$*:* Para cualquier escalar c resulta,

$$\begin{aligned}
0 \leq (x - cy, x - cy) &= (x - cy, x) + (x - cy, -cy) \\
&= (x, x) + (-cy, x) + (x, -cy) + (-cy, -cy) \\
&= (x, x) - c(y, x) - \bar{c}(x, y) + |c|^2(y, y) \\
&= (x, x) - c(y, x) - \bar{c}\,\overline{(y, x)} + |c|^2(y, y) \\
&= (x, x) - 2Re[c(y, x)] + |c|^2(y, y)
\end{aligned}$$

luego,

$$0 \leq (x, x) - 2Re[c(y, x)] + |c|^2(y, y)\,.$$

Para $(y,y) \neq 0$, sea $c = \frac{(x,y)}{(y,y)}$

$$0 \leq (x,x) - 2Re[c(y,x)] + |c|^2(y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2Re\left[\frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x)\right] + \left|\frac{(x,y)}{(y,y)}\right|^2 (y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2Re\left[\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\right] + \left|\frac{(x,y)}{(y,y)}\right|^2 (y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$

$$\leq (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$

donde hemos usado que el corchete y (y,y) son magnitudes reales.

Luego,

$$0 \leq (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \Rightarrow |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

Demostración de la $|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y)$ *para* x, y *l.i.:*
(Vuelta) Si x e y son linealmente dependientes, entonces $x = cy$ (suponiendo $y \neq 0$) para algún escalar c. Entonces

$$|(x,y)|^2 = |(cy,y)|^2 = |c|^2\,|(y,y)|^2$$

$$= c\bar{c}\,(y,y)^2 = c\bar{c}\,(y,y)(y,y)$$

$$= (cy,cy)(y,y) = (x,x)(y,y)$$

Luego, $|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y)$. donde hemos usado que (y,y) es real.

(Ida) Sea $|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y)$ y veamos que son linealmente dependientes buscando coeficientes no nulos que den $\alpha x + \beta y = 0$. Para cualquier α, β, tenemos (repitiendo el desarrollo anterior)

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = |\alpha|^2(x,x) + 2Re[\alpha\bar{\beta}(x,y)] + |\beta|^2(y,y)$$

$$= |\alpha|^2(x,x) + 2|\alpha|\,|\beta|\,|(x,y)|\,\cos\delta + |\beta|^2\,(y,y)$$

donde δ depende de las fases de α, β y (x,y). Elegimos las fases de α, β tal que $\delta = \pi$. Entonces

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \left(|\alpha|\,\sqrt{(x,x)} - |\beta|\,\sqrt{(y,y)}\right)^2$$

Sea que elegimos las magnitudes de α y β de modo la ecuación de arriba se anule, esto muestra que $\alpha x + \beta y = 0$ con α y β no nulos.

A.5 Ortonormalización de Gram-Schmidt

Dada cualquier sucesión (f_n) de elementos de un espacio producto interno, existe una sucesión ortogonal (g_n) tal que cada combinación lineal finita de f_n es una combinación lineal de g_n y vice versa.

Por ejemplo, a partir de los monomios $f_n(x) = x^n$, que no son ortogonales, podemos generar un conjunto infinito de funciones que forma una base ortogonal, y luego, eventualmente, ortonormal.

Construcción de la base:

- *Construcción de una sucesión linealmente independiente:* Construyamos primero una nueva sucesión (F_n) a partir de (f_n) eliminando el vector nulo cada vez que aparezca en (f_n), y también quitando cualquier f_n que sea una combinación lineal de los elementos precedentes de la sucesión. Entonces (F_n) es una sub sucesión de (f_n) , y cualquier subconjunto finito de (F_n) es linealmente independiente,.
- *Construcción de la base ortonormal. Proceso de Gram-Schmidt:* Siguiendo, construímos (g_n) a partir de (F_n) paso a paso.
  - Tomemos
  $$g_1 = F_1$$
  - Tomemos $g_2 = F_2 + cg_1$, con c tal que $(g_2, g_1) = 0$:
  $$0 = (g_2, g_1) = (F_2, g_1) + (cg_1, g_1) \Rightarrow c = -\frac{(F_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$$
  Luego,
  $$g_2 = F_2 - \frac{(F_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$
  - Tomemos $g_3 = F_3 + dg_2 + eg_1$ con d, e determinados a partir de $(g_3, g_2) = (g_3, g_1) = 0$.
  $$0 = (g_3, g_2) = (F_3, g_2) + d(g_2, g_2) + e(g_1, g_2) \Rightarrow d = -\frac{(F_3, g_2)}{(g_2, g_2)}$$
  $$0 = (g_3, g_1) = (F_3, g_1) + d(g_2, g_1) + e(g_1, g_1) \Rightarrow e = -\frac{(F_3, g_1)}{(g_1, g_1)}$$
  Luego,
  $$g_3 = F_3 - \frac{(F_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 - \frac{(F_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$
  $\vdots$

Ya tenemos la sistemática:

- $g_1 = F_1$
- $g_2 = F_2 - \frac{(F_2,g_1)}{(g_1,g_1)} g_1$
- $g_3 = F_3 - \frac{(F_3,g_2)}{(g_2,g_2)} g_2 - \frac{(F_3,g_1)}{(g_1,g_1)} g_1$

  $\vdots$

A.6 Mejor aproximación

Dado un conjunto ortogonal finito $\{e_1, \cdots, e_N\}$, los coeficientes c_n que minimizan

$$||x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n||$$

son los de Fourier $c_n = \frac{(x,e_n)}{||e_n||^2}$.

Veamos...
Sea

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} + d_n$$

y mostremos que la mejor aproximación implica $d_n = 0$.

$$||x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n||^2 = \left(x - \sum_n \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} e_n - \sum_n d_n e_n, x - \sum_n \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} e_n - \sum_n d_n e_n \right)$$

$$= ||x||^2 - \sum_n \frac{|(x, e_n)|^2}{||e_n||^2} + \sum_n |d_n|^2 ||e_n||^2$$

El término de la derecha es mínimo cuando $d_n = 0$ para todo n.

A.7 Funcionales en espacios normados y de Hilbert

Los funcionales son los operadores más simples en el espacio de Hilbert y son la base para la teoría de operadores autoadjuntos que introduciremos en el siguiente capítulo.

Definición de funcional en espacio normado: Un funcional sobre un espacio normado es un mapeo desde el espacio a los números reales o complejos. Un funcional lineal f es un funcional que satisface $f(ax+by) = af(x)+bf(y)$, con a y b cualquier número (real o complejo) y x e y cualesquiera elementos del espacio normado.

Ejemplo: Para cualquier $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^3$ fijo, podemos definir un funcional $f_\nu : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^3$, el cual es lineal.

Teorema. Continuidad de funcionales lineales: Si un funcional lineal es continuo en cada punto, entonces es uniformemente continuo[1]. Luego, un funcional lineal es o discontinuo en todo lugar o uniformemente continuo en todo lugar, por lo que llamaremos a un funcional lineal uniformemente continuo simplemente 'continuo'.

Ejemplo 1 de 2: En el espacio $C[-1, 1]$ con la norma del supremo, el funcional

$$\Delta_1 : \phi \to \phi(0)$$

es continuo.

[1]Un funcional es uniformemente continuo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiendo de ε, tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $||x - y|| < \delta$

Ejemplo 2 de 2: En el espacio $C[-1,1]$ con la norma en media el funcional

$$\Delta_2 : \phi \to \phi(0)$$

es un funcional diferente a Δ_1, porque está definido en un espacio normado diferente, y es un funcional discontinuo.

Sobre los ejemplos 1 y 2: Veamos porqué Δ_1 es continuo y Δ_2 es discontinuo. Sean $\phi, \psi \in C[-1,1]$

- tenemos
$$|\Delta_1(\phi) - \Delta_1(\psi)| = |\phi(0) - \psi(0)| \leq ||\phi - \psi||$$
de modo que se satisface la definición de uniformemente continuo con $\delta = \varepsilon$.
Observación: Este funcional se parece a la delta definida en las distribuciones, pero es diferente, pues está definido en un espacio diferente y la definición de continuidad es diferente.

- La sucesión de funciones
$$f_n(x) = n^{\frac{1}{8}} e^{-nx^2}$$
es convergente, con $||f_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero Δ_2 mapea f_n en $n^{1/8}$,
$$\Delta_2(f_n) = f_n(0) = n^{\frac{1}{8}} \,,$$
la cual es una sucesión divergente, luego, Δ_2 no es continua. Si lo fuera, entonces el teorema sobre mapeos continuos de sucesiones convergentes[2] sería violado.

Definición de funcionales acotados: Un funcional f es acotado si existe un número A tal que

$$|f(x)| \leq A||x||$$

para todo x en el espacio.

Teorema. Funcionales lineales acotados: Un funcional lineal es continuo si y sólo si es acotado.

Definición de funcionales en espacio de Hilbert: En el espacio de Hilbert existe la siguiente clase importante de funcionales: para cada u en el espacio existe un funcional x

$$x \to (x, u) \,.$$

Proposición: Si u es cualquier miembro fijo de un espacio de Hilbert H, el funcional $f : x \to (x, u)$ es lineal y continuo.

Observación: En un espacio real el funcional $x \to (u, x)$ es tambien lineal y continuo, dado que el producto interno es simétrico. Pero en un espacio complejo este funcional no es lineal, dano que $(u, ax) = \bar{a}(u, x)$. Los funcionales con esta propiedad son denominados **funcionales antilineales**.

[2]Sea $T : X \to M$ continuo en $x \in X$, donde $X \subset N$, y M y N son espacios normados. Si (x_n) es una sucesión en X con $x_n \to x$ en N, entonces $Tx_n \to Tx$ en M.

A.8 Convergencia débil

En esta sección damos algunos elementos complementarios sobre la convergencia débil introducida en la sección 1.3.

Definición de convergencia débil: Una sucesión (x_n) en un espacio de Hilbert H converge débilmente si para cada $y \in H$ la sucesión de númertos (x_n, y) converge.

Ejemplo: Veamos un ejemplo donde una sucesión no converge en la forma usual, denominada **convergencia fuerte**, pero sí en la débil. Sea (e_n) un conjunto ortonormal infinito en un espacio producto interno. Por el teorema de la desigualdad de Bessel ($\sum_n |c_n|^2 \leq ||x||^2$, con $c_n = (x, e_n)$) la suma

$$\sum_n |(y, e_n)|^2 \quad \text{converge}$$

luego,

$$(y, e_n) \to 0$$

para cada y. Pero $||e_n|| = 1$, por lo que

$$e_n \nrightarrow 0\,.$$

La definición anterior de convergencia no involucra la idea de un elemento límite, pero éste podría existir. Veamos la siguiente defición.

Definición de convergencia débil de x_n a X: Si $X, x_1, x_2, \cdots$ pertenecen a un espacio de Hilbert H, se dice que $x_n \to X$ débilmente cuando $n \to \infty$ si

$$(x_n, y) \to (X, y)$$

para todo $y \in H$.

Observación muy importante: de las dos definiciones de convergencia débil dadas pareciera concebible que una suseción converja débilbente pero que no converja (débilmente) a ningún elemento de H, pero no es el caso. Se puede demostrar (auque la demostración es muy sutil y altamente técnica) que cada sucesión débilmente convergente tiene un límite débil (lo enunciamos en un teorema más abajo).

Proposicón: Cada sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert es acotada (se usa para demostrar el teorema que sigue).

Teorema: Si (x_n) es una sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert H, entonces existe $X \in H$ tal que $x_n \to X$ débilmente.

Propiedades de la convergencia débil:

- Si $x_n \to X$ e $y_n \to Y$, ambas débilmente, entonces

  $$ax_n + by_n \to aX + bY$$

  débilmente para cualesquiera escalares a y b.

- Los límites débiles son únicos, esto es, si $x_n \to X_1$ y $x_n \to X_2$ ambas débilmente, entonces

  $$X_1 = X_2\,.$$

Proposición: Si $x_n \to X$ fuertemente, entonces $x_n \to X$ débilmente.

Teorema: Cada sucesión acotada en un espacio de Hilbert tiene una sucesión débilmente convergente.

A.9 Operadores completamente continuos

Este apéndice da información complementaria y una clase particular de operadores compactos.

Teorema. Límite de operadores compactos: Sean $A, A_1, A_2, \cdots$ operadores $N \to M$, donde N es un espacio normado y M un espacio de Banach. Si A_i es compacto para todo i y $A_i \to A$ cuando $i \to \infty$, entonces A es compacto.

Definición de núcleo integral separable: El operador integral $A : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

se dice que tiene núcleo separable si

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)q_i(y)\,,$$

con $p_i, q_i \in L_2[a,b]$ para $i = 1, \cdots, n$.

Lemma: Un operador con núcleo separable es compacto.

Teorema. Operador integral compacto: El operador lineal integral sobre $L_2[a,b]$ con núcleo K es compacto si la siguiente integral converge

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\,.$$

Teorema: Si $x_n \to x$ débilmente y A es un operador lineal compacto, entonces

$$Ax_n \to Ax \quad \text{fuertemente}\,.$$

Tales operadores se denominan completamente continuos.

A.10 Propiedades de autovalores

Proposición: Si A es un operador acotado autoadjunto, entonces existe un número λ y una sucesión (x_n) con $||x_n|| = 1$ para todo n, tal que $Ax_n \to \lambda x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. El número λ es igual a $||A||$ o $-||A||$.

Teorema: Si A es un operador lineal autoadjunto compacto, entonces tiene un autovalor λ igual a $||A||$ o $-||A||$; existe un correspondiente autovector normalizado el cual maximiza $|(x, Ax)|$ con $||x|| = 1$, y el máximo valor de $|(x, Ax)|$ es $|\lambda|$.

Observación: Este teorema no sólo garantiza la existencia de un autovalor sino que también da un técnica para hallarlo. Por otro lado, repitiendo el procedimiento pueden obtenerse infinitos autovalores!.

Proposición: Si A es un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H, entonces A tiene un conjunto ortonormal de autovectores $e_1, e_2, \cdots$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, y para cualquier $x \in H$

$$x = \sum_n c_n e_n + y$$

para escalares c_n, con $Ay = 0$. Si H es de dimensión infinita, entonces $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.