MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA II (F1810)

3^{er} año Lic. Física. FCEIA. UNR.

1er Semestre 2024

Módulo III:
Análisis Funcional

Docentes:
Federico Torresi
Alejandro Mezio
Rodolfo M. Id Betan(Rolo)

Reportar errores o comentarios a: idbetan@fceia.unr.edu.ar

July 24, 2024

Contents

Chapter 1

Funciones generalizadas

En el presenta capítulo se introduce el Análisis Funcional. Éste le da un marco teórico riguroso a ciertos conceptos definidos en forma pragmática como por ejemplo la delta de Dirac. En el apéndice A.1 se presentan los resultados de Paul Dirac a los inicios del siglo pasado en el marco de la naciente Mecánica Cuántica. A lo largo de las secciones veremos como cada concepto y propiedad introducido por Dirac quedan enmarcados en el análisis funcional. En este capítulo también se le da significado a integrales y series divergentes. Varios apéndices dan información complementaria o detalles de cómo obtener los resultados mostrados en cada sección.

Modificado: 2023.12.29

Contenido: Forma original de la delta de Dirac. Soporte acotado o compacto. Función test. Distribuciones. Operaciones elementales. Cálculo diferencial. Convergencia. Distribuciones de la forma x^{-n}, con $n = 1, 2, \cdots$. Series divergentes. Expresión de la delta de Dirac en forma de serie.
Fuentes: (i) P. A. M. Dirac. The principles of Quantum Mechanics. Oxford. Clarendon Press. Fourth Edition (1958). Sec. 15. (ii) D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 1.

Dedicación: dos (2) clases.

1.1 Definiciones

El análisis de funciones generalizadas o distribuciones da una estructura para validar funciones más exóticas, denominadas funciones generalizadas, y da el marco teórico para el tratamiento de ecuaciones diferenciales con soluciones extendidas, esto es, soluciones de ecuaciones diferenciales de orden n que no son derivables n veces. Por otro lado veremos que la vida es más fácil en el mundo de las distribuciones.

Introduzcamos una serie de definiciones que darán el marco para introducir las distribuciones y sus operaciones.

Definición: El **soporte** de una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ es

$$sop(f) = \{x : f(x) \neq 0\} .$$

Se dice que una función tiene **soporte acotado** si existen a y b reales, tal que

$$sop(f) \subset [a, b] .$$

Definición: Una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ se dice n veces **continuamente diferenciable** si sus primeras n derivadas existen y son continuas. Si las derivadas de todos los órdenes de f existen y son continuas, entonces a f se la denomina **suave** o infinitamente diferenciable.

Definición: Una **función test** es una función suave $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$ con soporte acotado.

Ejemplo:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & a < x < b \\ 0 & x \leq a,\ x \geq b \end{cases} \tag{1.1}$$

ver Fig. 1.1 ($a = -1$, $b = 2$).

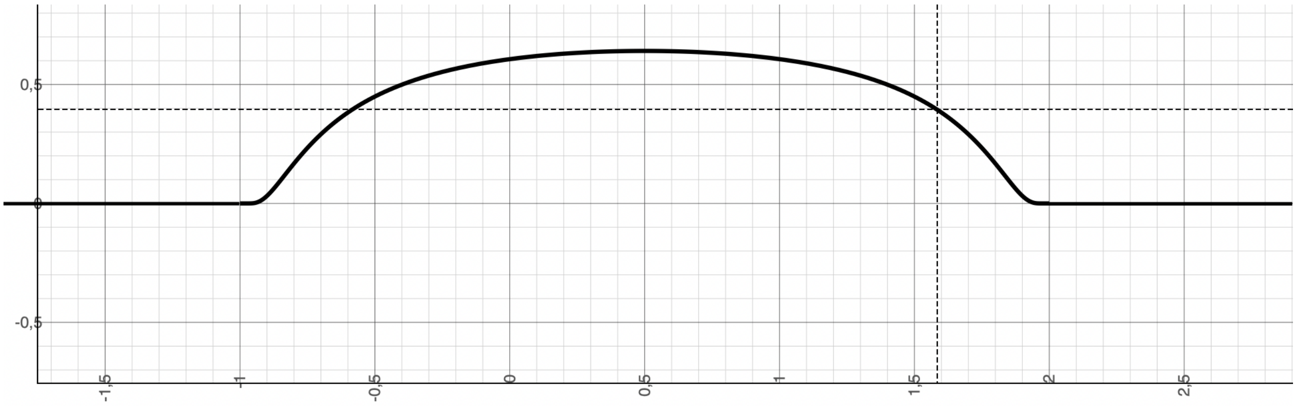


Figure 1.1:

Actividad 1: Graficar

- $f(x)$, con $f(x) = 0$ para $x \geq 0$, y $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, para $x < 0$. Chequear que es suave.
- $f(-x)$, con $f(x)$ definida arriba
- $f(x-1)$
- $f(-(x+1))$
- $g(x)$ con $g(x) = 0$ para $|x| \geq 1$, y $g(x) = e^{\frac{2}{(x^2-1)}}$, para $|x| < 1$.

Propiedades:

- La suma de dos funciones test es una función test.
- El producto de una función test con cualquier número es una función test.
- El producto de una función test con una función suave es una función test.

Definición: El conjunto de todas las funciones test define el **espacio de funciones test**. Se lo denota por $\mathcal{D}$.

Definición: Un funcional lineal sobre $\mathcal{D}$ es un mapeo $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tal que

$$\boldsymbol{f}(a\phi + b\psi) = a\boldsymbol{f}(\phi) + b\boldsymbol{f}(\psi)$$

para todo $a, b \in \mathcal{C}$ y $\phi, \psi \in \mathcal{D}$.

Ejemplos:

- $\phi \mapsto \phi(0)$ (tiene color a delta de Dirac)
- $\phi \mapsto \int f(x)\phi(x)dx$, con f suficientemente bien comportada.

Definición: Si (ϕ_n) es una sucesión de funciones test y Φ es otra función test, decimos ϕ_n **converge** a Φ ($\phi_n \to \Phi$) en $\mathcal{D}$ si

- Existe un intervalo $[a, b]$ conteniendo los soportes $sop(\Phi)$ y $sop(\phi_n)$ para todo n.
- La convergencia $\phi_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(x)$ es uniforme[1], con $x \in [a, b]$.
- Para cada k, $\phi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi^{(k)}(x)$, uniformemente para $x \in [a, b]$, con $\phi^{(k)}$ denotando la derivada k-ésima.

1.2 Distribuciones

Definición: Un **funcional f** sobre $\mathcal{D}$ es **continuo** si mapea cada sucesión convergente en $\mathcal{D}$ en una sucesión convergente en $\mathcal{C}$, esto es, si

$$\boldsymbol{f}(\phi_n) \to \boldsymbol{f}(\Phi)$$

para cada $\phi_n \to \Phi$ en $\mathcal{D}$.

Definición: Un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}$ se denomina **distribución** o **función generalizada**.

Ejemplo: $\boldsymbol{\delta}$ es la distribución o función generalizada definida por

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \phi(0)$$

Donde uno interpreta que la acción de la distribución $\boldsymbol{\delta}$ es evaluar la función test $\phi(x)$ en $x = 0$. Esto es justamente la delta de Dirac. Queda pendiente dar las propiedades introducidas por Dirac.

Notar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es sólo una forma simbólica para representar el mapeo $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. En cuántica la usaremos en la forma

$$\langle \cdot | \cdot \rangle \ .$$

Esta notación se denomina **braket**, de modo que **bra** representa $\langle \cdot |$ y **ket** representa $| \cdot \rangle$.

[1] *Convergencia uniforme:* se dice que $f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ si, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe un entero N (que puede depender de ε) tal que para $n \geq N$ se verifica, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo x.

Clasificación

Vamos a clasificar las distribuciones según pueden derivarse de funciones ordinarias o no.

- **Distribución regular:** para cada función f localmente integrable existe una distribución $\boldsymbol{f}$ definida por la siguiente integral

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

con $\phi \in \mathcal{D}$. Luego, uno puede decir que la distribución $\boldsymbol{f}$ es *generada* por la función f.

Ejemplo:

$$\langle \mathbf{1}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$$

con $f(x) = 1$.

- **Distribución singular:** Todas las otras distribuciones que no se definen a través de funciones localmente integrables son denominadas singulares.

Ejemplo: Delta de Dirac

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \phi(0)$$

Solemos escribir (como hizo Dirac)

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)\,,$$

pero la integral, en este contexto, es sólo una notación, como lo es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ambas notaciones representan el mapeo $\mathbf{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Operaciones

En esta sección vamos a definir algunas operaciones entre distribuciones. Como regla general, el producto no está definido pero muchas otras operaciones son análogas al cálculo usual, y por este motivo, suele llamarse a las distribuciones *funciones generalizadas.*

Suma: si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son distribuciones y a y b son números complejos, se define la distribución

$$a\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{g}$$

por

$$a\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{g} : \phi \mapsto a\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle + b\langle \boldsymbol{g}, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Producto (con una función suave): si $\boldsymbol{f}$ es una distribución y h una función suave $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$, se define el producto de $\boldsymbol{f}$ y h como la distribución

$$\boldsymbol{hf} : \phi \mapsto \langle \boldsymbol{f}, h\phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Si h no es suave [2], entonces $h\phi$ no es suave y $h\phi \notin \mathcal{D}$, por lo que la definición anterior no funciona. Luego, no podemos definir el producto de una distribución con una función que es discontinua o tiene derivadas discontinuas. Las distribuciones, en general, no pueden ser multiplicadas, que es lo que anticipamos al comienzo de la sección.

Igualdad: dos distribuciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son iguales en (a, b), si

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $sop(\phi) \subset (a, b)$.

Ejemplo: $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ en $(0, \infty)$.

$$\langle \mathbf{0}, \phi \rangle = \int_0^\infty 0\phi(x)dx = 0$$
$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \int_0^\infty \delta(x)\phi(x)dx = 0$$

Uno podría decir que $\delta(x)$ tiene el valor cero para $x > 0$!.

Actividad 2: Repetir para $(-\infty, 0)$.

Traslación: para cada distribución $\boldsymbol{f}$ y cada real a, se define una nueva distribución $\boldsymbol{f}_{+a}$ como

$$\langle \boldsymbol{f}_{+a}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \phi(x - a) \rangle .$$

Se denomina a la distribución $\boldsymbol{f}_{+a}$ traslación de $\boldsymbol{f}$.

Ejemplo:

$$\langle \boldsymbol{\delta_{+a}}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}(x), \phi(x - a) \rangle = \phi(-a)$$

Actividad 3: Sea $\boldsymbol{f}$ una distribución regular generada por la función f. Mostrar que $\boldsymbol{f}_{+a}$ es generada por la función $f(x + a)$.

Cambio de variable: para cualquier distribución $\boldsymbol{f}$ y cualquier real $a \neq 0$, se define una nueva distribución $\boldsymbol{f}_{\cdot a}$ como

$$\langle \boldsymbol{f}_{\cdot a}, \phi \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \phi(x/a) \rangle}{|a|} .$$

Ejemplo:

$$\langle \boldsymbol{\delta}_{\cdot a}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}, \phi(x/a) \rangle / |a| = \phi(0)/|a|$$

Luego,

$$\boldsymbol{\delta}_{\cdot a} = \frac{\boldsymbol{\delta}(x)}{|a|}$$

con $a \neq 0$. Esta es una de las propiedades dadas por Dirac.

[2] Recordar concepto de función suave dado más arriba.

Actividad 4: Sea $\boldsymbol{f}$ una distribución regular generada por la función f. Mostrar que $\boldsymbol{f}_{.a}$ es generada por la función $f(xa)$.

Delta con argumento de función: La distribución $\boldsymbol{\delta}(f(x))$ puede escribirse como combinación lineal de $\boldsymbol{\delta}(x)$ usando la siguiente relación.

$$\boldsymbol{\delta}(f(x)) = \sum_n \frac{\boldsymbol{\delta}(x - x_n)}{|f'(x_n)|},$$

donde x_n son las raíces de $f(x)$ y $f'(x) = \frac{df}{dx}$, con $f'(x_n) \neq 0$.

Ejemplo: En Mecánica cuántica la conservación de energía impone una delta de Dirac. La energía está vinculada con el número de onda por una relación de dispersión cuadrática. Es útil escribir la delta en término del número de onda, de este modo uno busca una relación entre $\boldsymbol{\delta}(E(k))$ y $\boldsymbol{\delta}(k)$, donde $E(k) = ck$, con E la energía, k el número de onda, y c una constante que depende de las propiedades del sistema.

$$\delta(E(k) - E(k_0)) = \delta(ck^2 - ck_0^2) = \frac{1}{c}\frac{\delta(k - k_0) + \delta(k + k_0)}{2k_0}.$$

Actividad x: Mostrar la relación

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2a}.$$

1.3 Cálculo diferencial

Definición: La **derivada** de una función generalizada $\boldsymbol{f}$ es la función generalizada $\boldsymbol{f}'$ definida por

$$\langle \boldsymbol{f}', \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \phi' \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Cada función generalizada es diferenciable, dada la bondad de las funciones test.

Si $f(x)$ es una función localmente integrable la cual no es diferenciable, la distribución $\boldsymbol{f}'$ es llamada derivada generalizada de $f(x)$, por ejemplo, la función escalón admite una derivada generalizada y resulta ser la delta. Esto justifica el resultado de Dirac de la definición alternativa de la delta mostrado en en el apéndice A.1.

Para distribuciones regulares, la función que genera el funcional $\boldsymbol{f}'$ es $f'(x)$, como puede verificar integrando por partes,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{f}', \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \phi' \rangle &= \int (-f(x))\phi'(x)dx \\
&= (-f)\phi|_{-\infty}^{\infty} - \int (-f'(x))\phi(x)dx \\
&= \int f'(x)\phi(x)dx
\end{aligned}$$

Actividad 5: Calcular la derivada generalizada de $f(x) = |x|$.
Sol.: $\boldsymbol{sgn}$, con $sgn(x) = -1(1)$ para $x < (>)0$, luego $\langle |\boldsymbol{x}|', \phi \rangle = \langle \boldsymbol{sgn}, \phi \rangle$.

Actividad 6: calcular la derivada generalizada de la función de Heaviside.
Sol.: $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{\delta}$.

Derivada de la suma:

$$\langle (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})', \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}', \phi\rangle + \langle \boldsymbol{g}', \phi\rangle$$

o

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$$

Derivada del producto:

$$\langle (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})', \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}', \phi\rangle$$

o

$$(\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} + \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}'$$

donde al menos una de las distribuciones es definida por una función suave.

Veamos,

$$\begin{aligned}\langle (\boldsymbol{f}\boldsymbol{g})', \phi\rangle &= -\langle \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}, \phi'\rangle = -\langle \boldsymbol{f}, g\phi'\rangle = -\langle \boldsymbol{f}, (g\phi)' - g'\phi\rangle \\ &= -\langle \boldsymbol{f}, (g\phi)'\rangle + \langle \boldsymbol{f}, g'\phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}', g\phi\rangle + \langle \boldsymbol{f}, g'\phi\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{f}\boldsymbol{g}', \phi\rangle\end{aligned}$$

1.4 Convergencia

Definición: Una sucesión de distribuciones $(\boldsymbol{f}_n)$ se dice que converge si la sucesión de números $\langle \boldsymbol{f}_n, \phi\rangle$ es convergente para todo ϕ de $\mathcal{D}$.

Teorema: Si $(\boldsymbol{f}_n)$ es una sucesión de distribuciones convergente, entonces existe una distribución $\boldsymbol{F}$ tal que

$$\langle \boldsymbol{f}_n, \phi\rangle \to \langle \boldsymbol{F}, \phi\rangle$$

para todo ϕ de $\mathcal{D}$. Usamos la notación $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo: Realización de la distribución delta de Dirac como límite de las funciones continuas $d_n(x)$ presentadas en el apéndice A.1.

$$\boldsymbol{d}_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)} \to \boldsymbol{\delta}(x)\,, \tag{1.2}$$

con $\boldsymbol{d}_n(x)$ las distribuciones regulares generadas por $d_n(x)$ y $n \to \infty$.

Actividad x: Calcular $\int d_n(x)\phi(x)dx$ para n creciente, con $\phi(x)$ dada por la Ec. (1.1) para valores a su elección de a y b. Comparar el límite de la integral con el valor $\phi(0)$.

Teorema: si $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots$ son distribuciones tal que $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\boldsymbol{f}_n' \to \boldsymbol{F}'\,.$$

Ejemplo: Aplicando el teorema anterior a $\boldsymbol{d}_n \to \boldsymbol{\delta}$, resulta la siguiente realización para la derivada de la delta,

$$d_n'(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{n^3\,x}{(1 + n^2x^2)^2} \to \delta'(x)$$

para $n \to \infty$. Luego,

$$\langle \boldsymbol{d}_n', \phi\rangle \to \langle \boldsymbol{\delta}', \phi\rangle = -\phi'(0)$$

Actividad 7: Graficar $d'_n(x)$ para algunos n. Calcular numéricamente la integral $\int d'_n(x)\phi(x)dx$ para n creciente, con $\phi(x)$ dada por la ec. (1.1) (con a y b a elección). Comparar con el valor $\phi'(0)$.

Notemos cuanto más simple han resultado algunas de las definiciones de este capítulo respecto a su contraparte del cálculo usual.

Aún cuando la notación $\langle \boldsymbol{\delta}, \phi\rangle \to \int \delta(x)\phi(x)dx$, no tiene el significado usual de integral se puede usar como una notación alternativa a $\langle \cdot, \phi\rangle$, y operar formalmente. Veamos un ejemplo.

Ejemplo:

$$\langle \boldsymbol{\delta}_{+\boldsymbol{a}}, \phi\rangle = \langle \delta(x+a), \phi\rangle = \int \delta(x+a)\phi(x)dx = \int \delta(y)\phi(y-a)dy = \phi(0-a) = \phi(-a)$$

Este resultado lo hemos introducido anteriormente como definición de traslación.

Actividad 8: Aplicar la misma técnica al cambio de variable $\boldsymbol{\delta}(ax)$, con $a \in \mathcal{R}$. Contemplar por separado $a > 0$ y $a < 0$.
Rta.: Esto resulta ser el cambio de variable introducido anteriormente, por lo que podríamos escribir: $\boldsymbol{\delta}_{\cdot a} = \boldsymbol{\delta}(ax)$ como para el caso de distribuciones regulares.

1.5 Distribuciones $\boldsymbol{x}^{-n}$

La función

$$\ln|x|$$

es singular en $x = 0$, pero es localmente integrable, por lo que define una distribución regular.

Su integral

$$x\ln|x| - x$$

es una función continua (vale cero en $x = 0$), por lo que también define una distribución regular.

Pero la derivada de $\ln|x|$ es la función

$$\frac{1}{x}$$

la cual no es localmente integrable. Por lo que $\frac{1}{x}$ no define una distribución regular.

El objeto de esta sección es definir una distribución que sea una versión generalizada de la función $1/x$. Esta distribución será singular y se la denotará como

$$\boldsymbol{P/x}\,.$$

Luego, definiremos distribuciones singulares con potencias negativas mayores que denotamos como

$$\boldsymbol{x}^{-n}\,,$$

con $n = 2, 3, \ldots$.

Distribución $\boldsymbol{P/x}$

La distribución singular $\boldsymbol{P/x}$ se define apelando al valor principal definido en el Apéndice A.2

$$\langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle = P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx\,. \tag{1.3}$$

En el Apéndice A.3 se muestra que, para una función test, el término de la derecha es

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \ln|x| dx\,.$$

Luego, podemos escribir

$$\langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \ln|x| dx = \langle -\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi' \rangle = \langle (\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|)', \phi \rangle\,, \tag{1.4}$$

donde hemos usado el hecho que $\ln|x|$ es localmente integrable, y la definición de derivada distribucional.

De este modo la distribución singular $\boldsymbol{P/x}$ queda definida a partir de la derivada de la distribución regular $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$

$$\boldsymbol{P/x} = (\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|)'$$

La distribución $\boldsymbol{P/x}$ puede tomarse como la función generalizada asociada a $1/x$. $\boldsymbol{P/x}$ es otro ejemplo de distribución singular que se agrega a la delta.

Por el análisis que hicimos al definir el valor principal puede inferirse que otras versiones de funciones generalizadas de $1/x$ podrían obtenerse tomando diferente criterio para el límite (recordar que tomamos el límite simétrico $\delta = \epsilon$), pero todas ellas son menos útiles y, en última instancia, pueden escribirse en término de $\boldsymbol{P/x}$.

Distribuciones $\boldsymbol{x^{-n}}$

Para $n > 1$ el valor principal no existe, por lo que no se puede usar una definición al estilo de la Ec. (1.3) con $1/x$ reemplazado por $1/x^n$.

En el Apéndice A.4 mostramos una forma heurística utilizada en teoría de propagación de ondas. Ésta consiste en integrar por partes y desechar los términos divergentes. En el apéndice se muestra su implementación para el caso $n = 2$.

La distribución $\boldsymbol{P/x}$ quedó definida a través de la derivada primera de la distribución regular $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$. Derivadas de orden n-ésima permiten definir las distribuciones singulares $\boldsymbol{x^{-n}}$,

$$\boldsymbol{x^{-n}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^n}{dx^n} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|\,, \tag{1.5}$$

con $n = 2, 3, \ldots$.

Ejemplo: $\boldsymbol{x^{-2}}$

$$\langle \boldsymbol{x^{-2}}, \phi \rangle = \langle \frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi \rangle = \langle -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi \rangle = \langle \frac{d}{dx} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi' \rangle$$

$$= -\langle \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi'' \rangle = -\int \ln|x| \phi''(x) dx\,.$$

Para $n = 1$ recuperamos $(\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|)' = \boldsymbol{P/x}$.

1.6 Ecuaciones algebraicas

Ecuaciones algebraicas en el marco del análisis funcional permiten soluciones que no están contempladas en el análisis ordinario. Consideremos el siguiente ejemplo,

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{f} = \mathbf{1}\,, \tag{1.6}$$

con $\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{1}$ distribuciones regulares y $\boldsymbol{f}$ la función generalizada a determinar.

En el Apéndice A.5 mostramos como resolver esta ecuación con las herramientas del análisis funcional, cuya solución es la siguiente,

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P}/\boldsymbol{x} + C\boldsymbol{\delta}\,, \tag{1.7}$$

con C constante.

Actividad X: Mostrar que (1.7) es solución de (1.6).
Rta:

$$\langle \boldsymbol{x}\boldsymbol{f}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}/\boldsymbol{x} + C\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{x}\boldsymbol{P}/\boldsymbol{x}, \phi\rangle + \langle C\boldsymbol{x}\boldsymbol{\delta}, \phi\rangle$$

$$= \langle \mathbf{1}, \phi\rangle + C\langle \mathbf{0}, \phi\rangle = \langle \mathbf{1}, \phi\rangle\,,$$

luego, $\boldsymbol{x}\boldsymbol{f} = \mathbf{1}$.

1.7 Series divergentes

En la sección 1.5 hemos mostrado cómo darles significado a integrales que son divergentes en el análisis ordinario. En esta sección mostramos un ejemplo de cómo darle significado a series que son divergentes o no están bien definidas en el análisis usual.

Consideremos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x)\,, \tag{1.8}$$

la cual:

- Diverge para x entero ($x \in \mathcal{Z}$),
- Oscila para $x = \frac{2n+1}{2}$, y
- No converge para $x \in \mathcal{Q}$;

por lo que esta serie no tiene significado en el análisis usual.

En el Apéndice A.6 mostramos como obtener una expresión de la serie en término de la distribución delta. El procedimiento considera que la serie de cosenos ($\cos 2n\pi x$) se puede obtener formalmente de la derivada de una serie de senos ($\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}$), la cual, a su vez se puede obtenter de la derivada de otra serie de cosenos ($\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}$). La serie de senos corresponde al desarrollo en Fourier de una función periódica $f(x)$ con saltos finitos. La serie de senos no converge uniformemente, pero la serie de cosenos sí convergen uniformemente. A demás su sumas parciales son funciones continuas y por lo tanto localmente integrables. Apelando al teorema de sucesiones nos construímos una distribución que corresponde a la serie de cosenos ($\boldsymbol{\frac{\cos 2n\pi x}{(2n\pi)^2}}$) la cual converge a la distribución $\boldsymbol{F}$. Diferenciando la serie de cosenos y $\boldsymbol{F}$ obtenemos una serie de senos ($\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}$) y $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$. Diferenciando una vez mas estas distribuciones obtenemos la serie de cosenos ($\cos 2n\pi x$) en sendtido distribucional y $\boldsymbol{f}'$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) = \boldsymbol{f}'(x)\,.$$

En el Apéndice A.6 se muestra la forma funcional de $f(x)$ que permite entender el resultado final,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x-k) \tag{1.9}$$

Aplicación: La expresión anterior puede utilizarce para obtener una expresención de la delta de Dirac en forma de serie. Para ello consideremos el dominio $-1 < x < 1$. En tal dominio sólo una de las deltas en la serie es no nula, esta es la que corresponde a $k = 0$. Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(x)$$

Lo que nos da la siguiente representación de la delta,

$$\delta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) \quad \text{con} \quad -1 < x < 1\,.$$

Chapter 2

Ecuaciones diferenciales con soluciones generalizadas

Modificado: 2023.12.29

Contenido: Integrales. Ecuaciones diferenciales lineales. Solución fundamental. Funciones de Green.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 2.

Dedicación: dos (2) clases.

2.1 Integral de función generalizada

Definición: Una distribución $\boldsymbol{F}$ es una **integral** de una distribución $\boldsymbol{f}$ si

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f} \,.$$

La integral de una función generalizada se define como la antiderivada, esto es, una función generalizada cuya derivada es la distribución original.

Teorema: Para cada distribución f existen infinitas distribuciones F tal que $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$ y la diferencia entre dos cualesquiera de ellas es una constante.

La definición de integral dice cómo reconocer una integral indefinida de $\boldsymbol{f}$ cuando uno la tiene, pero no cómo construirla. Sin embargo sería simple construir $\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle$, si $\phi = \Phi'$ es la derivada de una función Φ y ambas son funciones test,

$$\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \Phi \rangle \,, \tag{2.1}$$

con $\phi = \Phi'$.

Veamos:

$$\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{F}, \Phi' \rangle = -\langle \boldsymbol{F}', \Phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \Phi \rangle \tag{2.2}$$

En el Apéndice A.7 mostramos que, en general, la función Φ no es una función test. Tambien se muestra que si $\phi \in \mathcal{D}$ con $sop(\phi) \subset [a, b]$ y además $\int_a^b \phi(x)dx = 0$, entonces $\Phi \in \mathcal{D}$. Esto restringe el dominio de aplicación de la integral a un subconjunto de las funciones test.

Para que la integral de una distribución esté definida en el espacio test completo debemos factorizar cada función $\phi \in \mathcal{D}$ en una parte con integral nula y su complemento,

$$\phi(x) = \psi(x) + k\varphi_0(x)\,, \tag{2.3}$$

donde $\psi(x)$ la función test cuya integral es nula (ver Apéndice A.7), k una constante convenientemente elegida y $\varphi_0(x)$ una función test arbitraria (esta libertad hace las veces de la constante de integración de integrales indefinidas del análisis ordinario). En el Apéndice A.7 mostramos cómo se relaciona $\varphi_0(x)$ con las infinitas distribuciones $\boldsymbol{F}$ que satisfacen $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$.

Luego, la integral se calcula en forma similar a la Ec. (2.1),

$$\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \Psi \rangle\,, \tag{2.4}$$

con $\phi(x) = \psi(x) + k\varphi_0(x)$ y

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy \tag{2.5}$$

Este procedimiento da muchas integrales de la distribución f, dependiendo de la elección de φ_0. Veamos que todas las integrales posibles son obtenidas agregando una constante a una de ellas, esto es,

$$F = G + cte\,, \text{ con } F' = f \text{ y } G' = f\,.$$

Veamos... Sean F y G dos integrales de f. Entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$ tenemos,

$$\langle F - G, \phi \rangle = \langle F - G, \psi + k\varphi_0 \rangle = \langle F - G, \Psi' \rangle + k\langle F - G, \varphi_0 \rangle\,,$$

donde hemos usado la expresión de ϕ dada por (A.12) y $\psi = \Psi'$. Luego,

$$\langle F - G, \phi \rangle = -\langle F' - G', \Psi \rangle + kC\,,$$

donde hemos introducido la constante $C = \langle F - G, \varphi_0 \rangle$ independiente de ϕ. Usando $F' = f$, $G' = f$ resulta

$$\langle F - G, \phi \rangle = -\langle f - f, \Psi \rangle + kC = kC$$

Reemplazando k dada por (A.13)

$$\langle F - G, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dxC = \int_{-\infty}^{\infty} C\,\phi(x)dx$$

$$= \langle C, \phi \rangle$$

Luego,

$$F = G + cte\,,$$

con F y G integrales de f.

Esta sección nos dió un teorema sobre la existencia de soluciones a la ecuación diferencial $F' = f$. En la siguiente sección utilizaremos esta información para resolver ecuaciones lineales de la forma $Lu = f$, con L un operador diferencial lineal.

Observación: A partir de ahora no distinguiremos notacionalmente entre funciones y funciones generalizadas, esto es, no usaremos la notación 'negrita' para distribuciones.

2.2 Ecuaciones diferenciales lineales

Definición: Ecuación lineal de orden n

$$Lu = f\,,$$

con u y f distribuciones y el operador L una combinación lineal del operador diferencial $D^{(i)}$

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{(n-i)} = a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \cdots + a_n$$

con coeficientes a_i que son funciones suaves. De este mode el producto de la distribución $D^{(i)}u$ y la función a_i está bien definido.

Definición: Cualquier distribución u que satisface $Lu = f$ es denominada **solución generalizada**. Se las clasifica en las siguientes tres clases.

- **Solución clásica** es una función ordinaria la cual es diferenciable n veces. Luego, esta solución genera una distribución regular la cual a su vez satisface $Lu = f$.
- **Solución débil** es una función ordinaria la cual no es n diferenciable y por lo tanto no es una solución clásica, pero genera un distribución regular y por lo tanto es una solución generalizada.
- **Solución distribucional** es una distribución singular que satisface $Lu = f$.

Ejemplo $xu' = 0$:

- Solución clásica: $u = c$, con c constante.
- Solución débil: $u = c_1 H(x) + c_2$, con c_1 y c_2 constantes. Veamos,

  $$u = c_1 H(x) + c_2 \to u' = c_1 \delta$$

  $$\langle xu', \phi \rangle = \langle x c_1 \delta, \phi \rangle = 0$$

  donde hemos usado $x\delta(x) = 0$.

Ejemplo $x^2 u' = 0$:

- Solución clásica: $u_1 = c$, con c constante.
- Solución débil: $u_2 = c_1 H(x) + c_2$, con c_1 y c_2 constantes.
- Solución distribucional: $u_3 = c_1 \delta(x) + c_2 H(x) + c_3$, con c_1, c_2 y c_3 constantes.

Actividad 1: Demostrar la solución $u_3(x)$.

Resulta curioso que las ecuaciones diferenciales convencionales puedan tener nuevas soluciones cuando se permiten las funciones generalizadas como solución. Luego, vale la pregunta si las nuevas soluciones distribucionales existen para todas las ecuaciones diferenciales. La respuesta es no. Soluciones distribucionales de ecuaciones clásicas sólo aparecen cuando el coeficiente a_0 se anula y las soluciones tienen singularidades en los ceros de $a_0(x)$. El siguiente teorema garantiza que las únicas soluciones cuando $a_0 \neq 0$ son las clásicas.

Teorema: Si $a_0(x) \neq 0$ para todo x, y f es una función continua, entonces, cada solución generalizada de $Lu = f$ es una solución clásica, con $L = a_0 D^{(n)} + \cdots + a_n$

Actividad 2: Re-examinar los ejemplos a la luz del teorema.

2.3 Solución fundamental

Sea la siguiente ecuación diferencial,

$$L(x)u(x) = f(x)\,.$$

Escribamso $f(x)$ en término de deltas de Dirac,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy\,, \tag{2.6}$$

y consideremos funciones $w(x,y)$ soluciones del mismo operador L con una delta de Dirac como fuente,

$$L(x)w(x,y) = \delta(x-y)\,.$$

La Ec. (2.6) puede interpretarse heurísticamente como una superposición de deltas $\delta(x-y)$ centradas en y pesadas con el coeficiente $f(y)$, con y un índice continuo que va de $-\infty$ a ∞.

Siendo L un operador lineal, podemos hacer el siguiente desarrollo

$$L(x)u(x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} L(x)w(x,y) f(y) dy$$

$$= L(x) \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) f(y) dy$$

de donde resulta,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) f(y) dy$$

De este modo, resolviendo la ecuación no homogénea

$$L(x)w(x,y) = \delta(x-y)\,,$$

donde x oficia de variable e y de parámetro, obtenemos la solución de cualquier ecuación no homogénea con el mismo operador L para *cualquier fuente arbitraria* $f(x)$, 'simplemente' realizando la integración

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) f(y) dy\,. \tag{2.7}$$

Definición: La función $w(x,y)$ solución de la ecuación diferencial $L(x)w(x,y) = \delta(x-y)$, es llamada **solución fundamental** del operador L.

Teorema: Si $a_0(x) \neq 0$ para todo x, y a_0, $a_1, \ldots$, a_n son funciones suaves, entonces **existe una solución fundamental** para $L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) D^{(n-i)}$. Todas las soluciones fundamentales para L se obtienen sumando soluciones de la ecuación homogénea $Lu = 0$ a cualquiera de ellas, y todas son soluciones débiles (funciones ordinarias pero no diferenciable n veces) de $L(x)w(x,y) = \delta(x-y)$.

Aplicación: oscilador amortiguado

En esta sección vamos a dar la forma de lidear con la delta en la ecuación diferencial para poder obtener una solución fundamental y lo haremos a través de un caso concreto.

Sea la siguiente ecuación diferencial, la cual corresponde a un oscilador forzado y amortiguado, con frecuencia característica ω_0 y constante de amortiguamiento $k > 0$ y $k < \omega_0$,

$$u'' + 2ku' + \omega_0^2 u = f(t)$$

Según el aprendizaje de la sección anterior, en lugar de resolver la ecuación diferencial para cada función externa $f(t)$, hallamos la solución del operador diferencial

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2k\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

una única vez para la 'fuerza externa' $\delta(t-s)$,

$$Lw(t,s) = \delta(t-s)$$

donde s oficia de parámetro. (notar que $a_0 \neq 0$ para todo x, luego podremos hallar una función regular aunque va a resultar no ser dos veces diferenciable)

Luego, la solución para cada problema específico $Lu = f(t)$ se obtiene por la siguiente integral,

$$u(t) = \int w(t,s) f(s) ds$$

La estrategia para hallar la solución fundamental $Lw(t,s) = \delta(t-s)$ es la siguiente,

- Hallar la solución para $t < s$.
- Analizar las propiedades de $w(t,s)$ y sus derivadas para $t = s$
- Hallar la solución para $t > s$

Para $t < s$ y $t > s$ la solución corresponde al problema homogéneo $Lw = 0$.

Solución $t < s$: Para esta región tomaremos la solución trivial

$$w(t,s) = 0\,.$$

Si uno interpreta a la $\delta(t-s)$ como una fuerza externa que sólo es efectiva a $t = s$, la propuesta suena plausible, porque podemos suponer que el oscilador estaba inicialmente en reposo y para $t < s$ permanece en ese estado. Sea, entonces, nuestra solución para $t < s$, $w(t,s) = 0$.

Condiciones para $t = s$: Dado la singularidad del término de la derecha inferimos que existe una discontinuidad (posiblemente un salto finito, **porqué?**) en el término de la izquierda. De este modo, para que la singularidad sea δ, la función w o sus derivadas debe ser discontinua en $t = s$. Dado que la máxima singularidad es δ la discontinuidad debe estar en w' (si ω fuera discontinua debería aparecer a la derecha δ', si w' fuera continua no habría δ). Luego, concluimos que w es continua y que w' es discontinua en $t = s$, y escribimos

$$w(s^+, s) = w(s^-, s) \tag{2.8}$$

$$w'(s^+, s) - w'(s^-, s) = c \tag{2.9}$$

con c constante a determinar y

$$w(s^\pm, s) = \lim_{\varepsilon \to 0} w(t = s \pm \varepsilon, s)\,.$$

Las relaciones (2.8) y (2.9) son las **condiciones iniciales** para la solución para $t > s$.

- Dado que $w(t, s) = 0$ para $t < s$, entonces $w(s^-, s) = 0$. Luego, por la relación (2.8)

$$w(s^+, s) = 0\,.$$

- La constante en la relación (2.9) se obtiene del siguiente análisis: integrando la ecuación $Lw(t, s) = \delta(t - s)$, término a término en la variable t en un entorno de s resulta,

$$\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w''(t, s)dt + 2k \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w'(t, s)dt + \omega_0^2 \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w(t, s)dt = \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \delta(t - s)dt$$

$$w'(t, s)\big|_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} + 2k\; w(t, s)\big|_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} + \omega_0^2 \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w(t, s)dt = 1$$

En el límite $\epsilon \to 0$ resulta

$$w'(s^+, s) - w'(s^-, s) = 1\,,$$

donde hemos usado

$$w(s^+, s) - w(s^-, s) = 0$$
$$\int_{s^-}^{s^+} w(t, s)dt = 0$$

por ser w continua en $t = s$ según ec. (2.8). Luego, $c = 1$.

- De la solución $w = 0$ para $t < s$ tenemos $w'(s^-, s) = 0$.

- Luego, considerando (i) la ec. (2.9), (ii) $w'(s^-, s) = 0$ y el (iii) valor de c, resulta

$$w'(s^+, s) = 1\,.$$

Lo que constituye la segunda condición para resolver la ecuación diferencia para $t > s$.

Solución $t > s$: La solución a $Lw(t,s) = 0$ con las condiciones iniciales

$$w(s^+, s) = 0$$

$$w'(s^+, s) = 1$$

es

$$w(t,s) = \frac{e^{-k(t-s)}}{\Omega} \sin[\Omega(t-s)] \tag{2.10}$$

con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Luego,

$$w(t,s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} & t > s \end{cases} \tag{2.11}$$

La función $w(x,y)$ es una solución débil del $Lw(t,s) = \delta(t-s)$, esto es,

$$\langle Lw, \phi \rangle = \langle \delta, \phi \rangle$$

con ϕ función test.

Actividad 3: Demostrar Ec. (2.10).

Actividad 4: Verificar que (2.11) es continua y que su derivada tiene un salto unidad en $t = s$.

2.4 Funciones de Green

Las ecuaciones diferenciales lineales usualmente están asociadas con condiciones de contorno dadas, las cuales determinan una solución particular. La solución fundamental resuelve una ecuación no homogénea, pero en general, ésta no satisface las condiciones de contorno dadas. Sin embargo, si elegimos la solución fundamental de modo que satisfaga las condiciones de contorno, y si éstas son homogéneas, entonces la solución particular de $Lu = f$ dada por (2.7) también satisface las condiciones de contorno. Tal solución fundamental es llamada **función de Green**.

Definición: consideremos un operador lineal $L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x) D^{(n-i)}$, con a_0 que no se anula y a_i funciones suaves. Supongamos que un conjunto de condiciones de contorno son dadas en la forma de n ecuaciones lineales homogéneas que involucran la función y sus primeras $n-1$ derivadas. La **función de Green** para L con estas condiciones de contorno es un solución fundamental que satisface esas condiciones.

Ejemplo 1

Sea

$$L = D^{(2)} + k^2\,,$$

con condiciones de contorno

$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0\,.$$

Esto implica que la solución fundamental g que buscamos satisface la siguiente ecuación diferencial con la δ como fuente y las siguientes condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) &= \delta(x-y) \\ g(0,y) &= 0 \\ g(1,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Solución para $x < y$: Para $x < y$, $\delta(x-y) = 0$, luego

$$g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) = 0\,,$$

entonces

$$g(x,y) = a \sin kx + b \cos kx\,,$$

con a y b posiblemente, funciones del parámetro y. Usando la condición inicial $g(0,y) = 0$, resulta

$$g(x,y) = a \sin kx \quad \text{para} \quad x < y\,.$$

Solución para $x > y$: Para $x > y$, también resulta $\delta(x-y) = 0$, luego

$$g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) = 0\,,$$

entonces

$$g(x,y) = a' \sin kx + b' \cos kx\,,$$

con a' y b' (las primas *no* indican derivada) posiblemente, funciones del parámetro y. Usando la condición de contorno $g(1,y) = 0$ tenemos

$$g(1,y) = a' \sin k + b' \cos k = 0 \Rightarrow b' = -a' \frac{\sin k}{\cos k}\,,$$

luego,

$$\begin{aligned} g(x,y) &= a' \sin kx - a' \frac{\sin k}{\cos k} \cos kx \\ &= \frac{a'}{\cos k}[\sin kx \cos k - \sin k \cos kx] \\ &= \frac{a'}{\cos k} \sin k(x-1) \end{aligned}$$

con k constante, por lo que podemos escribir

$$g(x,y) = a'' \sin k(x-1) \quad \text{para} \quad x > y\,.$$

con a'' una constante a determinar, posiblemente dependiente del parámetro y.

Condiciones en $x = y$: Ya hemos aprendido con el ejemplo de la sección anterior que la solución fundamental es continua y que su derivada tiene un salto unida,

$$g(y^+, y) = g(y^-, y)$$

$$g'(y^+, y) - g'(y^-, y) = 1$$

Luego,

$$a \sin ky = a'' \sin k(y-1)$$

$$a''k \cos k(y-1) - ak \cos ky = 1$$

que son dos ecuaciones para determinar las dos constantes a y a'':

$$\begin{aligned} a'' &= a \frac{\sin ky}{\sin k(y-1)} \\ 1 &= \frac{ak}{\sin k(y-1)} [\sin ky \, \cos k(y-1) - \cos ky \, sink(y-1)] \\ &= \frac{ak}{\sin k(y-1)} \sin k \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sin k(y-1)}{k \sin k} \\ a'' &= \frac{\sin ky}{k \sin k} \end{aligned}$$

Finalmente resulta,

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin k(y-1)}{k \sin k} \sin kx & x < y \\ \\ \frac{\sin ky}{k \sin k} \sin k(x-1) & x > y \end{cases} \tag{2.12}$$

La simetría en la solución puede interpretarse como que la respuesta en x debido a una perturbación en y es la misma que la respuesta en y debido a una perturbación en x, como consecuencia de las condiciones de contorno simétrica.

Suele usarse la siguiente notación que explota la simetría de la solución

$$g(x, y) = \frac{1}{k \sin k} \sin k(r_> - 1) \sin kr_<$$

donde $r_>$ debe reemplazarse por las variable mayor entre x e y, y similarmente para $r_<$. Este tipo de expresiones las encotramos, por ejemplo, en la teoría de dispersión en Cuántica.

Actividad 5: Mostrar que g en Ec. (2.12) es continua en $x = y$ y que su derivada es discontinua allí con salto unidad.

Ejemplo 2

Sea

$$L = D^{(2)} + 2kD^{(1)} + \omega_0^2\,,$$

con condiciones de contorno (iniciales en este caso)

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

con $t > 0$ y $\omega_0 > k > 0$.

La ecuación para la hallar la función de Green resulta,

$$g_{tt}(t,s) + 2kg_t(t,s) + \omega_0^2 g(t,s) = \delta(t-s)\,,$$

con

$$\begin{aligned} g(0,s) &= 0 \\ g'(0,s) &= 0 \end{aligned}$$

Este problema fue resuelto anteriormente al desarrollar el oscilador amortiguado como ejemplo de la solución fundamental, ver sección 2.3. Allí consideramos como solución para $t < s$ la función nula. Dado que la condiciones inciales $g(0,s) = g_t(0,s) = 0$ para la ecuación $g_{tt}(t,s) + 2kg_t(t,s) + \omega_0^2 g(t,s) = 0$, implica $g = 0$, aquella solución se corresponde con el problema actual.

Solución: Entonces la función de Green es

$$g(t,s) = \begin{cases} 0 & t \leq s \\ \\ \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} & t > s \end{cases} \tag{2.13}$$

con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

La función de Green (2.13) se la denomina causal porque la perturbación, representada por la δ, ocurre antes que el efecto; por eso $g = 0$ para $t < s$ mientras $g \neq 0$ para $t > s$.

Solución general: Construyamos la solución de

$$Lu(t) = f(t)$$

para una fuente arbitraria f y con u satisfaciendo las mismas condiciones iniciales.

Tenemos,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^{\infty} g(t,s)f(s)ds \\ &= \int_0^t g(t,s)f(s)ds + \int_t^{\infty} g(t,s)f(s)ds \end{aligned}$$

donde hemos usado que el problema está definido para $t > 0$ en el primer renglón y que g es una función partida en el segundo.

En la primera integral $s < t$, luego debemos tomar la forma de $g(t,s) = \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)}$; mientras que en la segunda integral, $s > t$, por lo que debemos tomar $g(t,s) = 0$,

$$u(t) = \int_0^t g(t,s)f(s)ds + \int_t^\infty g(t,s)f(s)ds$$

$$= \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} f(s)ds + \int_t^\infty 0 f(s)ds$$

$$= \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} f(s)ds$$

Cambiando a la variables $\tau = t - s$, resulta $-d\tau = ds$, cuando $s = 0 \to \tau = t$, y cuando $s = t \to \tau = 0$. Entonces,

$$u(t) = \int_0^t \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega} e^{-k\tau} f(t-\tau)d\tau$$

donde hemos intercambiado los límites de la integral usando el signo de $d\tau$. Esta es la expresión final que resuelve,

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2ku_t + \omega_0^2 &= f(t) \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

con $t > 0$ y $\omega_0 > k > 0$.

Sobre las condiciones de contorno: Para la primera condición $u(0)$ tenemos

$$u(0) = \int_0^0 \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} f(0-\tau)d\tau = 0$$

debido a que los límites de la integral son iguales, luego verifica $u(0) = 0$.

Para la segunda condición de contorno $u'(0)$ tenemos,

$$u'(t) = \frac{\sin[\Omega t]}{\Omega} e^{-kt} f(t-t) + \int_0^t \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} d\tau$$

$$= \frac{\sin[\Omega t]}{\Omega} e^{-kt} f(0) + \int_0^t \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} d\tau$$

Donde hemos usado:

$$H(x) = \int_0^x F(x,y)dy \Rightarrow \frac{dH}{dx} = F(x,x) + \int_0^x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy$$

Evaluando, u' en cero, resulta

$$u'(0) = \frac{\sin[\Omega 0]}{\Omega} e^{-k0} f(0) + \int_0^0 \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(0-\tau)}{\partial t} d\tau = 0$$

donde el primer término es cero debido al seno y el segundo debido a los límites de integración.

De este modo chequeamos que la solución general $u(t)$ satisface las condiciones de contorno para cualquier fuente $f(t)$.

2.5 Ecuación con condiciones de contorno no homogéneas

Notemos que la función de Green requiere condiciones de contorno homogéneas. En esta sección mostramos cómo usar la función de Green para resolver problemas con condiciones de contorno no homogéneas mediante un ejemplo.

Consideremos la ecuación diferencial

$$u'' + u = f(x)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0) &= a \\ u(1) &= b\,. \end{aligned}$$

La estrategia consiste en trasformar el problema en uno que satisfaga ecuaciones de contorno homogéneas. Para ello se define alguna función $h(x)$ que también satisfacen las condiciones de contorno dadas y luego se escribe

$$u(x) = h(x) + v(x)\,. \tag{2.14}$$

con $h(0) = a$ y $h(1) = b$ y $v(x)$ a determinar. Dado que $v(x) = u(x) - h(x)$ y u y h valen lo mismo en $x = a$ y $x = b$, tendremos

$$\begin{aligned} v(a) &= 0 \\ v(b) &= 0\,. \end{aligned}$$

Luego, podremos usar el método de la función de Green para hallar $v(x)$.

Sea, por ejemplo

$$h(x) = a + (b - a)x\,, \tag{2.15}$$

vemos que $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Además $h' = b - a$ y $h'' = 0$. Luego,

$$u'(x) = (b - a) + v'(x)$$

$$u''(x) = v''(x)$$

$$u'' + u = f(x) \Rightarrow v''(x) + h(x) + v(x) = f(x)$$

Por lo que podemos escribir la siguiente ecuación para v,

$$v'' + v = F(x)\,,$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - h(x) \\ v(0) &= 0 \\ v(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Resolvemos este problema usando la técnica de la función de Green para calcular $v(x)$. Por último, obtenemos la solución u para el problema original a partir de las Ecs. (A.3) y (2.14).

Actividad 6: Cómo cambiaría $F(x)$ si $h(x)$ no fuera lineal?.

Chapter 3

Ecuaciones en derivadas parciales 3D

En este capítulo se introduce la transformada de Fourier ordinaria, necesaria para definir la correspondiente en el análisis funcional. Se define una clase más pequeña de funcionales en un espacion de funciones más grande que el de las funciones test. Estos nuevos conceptos, combinados con la técnica de la funciones de Green, se utilizan para resolver ecuaciones en derivadas parciales en tres dimensiones.

Modificado: 2024.01.03

Contenido: Transformada Fourier ordinaria. Funciones de decaimiento rápido. Distribuciones temperadas. Transformada de Fourier generalizada. Distribuciones en multivariables. Solución generalizada de la ecuación de onda en tres dimensiones. *Apéndice:* Transformada de Laplace.
Fuente: R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg and E. M. van de Vrie. Fourier and Laplace Transforms. Cambridbe (2003). Capítulos 6 y 12.
H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 3.

Dedicación: 3 (tres) clases.

3.1 Transformada de Fourier

Daremos un tratamiento heurístico para introducir las integrales de Fourier, de modo que, mientras el resultado es correcto algunos de los pasos lógicos pueden no estar matemáticamente fundamentados. El objetivo de esta sección es definir la transformada de Fourier para funciones no periódicas a partir del análisis de una función periódica cuyo dominio de definición se toma al infinito.

El desarrollo hace uso de la expresión exponencial de la serie de Fourier desarrollada en el Apéndice A.9

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,n\,x} \, .$$

Comencemos con una función periódica $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ que es suave por tramos. Para un $T > 0$ arbitrario consideremos la función $f_T(t)$ que coincide con f en el intervalo $(-T/2, T/2)$ y es nula en el resto del eje real. Luego, extendemos $f_T(t)$ en forma periódica, ver Fig. 3.1.

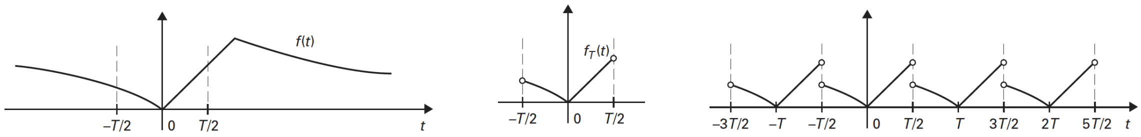


Figure 3.1:

De este modo tenemos una función de período T a la cual le podemos aplicar la teoría de Fourier y que coincide con f en $(-T/2, T/2)$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,n\,\Delta\omega\,t} \,,$$

con c_n los coeficientes de Fourier, $t \in (-T/2, T/2)$ y $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Reemplazando c_n por su expresión en término de f tenemos,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\,n\,\Delta\omega\,\tau} \, d\tau \right] \, e^{i\,n\,\Delta\omega\,t}$$

Reemplazamos T en favor de ω

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\,n\,\Delta\omega\,\tau} \, d\tau \right] \, e^{i\,n\,\Delta\omega\,t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \, \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega e^{-i\,n\,\Delta\omega\,\tau} \, e^{i\,n\,\Delta\omega\,t} \right] \, d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \, \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\,n\,\Delta\omega(t-\tau)} \, \Delta\omega \right] \, d\tau
\end{aligned}$$

Luego, extendemos el dominio de definición de f haciendo el límite $T \to \infty$, lo que es esquivalente al límites $\Delta\omega \to 0$. De modo que la expresión anterior resulta,

$$f(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \, \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)} d\omega \right] \, d\tau$$

Este último paso es cuestionable pues pasamos de sumas a integrales impropias reemplazando

$$\begin{aligned}
w_n = n\Delta w &\to w \\
\Delta w &\to dw \,,
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} f(t) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\,n\,\Delta\omega\,\tau} \, d\tau \right] \, e^{i\,n\,\Delta\omega\,t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \, \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)} d\omega \right] \, d\tau
\end{aligned}$$

Reordenemos las integrales convenientemente para que queden en w

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega \right] d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega\, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega)\, d\omega \end{aligned}$$

donde hemos introducido la función $F(\omega)$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

De este modo hemos obtenido una 'expansión' en frecuencia de una función no periódica que se diferencia con la expansión de funciones periódicas en que las frecuencias son continuas y los coeficientes son funciones,

$$f_{periodica}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\omega_n t}$$

$$f_{no\ periodica}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, F(\omega)\, d\omega$$

con $\omega_n = n\,\Delta\omega$ y

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\omega_n \tau}\, d\tau$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau$$

Definición: Dada la función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, definimos la función $F : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, llamada **transformada de Fourier** (TF) como

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

siempre que la integral exista como integral impropia, con $\omega \in \mathcal{R}$. Dicha función es llamada también **espectro** o **densidad espectral** de $f(t)$.

Ejemplos de funciones con integrales impropias no definidas

- La TF de $f(t) = 1$ no existe, pues la integral impropia no está definida.
- La TF de la función escalón $\epsilon(t) = \theta(t)$ tampoco tiene TF:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \lim_{R\to\infty} \int_{0}^{R} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\omega t}\Big|_{0}^{\infty} \end{aligned}$$

Definición: Un función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ es **absolutamente integrable** si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

existe como integral impropia.

Cuando $f(t)$ es absolutamente integrable, entonces $F(\omega)$ existe. Veamos,

$$|F(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\, e^{-i\,\omega\, t} \right|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Definición: La integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\,\omega\, t}\, d\omega\,,$$

siempre que exista, se denomina **integral de Fourier**.

Podría ocurrir que, aún siendo $f(t)$ absolutamente integrable, $F(\omega)$ no lo sea, esto es, la transformación no es cerrada en el sentido the transforma funciones absolutamente integrable en otra absolutamente integrable.

Interpretación física

Consideremos que la variable t de un función periódica representa al tiempo, luego ω_n tiene unidades de frecuencia de modo que $\omega_n t$ sea adimensional. En tal caso, uno dice que la función $f(t)$ está definida en el **dominio temporal**. La serie de Fourier correspondiente queda determinada a través de los coeficientes c_n. Cada uno de estos coeficientes está asociado a una frecuencia específica $\omega_n = n\omega_0$. Para funciones suaves a trozos la serie de Fourier es igual a la función. Esto significa que la función está completamente determinada por sus coeficientes de Fourier, y dado que ellos están asociados con frecuencias ω_n, podemos decir que la función $f(t)$ está descrita por los coeficientes de Fourier en el **dominio de frecuencia**,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; e^{-i\,\omega_n\, t}\; dt\,.$$

La sucesión de los coeficientes de Fourier c_n con $n \in \mathcal{Z}$ es denominado el **espectro** de la función. Dado que ω_n es discreto, el espectro es denominado **espectro discreto** o **línea espectral**.

Ahora queremos dar una significación a la variable $\omega \in \mathcal{R}$ de $F(\omega)$. Sea $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ una función suave por trozos y cero fuera del intervalor $(-T/2, T/2)$. En este caso la correspondiente función $F(\omega)$ existe, dado que sólo se integra en el intervalo acotado $(-T/2, T/2)$. Si extendemos f periódicamente queda definida la función $f_{ext}(t)$, a la cual le podemos determinar los coeficientes de Fourier c_n. Dado que la extensión periódica $f_{ext}(t)$ coincide con $f(t)$ en $(-T/2, T/2)$ y f es nula fuera del intervalo $(-T/2, T/2)$ resulta

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{ext}(t)\; e^{-i\, n\omega_0\, t}\; dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; e^{-i\, n\omega_0\, t}\; dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\; e^{-i\, n\omega_0\, t}\; dt = \frac{1}{T} F(n\omega_0)\,, \end{aligned}$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Luego,

$$\frac{c_n}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} F(n\omega_0)\,.$$

Esta última relación puede leerse como que la razón de los coeficientes de Fourier con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ da una aproximación de la función $F(\omega)$ para valores discretos de $\omega = n\omega_0$. Luego, al incrementar T, ω_0 se hace más pequeño y la aproximación $F(n\omega_0)$ se hace más fina (mejora). Para visualizar esto último ver la Fig. 3.2.

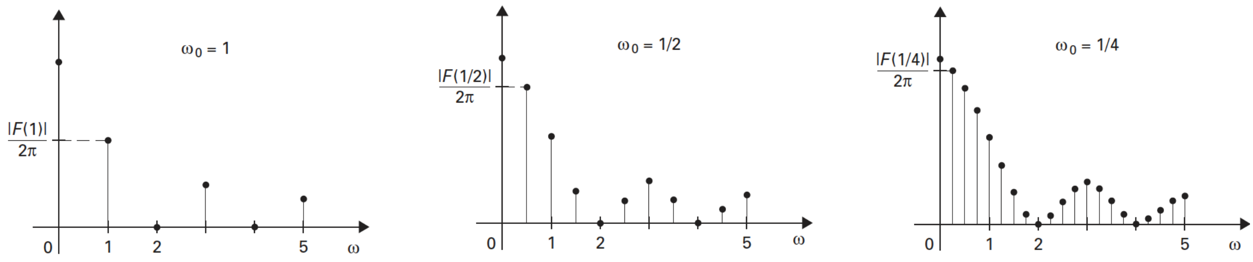


Figure 3.2:

En el límite $T \to \infty$, resulta $\omega_0 \to 0$ uno espera que el espectro discreto cambie al espectro continuo $F(\omega)/2\pi$, ver Fig. 3.3. Este es el motivo por el que se le ha llamado **espectro** y **densidad espectral** de $f(t)$ a la Transformada de Fourier $F(\omega)$.

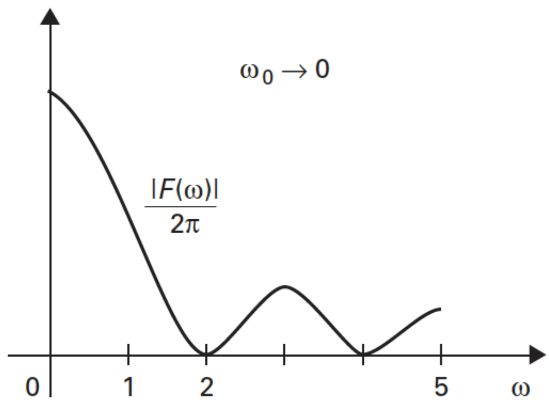


Figure 3.3:

La figura 3.4 muestra un ejemplo de $f(t)$ y $F(\omega)$ en una señal temporal. De las amplitudes de $F(\omega)$ se hace aparente que algunas frecuencias son más relevantes que otras, mientras que en las amplitudes de $f(t)$ no parece que uno pueda extraer alguna información característica.

Ejempos de TF

Función pulso

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases} \tag{3.1}$$

con $a > 0$.

Tenemos para su TF,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin \frac{a\omega}{2}$$

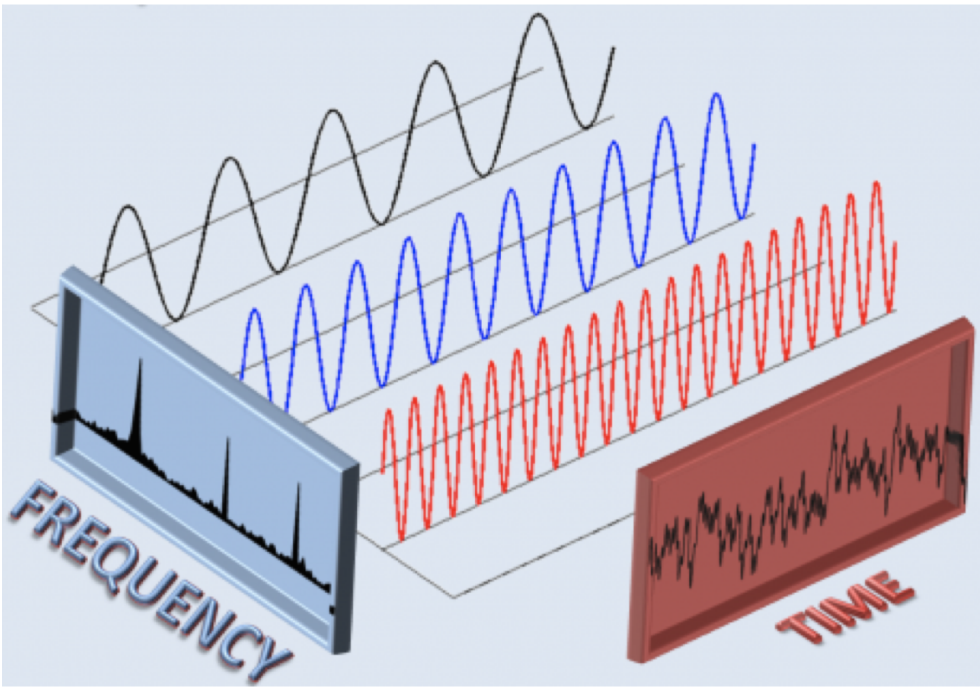


Figure 3.4: Fuente: http://www.jldelafuenteoconnor.es

Notemos que mientras f es absolutamente integrable, F no lo es. Veamos una forma plausible de ver que $F(\omega)$ no es absolutamente integrable, pero que no constituye una demostración rigurosa (pues para que se tal debería valer sólo la igualdad).

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{2}{\omega} \sin \frac{a\omega}{2}\right| d\omega = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\omega} \left|\sin \frac{a\omega}{2}\right| d\omega \leq \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\omega} \left|\frac{\beta \frac{a\omega}{2}}{1+\frac{a\omega}{2}}\right| d\omega$$
$$\leq \int_{0}^{\infty} \beta \frac{a}{2} \left|\frac{1}{1+\frac{a\omega}{2}}\right| d\omega = \int_{1}^{\infty} \beta \frac{a}{2} \left|\frac{1}{u}\right| \frac{2}{a} du = \int_{1}^{\infty} \beta \frac{1}{u} du = \beta(\ln \infty - 0)$$

con $\frac{a\omega}{2} > 0$, $u = 1 + \frac{a\omega}{2}$. Acotar $|\sin x| \leq x$, $x > 0$ es adecuado para x pequeño, pero excesivo para x grande. Para x grande convendría acortar con $|\sin x| \leq 1$. Un cota que es buena para x grande y x pequeño es $|\sin x| \leq \frac{\beta x}{1+x}$, con $\beta > 0$ una constante cuyo valor preciso no hace falta especificar.

Función exponencial positiva

$$f(t) = e^{-a|t|},$$

con $a > 0$.

Tenemos para su TF,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1-0}{a-i\omega} + \frac{0-1}{-a-i\omega} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Función de Gauss

$$f(t) = e^{-at^2}\,,$$

con $a > 0$.

TF:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}(\cos\omega t + i\,\sin\omega t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}\cos\omega t\,dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-at^2}\cos\omega t\,dt$$

Para calcular esta última integral operamos como sigue:

$$F'(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} t\,e^{-tx^2}\,\sin\omega t\,dt$$

$$= \left.\frac{e^{-at^2}\,\sin\omega t}{a}\right|_{0}^{\infty} - \frac{\omega}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-at^2}\,\cos\omega t\,dt$$

$$= 0 - \frac{\omega}{2a}\,F(\omega)$$

Luego, integramos la función $F(\omega)$,

$$\frac{F'}{F} = -\frac{\omega}{2a}$$

$$\frac{d}{d\omega}\ln|F(\omega)| = -\frac{\omega}{2a}$$

$$\int d\ln|F(\omega)| = -\int \frac{\omega}{2a}d\omega$$

$$\ln|F(\omega)| = -\frac{\omega^2}{4a} + cte$$

$$|F(\omega)| = e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\, e^{cte}$$
$$F(\omega) = cte'\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

donde hemos usado que $cte' = e^{cte} > 0$. Para determinar la constante tomemos $\omega = 0$, de modo que $F(0) = cte'$, luego

$$F(0) = cte' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i0t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

donde hemos usado $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

Finalmente,

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\,,$$

lo que muestra la maravillosa propiedad que la TF de una gaussiana es una gaussiana.

Propiedades

Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones con TF $F(\omega)$ y $G(\omega)$ respectivamente. Entonces

$$aF(\omega) + bG(\omega)$$

es la TF de $af(t) + bg(t)$.

Complejo conjugado: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces el espectro de la función $\overline{f(t)}$ es dado por

$$\overline{F(-\omega)}\,.$$

Traslación en t: Sea $F(\omega)$ la TF de $f(t)$. La TF de $f(t-a)$, con $a \in \mathcal{R}$, es

$$e^{-i\omega a}F(\omega)\,.$$

Traslación en ω: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces

$$F(\omega - a)\,,$$

con $a \in \mathcal{R}$, es el espectro de $e^{iat} f(t)$.

Escaleo: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces, el espectro de $f(ct)$ es

$$F(\omega) = \frac{1}{|c|} F(\omega/c)\,,$$

con $c \in \mathcal{R}$, $c \neq 0$.

Diferenciación con respecto a t: Sea $f(t)$ continuamente diferenciable con espectro $F(\omega)$ y sea que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. Entonces el espectro de $f'(t)$ existe y es

$$i\omega F(\omega)\,.$$

Veamos...

$$\frac{d}{dt}(e^{-iwt} f(t)) = -iwe^{-iwt} f(t) + e^{-iwt} f'(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}(e^{-iwt} f(t))dt = -iw \int e^{-iwt} f(t)dt + \int e^{-iwt} f'(t)dt$$

$$e^{-iwt} f(t)\big|_{-\infty}^{\infty} = -iw\hat{f} + \hat{f}' \to 0 = -iw\hat{f} + \hat{f}'$$

Diferenciación con respecto a ω: Sea $f(t)$ absolutamente integrable con espectro $F(\omega)$. Si $tf(t)$ es absolutamente integrable, entonces el espectro de $F(\omega)$ es diferenciable, con

$$F'(\omega) = -\widehat{itf}(\omega)\,.$$

Veamos...

$$f \to \hat{f} = \int e^{-iwt} f(t)dt$$

$$(\hat{f})' = \int (-it)e^{-iwt} f(t)dt = -\widehat{itf}$$

Integración: Sea $f(t)$ continua y absolutamente diferenciable con espectro $F(\omega)$. Sea que $\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = 0$. Entonces, para $\omega \neq 0$ uno tiene,

$$\left(\mathcal{F} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right)(\omega) = \frac{F(\omega)}{i\omega}\,,$$

con $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$.
Veamos... Sea

$$g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau) d\tau$$

$$g'(t) = f(\tau)|_{-\infty}^{t} = f(t)$$

$$\widehat{g'} = iw\hat{g} = \hat{f} \to \hat{g} = \frac{\hat{f}}{iw}$$

TF de la convolución: La TF de la convolución es el producto de las TF de cada función,

$$\mathcal{F}(f * g)(w) = F(w)G(w)$$

con $F(w) = \mathcal{F}(f(t))(w)$ y

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s)ds \,.$$

Actividad X: Elige tres propiedades y demuéstralas.

Continuidad: Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable. Entonces el espectro $F(\omega)$ es una función continua sobre $\mathcal{R}$.

Teorema fundamental de la integral de Fourier: Sea $f(t)$ una función suave por trozos y absolutamente integrable en $\mathcal{R}$ y sea $F(\omega)$ su TF. Entonces la integral de Fourier converge para cada $t \in \mathcal{R}$ como valor principal de Cauchy (notar que se refiere a una forma muy específica de integral impropia),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{f(t+) + f(t-)}{2} \,.$$

La función $f(t)$ así obtenida se denomina **transformada inversa de Fourier** de $F(\omega)$.

Expresión integral de la delta de Dirac

En lo que sigue vamos a deducir formalmente un expresión integral de la delta de Dirac operando con la integral de Fourier y la transformada de Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t}\, F(\omega)\, d\omega$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\,\omega \tau}\, d\tau$$

Reemplazando una en otra tenemos,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\,\omega\tau}\, d\tau\, d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)}\, d\omega \right] d\tau \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

Luego,

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)}\,d\omega \tag{3.2}$$

Alternativamente,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,kx}\,dk \tag{3.3}$$

o

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,kx}\,dk \tag{3.4}$$

Notar la reprocidad en las unidades si pensamos que t y x tienen unidades de tiempo y distancia recíprocamente. En tal caso las deltas *no* son adimencionales, como lo son las deltas de Kronecker.

3.2 Distribuciones temperadas

La transformada de Fourier (TF) ordinaria es aplicable sólo a funciones absolutamente integrables. Esto es un limitante fuerte porque funciones familiares como los polinomios, funciones trigonométricas y exponenciales, no son absolutamente integrable. Dentro del marco del análisis funcional uno puede definir las transformada de Fourier de tales funciones. Para ello hace falta definir un espacio para el cual la TF ordinaria sea cerrado (el espacio test $\mathcal{D}$ no es cerrado con la TF). Este espacio constituirá un nuevo espacio de funciones test sobre el cual se definiran funcionales lineales continuos (distribuciones temperadas). El espacio en el cual la TF de Fourier es cerrado se denomina $\mathcal{S}$ (espacio de Schwartz). El beneficio de haber utilizado el espacio $\mathcal{D}$ es haber podido definir un conjunto más amplio de funciones generalizadas.

Funciones de decaimiento rápido

Definición: Una **función de decaimiento rápido** es una función suave $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ tal que,

$$x^n \phi^{(r)}(x) \to 0$$

cuando $x \to \pm\infty$, para todo $n, r \geq 0$.

Definición: El conjunto de las funciones de decaimiento rápido es denominado $\mathcal{S}$, **espacio de Schwartz**.

Ejemplo: Las funciones de la forma

$$e^{-ax^2} P(x)$$

con P cualquier polinomio y $a > 0$ son funciones de decaimiento rápido.

Ejemplo: Cada función test es una función de decaimiento rápido, esto es (el espacio $\mathcal{S}$ es más 'grande' que el espacio $\mathcal{D}$)

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}\,.$$

Propiedades:

- Si
$$\phi, \psi \in \mathcal{S} \Rightarrow a\phi + b\psi \in \mathcal{S}$$
para cualesquiera constantes a y b.

- Si
$$\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow x^n \phi^{(r)}(x) \in \mathcal{S}$$
para todo $n, r \geq 0$.

- Si
$$|x^n \phi^{(r)}(x)|$$
es una función acotada para cada $n, r \geq 0$, entonces ϕ es una función de decaimiento rápido.

- Cada función de decaimiento rápido es **absolutamente integrable**.

- Si
$$\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \tilde{\phi} \in \mathcal{S}\,,$$
donde $\tilde{\phi}$ es la transformada de Fourier ordinaria.

Convergencia en $\mathcal{S}$: Si $\Phi, \phi_1, \phi_2, \cdots$ son funciones de decaimiento rápido, se dice que
$$\phi_m \to \Phi$$
en $\mathcal{S}$ si, para todo enteros r y n,
$$x^n \phi_m^{(r)}(x) \to x^n \Phi^{(r)}(x) \quad \text{cuando} \quad m \to \infty$$
uniformemente [1] en x.

Propiedades:

- Si
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
entonces
$$\phi'_m \to \Phi' \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
y
$$P(x)\phi_m \to P(x)\Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
para cualquier polinomio P.

- Si
$$\phi_m, \Phi \in \mathcal{D} \quad \text{para todo} \quad m\,,$$
y
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{D}\,,$$
entonces
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,.$$

[1] ψ_n converge uniformemente a Ψ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica que $\sup\{|\psi_n(x) - f(x)|\} \leq \varepsilon$.

Distribuciones temperadas

Definición: Una **distribución temperada** es un funcional lineal continuo sobre el espacio $\mathcal{S}$, esto es, es un funcional lineal que mapea cada sucesión convergente en $\mathcal{S}$ en una sucesión convergente en $\mathcal{C}$ (notar que es idéntica a la definición de distribución reemplazando $\mathcal{D}$ por $\mathcal{S}$.)

Ejemplo: Cada polinomio $p(x)$ genera una distribución temperada (ver las propiedades listadas arriba)

$$p : \phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\phi(x)dx\,,$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}$.

Cada distribución sobre $\mathcal{S}$, lo es también sobre $\mathcal{D}$. Por ejemplo, el polinomio del ejemplo anterior genera una distribución temperada, y también una distribución regular (de las definidas en el espacio $\mathcal{D}$), pues $p(x)$ es una función localmente integrable.

La inversa no es cierta, esto es, no toda distribución definida en $\mathcal{D}$ es una distribución temperada.

Ejemplo: La distribución generada por e^{-x} es regular (definida sobre $\mathcal{D}$), pero e^{-x} no genera una distribución de crecimiento lento, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}e^{-|x|/2}dx = \cdots = \left.\frac{e^{-x/2}}{(-1/2)}\right|_{-\infty}^{0} + \cdots\,,$$

no converge (notar que hemos usado $\phi = e^{-|x|/2}$ como función testigo de $\mathcal{S}$.)

Definición: Se llama **espacio dual** al conjunto formado por todas las distribuciones sobre un espacio de funciones test $\mathcal{C}$ y se lo denota por $\mathcal{C}^\times$.

Ejemplo: El espacio $\mathcal{D}^\times$ contiene todas las distribuciones definidss sobre el espacio de funciones test $\mathcal{D}$. De igual forma, el espacio $\mathcal{S}^\times$ contiene todas las distribuciones definidss sobre el espacio de funciones test $\mathcal{S}$.

Dado que el conjunto $\mathcal{D}$ es más restrictivo que el $\mathcal{S}$, el número de distribuciones definidas sobre $\mathcal{D}$ es mayor que las definidas sobre $\mathcal{S}$. Esto es, el conjunto $\mathcal{D}^\times$ es 'mas grande' que el conjunto $\mathcal{S}^\times$

$$\mathcal{S}^\times \subset \mathcal{D}^\times$$

Conjuntos más grandes de funciones 'test' generan conjuntos más pequeños de distribuciones. Esto justifica por qué desarrollamos inicialmente la teoría del análisis funcional con el espacio de funciones de $\mathcal{D}$.

Funciones de crecimiento lento

Definición: una **función de crecimiento lento** es una función f localmente integrable $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$ tal que

$$f(x) = O(x^n) \quad \text{para algún } n \text{ cuando} \quad |x| \to \infty\,.$$

Donde $f(x) = O(x^n)$ significa que existen C y R tal que

$$|f(x)| \leq C|x|^n \quad \text{cuando} \quad |x| > R\,.$$

Ejemplos:

- Cada polinomio p de grado n es una función de crecimiento lento.
- e^{-x} no es de crecimiento lento, porque $x^{-n}e^{-x} \to \infty$ cuando $x \to -\infty$ para $n \geq 0$.
- e^{iax} es una función de crecimiento lento si a es real, dado que $|e^{iax}| = 1$.

Teorema: A cada función de crecimiento lento f le corresponde una **distribución temperada $\boldsymbol{f}$** definida por,

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

La teoría de funciones generalizadas temperadas puede ser desarrollada siguiendo el desarrollo hecho para la teoría de funciones generalizadas basadas en el espacio de funciones test $\mathcal{D}$. Por ejemplo, podríamos definir las operaciones de suma, traslación, multiplicación por funciones suaves; así como la diferenciación, integración, etc.

3.3 Transformada de Fourier generalizada

La transformada de Fourier (TF) de distribuciones se define sobre funcionales que actúan en el espacio $\mathcal{S}$ usando la propiedad introducida en la sección anterior, si $\phi \in \mathcal{S}$, entonces $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$, donde $\tilde{\phi}$ es la transformada de Fourier usual.

Definición: Si $\boldsymbol{f}$ es una distribución temperada, su **transformada de Fourier** es la distribución temperada $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ definida por

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{f}}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \widetilde{\phi} \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}$. Si f es una función localmente integrable de crecimiento lento, la distribución $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ es llamada la **transformada de Fourier generalizada** de f.

Teorema: Si f es una función absolutamente integrable, entonces su transformada de Fourier $\tilde{f}$ es una función de crecimiento lento, y la distribución generada por $\tilde{f}$ es la transformada de Fourier generalizada de f.

Estas definiciones dan una marco en el cual polinomios, senos, cosenos tienen transformada de Fourier generalizada.

Convención:

$$\widetilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\phi(x)dx$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\widetilde{\phi}(k)dk$$

La diferencia de signo con la definida anteriormente es porque aquella es la usada, usalmente, para la variable tiempo. En las aplicaciones combinaremos ambas convenciones.

Propiedades:

- $\widetilde{\widetilde{\phi}}(x) = 2\pi\phi(-x)$.
  Veamos...
  Primero notemos que si $\phi = \phi(x)$ entonces
  $$\phi = \phi(x) \longrightarrow \widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(k) \longrightarrow \widetilde{\widetilde{\phi}} = \widetilde{\widetilde{\phi}}(x)\,,$$
  donde el argumento sólo indica cuál es la variable independiente.
  Luego,
  $$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\phi}}(x) &= \int e^{ikx}\widetilde{\phi}(k)dk = \int e^{ikx}\left[\int e^{ikx'}\phi(x')dx'\right]dk \\ &= \int\left[\int e^{ik(x+x')}dk\right]\phi(x')dx' \\ &= \int\left[2\pi\delta(x+x')\right]\phi(x')dx' \\ &= 2\pi\phi(-x)\end{aligned}$$
  donde hemos usado
  $$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int e^{ik(x-x')}dk\,.$$
- $\widetilde{\phi'}(k) = -ik\widetilde{\phi}(k)$
- $\left(\widetilde{\phi}\right)' = i(\widetilde{x\phi})$
- $\widetilde{\phi_a}(k) = e^{ika}\,\widetilde{\phi}(k)$

Ejemplos:

- $\widetilde{\mathbf{1}} = 2\pi\boldsymbol{\delta}$.
  Veamos...
  Consideremos que $\phi = \phi(x)$, luego
  $$\langle\widetilde{\mathbf{1}},\phi\rangle = \langle\mathbf{1},\widetilde{\phi}\rangle = \int 1\,\widetilde{\phi}(k)dk = \int e^{\pm ik0}\widetilde{\phi}(k)dk$$
  Consideremos primero e^{+ik0}:
  $$\begin{aligned}\langle\widetilde{\mathbf{1}},\phi\rangle &= \int e^{ik0}\widetilde{\phi}(k)dk \\ &= \widetilde{\widetilde{\phi}}(x=0) = 2\pi\phi(-x=0) = 2\pi\phi(0) \\ &= \langle 2\pi\boldsymbol{\delta},\phi\rangle\end{aligned}$$
  Consideremos ahora e^{-ik0}:
  $$\begin{aligned}\langle\widetilde{\mathbf{1}},\phi\rangle &= \int e^{-ik0}\widetilde{\phi}(k)dk \\ &= 2\pi\phi(x=0) = 2\pi\phi(0) \\ &= \langle 2\pi\boldsymbol{\delta},\phi\rangle\end{aligned}$$

- $\widetilde{\boldsymbol{x}} = -2\pi i\boldsymbol{\delta'}$

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{x}}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \widetilde{\phi}\rangle = \int x\,\widetilde{\phi}(x)\,dx = i\int \widetilde{(\phi')}\,dx = i\,\widetilde{\widetilde{\phi}}'(0) = 2\pi i\phi'(0) = \langle -2\pi i\boldsymbol{\delta'}, \phi\rangle$$

  Notar, que para poder reemplazar $\boldsymbol{x}$ por x, debemos asumir que $\phi = \phi(k)$, para que $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(x)$ en la integral.

- $\widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{1}$

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{\delta}, \widetilde{\phi}\rangle = \int \delta(x)\widetilde{\phi}(x)\,dx = \widetilde{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle \mathbf{1}, \phi\rangle$$

- $\widetilde{\boldsymbol{sgn}}(k) = 2i\boldsymbol{P/k}$

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0\,. \end{cases}$$

  Alternativamente

$$sgn(x) = 2[H(x) - 1/2]\,.$$

- $\widetilde{\boldsymbol{H}}(k) = i\boldsymbol{P/k} + \pi\boldsymbol{\delta}(k)$
  Lo cual puede deducirse a partir de $\widetilde{\boldsymbol{sgn}}(k)$.

3.4 Análisis Funcional multidimensional

La extensión formal a funcionales de más de una variable, lo logramos reemplazando los escalares por vectores. Por ejemplo, las funciones test,

$$\phi(x) \to \phi(x_1, \cdots, x_n) = \phi(\boldsymbol{x})$$

donde el intervalo que definía el soporte vendría reemplazado por una bola en el espacio n-dimensional,

$$x \in [a, b] \longrightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leq R$$

con $\boldsymbol{x}$ cualquier dimensión, y $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

Luego, funciones como e^{ikx} se reemplaza el producto de escalares por el producto escalar de vectores. Por ejemplo,

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\boldsymbol{kx}}$$

Finalmente, las integrales pasarían a sus versiones multidimensional, por ejemplo,

$$\int dx \longrightarrow \int dx \int dy \int dz = \int dx\,dy\,dz$$

$$\int dx \longrightarrow \int r^2\,\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\phi$$

$$\int dx \longrightarrow \int dx_1\,dx_2\,\cdots\,dx_n = \int d^n\boldsymbol{x}$$

según corresponda, para dimensión tres o n.

Ejemplo: Delta en tres dimensiones en coordenadas cartesianas,

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

con $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle\delta_{-\boldsymbol{a}},\phi\rangle &= \int d^3\boldsymbol{r}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\phi(\boldsymbol{r})\\
&= \int dx\delta(x-a_x)\int dy\delta(y-a_y)\int dz\delta(z-a_z)\phi(\boldsymbol{r})\\
&= \phi(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

Ejemplo: Delta en tres dimensiones en coordenadas esféricas,

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{\delta(r-r_0)}{r^2}\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\delta(\phi-\phi_0)$$

con $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$

Actividad X: Obtener la expresión de la delta en cilíndrica. Entender por qué no tiene la forma funcional de las delta en cilíndrica y esfpericas no tienen la estructura simple de la delta en cartesianas.

Transformada de Fourier de funciones de varias variables: Sea f una función en n dimensiones absolutamente integrable en todas las variables. Entonces, tomando la TF de una a una de las n variables x_i resulta,

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\boldsymbol{k}) &= \int dx_n e^{ik_nx_n}\cdots\int dx_1 e^{ik_1x_1}f(x_1,\cdots,x_n)\\
&= \int d^n\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{kx}}f(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

La aplicación n veces de la fórmula inversa dará,

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n\boldsymbol{k}\, e^{-i\boldsymbol{kx}}\widetilde{f}(\boldsymbol{k})$$

Convención para la variable temporal: Dada la ocurrencia de la variable temporal en muchas áreas de la Física, es usual utilizar una convención especial para la variable temporal que involucra un símbolo diferente y un signo diferente,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\omega) &= \int dt\, e^{-i\omega t}f(t)\\
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t}\,\widehat{f}(\omega)
\end{aligned}$$

Luego, si la función depende tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo tendremos,

$$\widehat{\widetilde{f}}(\boldsymbol{k},\omega) = \int d^n\boldsymbol{x} \int dt\, e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} f(\boldsymbol{x},t)$$

$$f(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} \widehat{\widetilde{f}}(\boldsymbol{k},\omega)$$

Notar la superposición del símbolo $\hat{f}$ al $\widetilde{f}$. Esto es para indicar la transformada de Fourier en el tiempo. Luego, uno podría realizar la transformada de Fourier en la coordenada $\boldsymbol{x}$ y no en la temporal o viceversa, según la conveniencia del problema en mano.

Propiedades: Sea $f(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{|x_i|\to\infty} 0$ para todo x_i, entonces

- $$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_r}} = -ik_r\, \tilde{f}$$
  con $r = 1, \cdots, n$
- $$\widetilde{\nabla^2 f} = -|\boldsymbol{k}|^2\, \tilde{f}$$
- $$\widehat{\frac{\partial f}{\partial t}} = i\omega\, \hat{f}$$

Transformada de Fourier de funciones generalizadas de varias variables: La teoría introducida anteriormente para una variable es extendida para el caso de n variables, con el resultado que, funciones generalizadas que asintóticamente no crecen más rápido que un polinomio, tienen transformada de Fourier, y las propiedades listadas arriba para la funciones ordinarias, valen para la transformada generalizada.

Ejemplos:

- $\widetilde{\delta} = 1$
- $\widetilde{1} = (2\pi)^n\delta$
- $\delta\widetilde{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})} = e^{i\boldsymbol{ka}}$

3.5 Aplicación: Ecuación de onda en tres dimensiones

En esta sección vamos a resolver la ecuación de onda en tres dimensiones usando como técnica los elementos introducidos en las secciones anteriores.

La siguiente ecuación, puede ser interpretada como que corresponde a la propagación de una onda de presión en tres dimensiones generada por una fuente con densidad f,

$$u_{tt} - \nabla^2 u = f$$

También puede ser interpretada como la propagación de una onda electromagnética generada por una corriente eléctrica de densidad f.

La solución fundamental corresponde a resolver la ecuación anterior reemplazando la fuente por la delta de Dirac en espacio y tiempo,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\right) w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta(t - s)$$

donde $\boldsymbol{y}$ y s hacen las veces de parámetros.

Aplicando la transformada de Fourier a las variables con $(\boldsymbol{x}, t)$, con la convención anterior,

$$v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = \int d^3\boldsymbol{x} \int dt\, e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \omega t)} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s)$$

Notar que no usamos tildes con el objeto de simplificar la notación. En su lugar las variables dan cuenta si nos referimos a la transformada o anti-transformada.

Tomando la transformada de Fourier término a término en la ecuación fundamental resulta,

$$\left[(i\omega)^2 - (-|\boldsymbol{k}|^2)\right] v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = (e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{y}})(e^{-i\omega s})$$

la cual es una ecuación algebraica en v y puede despejarse,

$$v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = \frac{e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{y} - \omega s)}}{k^2 - \omega^2}$$

Dado que nuestro interés es w, tomamos la antitransformada de v,

$$\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3+1}} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \omega t)} v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - \omega t)} \frac{e^{i(\boldsymbol{k}\boldsymbol{y} - \omega s)}}{k^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \omega(t - s)]} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{\xi}}\, e^{-i\omega\tau} \frac{1}{k^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

Donde hemos introducido las siguientes variables,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
\tau &= -(t - s)
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares para la variable $\boldsymbol{k}$ resulta,

$$w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty k^2dk\int_0^{2\pi}d\phi\int_1^{-1}(-1)d(\cos\theta)\int d\omega\, e^{ik\xi\cos\theta}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\omega\int_0^\infty k^2dk\,[\phi]_0^{2\pi}\,(-1)\left[\frac{e^{ik\xi\cos\theta}}{ik\xi}\right]_1^{-1} e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\omega\int_0^\infty k^2dk(-1)\frac{(-2i\sin k\xi)}{ik\xi}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3}\int d\omega\int_0^\infty k\,dk\frac{\sin k\xi}{\xi}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi^3\xi}\int_0^\infty k\,dk\sin k\xi\int_{-\infty}^\infty d\omega\frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-\omega^2}$$

Para avanzar necesitamos calcular la integral en ω porque el resultado de la integral depende de k. Esto lo podemos hacer utilizando las herramientas del análisis complejo. Notemos que los polos ocurren en $\omega=\pm k$. Según cómo decidamos evitar estas singularidades obtendremos diferente soluciones para la integral y luego diferentes soluciones para la solución fundamental w. Como consecuencia, aún para la misma fuente f, la solución u obtenida para cada w podría tener diferente significado físico. El efecto de **tomar las diferentes formas de evitar las singularidades se corresponden con diferentes condiciones de contorno.**

Solución retardada: Evitando ambas singularidades por abajo (en realidad, ambas singularidades se desplazan un $\epsilon>0$ hacia arriba. Esto debe entenderse en el contexto de condiciones de contorno), como se muestra en la figura 3.5, se obtiene lo que se llama solución retardada, porque como veremos, corresponde a la solución causal que da cero cuando $\tau>0$ y diferente de cero para $\tau<0$. Recordando que la delta en el tiempo es $\delta(t-s)=\delta(-\tau)$, luego la excitación ocurre al tiempo $t=s$, como el tiempo avanza hacia el futuro, nos interesa las solución para $t>s$, esto es $\tau<0$ dado que $\tau=s-t$. Esto explica la denominación de retardado: el efecto ocurre después de la perturbación.

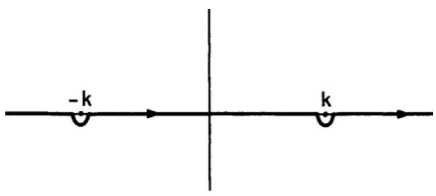


Figure 3.5:

Calculemos la integral en ω para el contorno de la Fig. 3.5.

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^\infty d\omega\frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-\omega^2}$$

Solución para $\tau > 0$: Para $\tau > 0$ el contorno debe cerrarse sobre el semiplano complejo inferior para que la integral sobre el arco de circunferencia de radio R se anule al tomar $R \to \infty$. Veamos...

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i[Re(\omega)+iIm(\omega)]\tau} = e^{-iRe(\omega)\tau}\, e^{Im(\omega)\tau}$$

Luego, para que exista un damping, el exponente en $e^{Im(\omega)\tau}$ debe ser $Im(\omega) < 0$, luego el contorno debe cerrarse en el semiplano inferior.

Dado que este contorno no tiene polos resulta

$$I(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau > 0\,(t < s)\,.$$

Solución para $\tau < 0$: Para $\tau < 0$ la exponencial resulta

$$e^{-i\omega\tau} = e^{i\omega|\tau|} = e^{i[Re(\omega)+iIm(\omega)]|\tau|} = e^{iRe(\omega)|\tau|}\, e^{-Im(\omega)|\tau|}$$

Para que exista un término de damping en el integrando debe ser $Im(\omega) > 0$, por lo que el contorno debe cerrarse por el semiplano superior.

Dado que el contorno completo contiene ambos polos, la integral será diferente de cero. El valor de la integral se obtiene aplicando el teorema de los residuos.

$$\lim_{R\to\infty} \oint = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} = 2\pi i\,[Res(g(\omega), \omega = -k) + Res(g(\omega), \omega = k)]$$

con

$$g(\omega) = -\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2} = -\frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - k)(\omega - (-k))}$$

notar el signo para que g tenga denominador de la forma $z - z_0$, con z_0 el polo. Escribimos $g = \phi/(\omega - z_0)$.

Luego,

$$Res(g(\omega), \omega = -k) = -\frac{e^{-i(-k)\tau}}{(-k - k)} = \frac{e^{ik\tau}}{2k}$$

$$Res(g(\omega), \omega = k) = -\frac{e^{-ik\tau}}{(k + k)} = -\frac{e^{-ik\tau}}{2k}\,,$$

y

$$\begin{aligned}[Res(g(\omega), \omega = -k) + Res(g(\omega), \omega = k)] &= \frac{e^{ik\tau}}{2k} + (-1)\frac{e^{-ik\tau}}{2k} \\ &= i\frac{\sin k\tau}{k}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{R\to\infty} \oint g(\omega)d\omega = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\omega)d\omega + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(\omega)d\omega = -2\pi\frac{\sin k\tau}{k}$$

Tomando el límite y considerando que la integral sobre C_R se anula, obtenemos (con la integral en el sentido de valor principal),

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2}$$

$$= -2\pi\frac{\sin k\tau}{k} \quad \text{para} \quad \tau < 0\,(t > s)\,.$$

Juntando ambas soluciones para $\tau > 0\,(t < s)$ y $\tau < 0\,(t > s)$ tenemos

$$I = -\frac{2\pi}{k} \sin k\tau H(-\tau)$$

Observación: De la discusión anterior uno podría inducir que existe una solución tal que el efecto ocurra antes que la perturbación. Efectivamente, eligiendo la forma de evitar las singularidades convenientemente puede obtenerse una solución para la cual, la solución fundamental es cero para $\tau < 0$ $(t > s)$ y no nula para $\tau > 0$ $(t < s)$, cuando la perturbación ocurrió para $\tau = 0$ $(t = s)$. Esto es, existe respuesta antes que la excitación ocurra, a esta solución se la llama solución avanzada.

Volviendo al cálculo... Reemplazando este valor particular de la integral en ω en la ecuación para w tenemos,

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= \frac{1}{4\pi^3\xi} \int_0^\infty k\, dk \sin k\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2} \\ &= -\frac{1}{4\pi^3\xi} \int_0^\infty k\, dk \sin k\xi \, \frac{2\pi}{k} \sin k\tau H(-\tau) \\ &= -\frac{H(-\tau)}{2\pi^2\xi} \int_0^\infty dk \sin k\xi \, \sin k\tau \end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica del producto de senos y el hecho que el integrando es par, escribimos

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= -\frac{H(-\tau)}{2\pi^2\xi} \int_0^\infty dk \sin k\xi \, \sin k\tau \\ &= -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi} \int_{-\infty}^\infty dk[\cos k(\xi - \tau) - \cos k(\xi + \tau)] \end{aligned}$$

Reescribimos cada una de las integrales en los cosenos usando la parte real de la relación,

$$\widetilde{1}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k)\,,$$

esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos kx\, dx = \Re\left[\int_{-\infty}^{\infty} 1\, e^{ikx} dx\right] = \Re\left[\widetilde{1}(k)\right] = \Re\left[2\pi\delta(k)\right] = 2\pi\delta(k)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &=_1 -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi} \int_{-\infty}^\infty dk[\cos k(\xi - \tau) - \cos k(\xi + \tau)] \\ &=_2 -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi}[2\pi\delta(\xi - \tau) - 2\pi\delta(\xi + \tau)] \\ &=_3 -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi}[2\pi\delta(\xi + |\tau|) - 2\pi\delta(\xi + \tau)] \\ &=_4 -\frac{H(-\tau)}{4\pi\xi}[\delta(\xi - \tau) - \delta(\xi + \tau)] \end{aligned}$$

Analicemos primero el término $H(-\tau)\,\delta(\xi-\tau)$ para τ positivo y negativo:

- Para $\tau > 0$, $H(-\tau) = 0$, luego $H(-\tau)\,\delta(\xi-\tau) = 0$.
- Para $\tau < 0$, $H(-\tau) = 1$, pero $\delta(\xi-\tau) = \delta(\xi+|\tau|) = 0$, pues $\xi = |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| > 0$, luego $H(-\tau)\,\delta(\xi-\tau) = 0$.

Concluimos que $H(-\tau)\,\delta(\xi-\tau) = 0$ para todo τ.

Analicemos el término $H(-\tau)\,\delta(\xi+\tau)$ para τ positivo y negativo:

- Para $\tau > 0$, $H(-\tau) = 0$, y también $\delta(\xi+\tau) = 0$ por ser $\xi > 0$, luego $H(-\tau)\,\delta(\xi+\tau) = 0$.
- Para $\tau < 0$, $H(-\tau) = 1$, mientras $\delta(\xi+\tau) = \delta(\xi-|\tau|)$ no se anula para $\xi = |\tau|$, luego $H(-\tau)\,\delta(\xi+\tau) = \delta(\xi+\tau)$

Concluimos que $H(-\tau)\,\delta(\xi+\tau) = \delta(\xi+\tau)$ para todo τ.

Entonces,

$$
\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) &= \frac{1}{4\pi\xi}\delta(\xi+\tau) \\
&= \frac{\delta(\xi+\tau)}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} \\
&= \frac{\delta(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+\tau)}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} \\
&= \frac{\delta(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+s-t)}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}
\end{aligned}
$$

Luego, la solución fundamental de la ecuación de onda en tres dimensiones,

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\right) w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\delta(t-s)
$$

resulta ser la distribución singular,

$$
w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) = \frac{\delta(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+s-t)}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}
$$

La solución fundamental puede interpretarse como la respuesta a una fuente localizada en el espacio y el tiempo. De este modo $w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s)$ es la respuesta en el punto $\boldsymbol{x}$ al tiempo t de una perturbación localizada en el punto $\boldsymbol{y}$ al tiempo s.

En la interpretación electromagnética, podría corresponder a un destello en la posición $\boldsymbol{y}$ en el momento s. La solución particular que hemos calculado dice que no hay respuesta excepto al tiempo

$$
t = s + |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\,.
$$

A este tiempo ocurre un pulso representado por la función delta. Para $\boldsymbol{x}$ más cerca de $\boldsymbol{y}$ el pulso aparece antes que para $\boldsymbol{x}$ más alejado de $\boldsymbol{y}$, al tiempo que la amplitud de la señal recibida en $\boldsymbol{x}$ decrece como $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ debido al denominador de la solución w. De esta forma la solución fundamental expresa el hecho que la perturbación de una fuente localizada se aleja de la fuente a una velocidad constante (notar las unidades en el argumento de la delta) en todas direcciones, representando una onda esférica. Notar que el factor $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|$ también es consistente con la conservación de energía.

Función de Green: Por lo discutido en el párrafo anterior queda más claro la denominación para esta solución particular como retarda, dado que la señal llega después que la perturbación ha ocurrido. Por otro lado, es la que tiene significado físico para nuestro mundo (al estado del conocimiento actual). A esta solución se la denomina función de Green retardada,

$$g_{ret}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) = \frac{\delta(|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|+s-t)}{4\pi|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}$$

porque corresponde a la condición de contorno homogénea para $\boldsymbol{x} \to \infty$:

$$g_{ret}(\boldsymbol{x} \to \infty, t; \boldsymbol{y}, s) = 0\,.$$

Para simplificar la expresión de g_{ret}, veamos como luce para $\boldsymbol{y} = 0$ y $t = 0$,

$$g_{ret}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{0},0) = \frac{\delta(|\boldsymbol{x}|-t)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$$

Luego, $g_{ret}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s)$ sirve para hallar la solución de la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\right) u(\boldsymbol{x},t) = f(\boldsymbol{x},t)$$

con una fuente $f(\boldsymbol{x},t)$ arbitraria mediante la integral,

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int d\boldsymbol{y} \int ds\, g_{ret}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) f(\boldsymbol{y},s)$$

Esta solución $u(\boldsymbol{x},t)$ también satisface las condiciones de contorno homogéneas que satisface $g_{ret}(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s)$, esto es, $u(\boldsymbol{x} \to \infty, t) = 0$

3.6 Aplicación: Función de Green para la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson en 3D

$$-\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = f(\boldsymbol{r})$$

se podría pensar como la ecuación de onda estacionaria que resolviemos en la sección anterior donde está ausente la variable temporal.

Actividad X: Siguiendo los lineamientos de la sección anterior hallar la función de Green para el operador

$$-\nabla^2 u(\boldsymbol{r})$$

Si, en el resultado de la sección anterior, ignoramos los términos relacionados a la variable t y el parámetro s, resulta

$$g_{ret}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

donde la delta se ha omitido porque vino de la transformada de Fourier temporal.

Este es el resultado al que debe llegarse en la actividad anterior.

Appendix A

Material Complementario

Este apéndice contiene información que complementa o contextualiza conceptos para una mejor comprensión de los temas desarrollados en los capítulos anteriores.
Los temas contenidos en este apéndice no entran en la evaluación del curso.

A.1 Delta de Dirac '*a lo Dirac*'

Durante el desarrollo de la Mecánica Cuántica Dirac se encontró con que tenía que tratar con vectores de *longitud infinita*, al tiempo que las magnitudes física calculadas con estos *´vectores* eran finita.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) = Eu(x) \longrightarrow Hu(x) = Eu(x)$$

Autofunciones con norma finita:

$$Hu(x) = Eu(x) \longrightarrow u(x, E_n) \longrightarrow \int u^2(x, E_n)dx < \infty$$

con $n \in \mathcal{N}_0$.

Autofunciones con norma infinita

$$Hu(x) = Eu(x) \longrightarrow u(x, E) \longrightarrow \int u^2(x, E)dx = \infty$$

con $E \in \mathcal{R}^+$.

Para lidiar con esto introdujo la cantidad $\delta(x)$, dependiente del parámetro x, tal que $\delta(x)$ satisface las siguientes condiciones,

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

- $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$

La magnitud $\delta(x)$, claramente, no es una función, por lo que lo definió como una *función impropia*. A pesar de no ser una función puede combinarse en formas apropiadas en ciertas expresiones siempre que no surjan inconsistencias obvias.

Por ejemplo, puede ser usada en el siguiente contexto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

con $f(x)$ cualquier función continua. También vale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

El dominio de integración no necesita ser de $(-\infty, \infty)$ sino sólo en la región cercana al punto crítico donde la función $\delta(x)$ no es nula, esto es, en la vecindad del argumento nulo. Por ejemplo,

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

En Mecánica Cuántica, la función impropia $\delta(x)$ aparece siempre en una integral. Luego, el uso de $\delta(x)$ no afecta a la rigurosidad de la teoría y sólo opera como una forma conveniente de notación, simplificando de esta forma, expresiones extensas o engorrosas.

Una forma alternativa de definir la función $\delta(x)$, que muestra bajo qué condiciones ésta surge es la siguiente. Sea $\epsilon'(x)$ el coeficiente diferencial de la función $\epsilon(x)$ definido por (reconocer la función escalón)

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Sean, $g_1 > 0$, y $g_2 > 0$, luego,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\epsilon'(x)dx &= \int_{-g_2}^{g_1} f(x)\epsilon'(x)dx \\ &= [f(x)\epsilon(x)]_{-g_2}^{g_1} - \int_{-g_2}^{g_1} f'(x)\epsilon(x)dx \\ &= f(g_1) - \int_{0}^{g_1} f'(x)dx \\ &= f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \end{aligned}$$

Haciendo abuso de notación, escribimos,

$$\epsilon'(x) = \delta(x)$$

De este modo, Dirac encontró que la función $\delta(x)$ aparece siempre que exista una discontinuidad.

Dirac encontró un número de ecuaciones que pueden escribirse en términos de la $\delta(x)$. Ellas constituyen, si se quiere, reglas para la manipulación algebraica de ecuaciones donde se entiende la equivalencia entre los miembros de la izquierda y derecha, por ejemplo

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a}$$

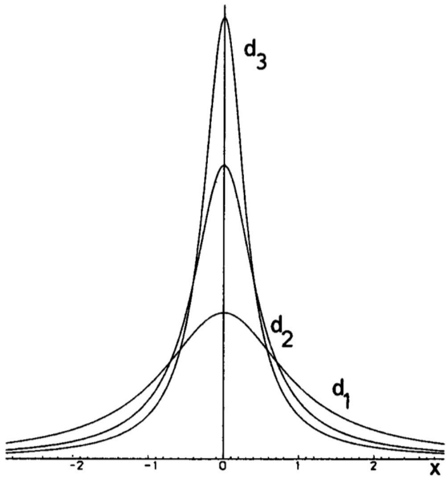
$$\int \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

con $a > 0$.

Una realización posible de la delta es dada por el límite de la siguiente sucesión,

$$d_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)dx = 1$$



Esto significa que,

- La integral de lo que resulta del integrando es la unidad, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{n\to\infty} d_n(x)\right] dx = 1$$

- que lo que resulta del límite es cero en todo el argumento excepto en un punto.

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = 0$$

para $x \neq 0$

Estas son las propiedades que Dirac definió para la que hoy llamamos delta de Dirac. Luego, podemos considerar que el límite de las funciones bien comportadas $d_n(x)$ es la función singular,

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = \delta(x)$$

El objeto del análisis funcional es dar un marco riguroso a este tipo de funciones impropias, hoy denominadas funcionales.

La Delta de Dirac es sólo un ejemplo de lo que Dirac llamó función singular. Veremos otras y veremos cuando versátiles son para resolver problemas específicos.

A.2 Valor principal

Definición: El proceso de evitar singularidades en una integral mediante el uso de un proceso límite, se denomina **integral impropia**. Por ejemplo, para el integrando

$$\frac{f(x)}{x},$$

singular en $x = 0$, uno puede definir la integral $I(\epsilon, \delta)$,

$$I(\epsilon, \delta) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

De este modo, si la integral $I(\epsilon, \delta)$ converge en el límite de ϵ y δ tendiendo a cero en forma independiente, entonces se dice que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$$

converge a ese límite. En general este no es el caso a menos que $f(0) = 0$, pues resulta que uno obtiene un límite si toma $\delta = \epsilon$, pero el límite es diferente si uno toma, por ejemplo, $\delta = 2\epsilon$. Luego, se le podrían asignar diferentes valores a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ según el proceso límite seleccionado!.

Definición: Tomando el caso simétrico, esto es,

$$\delta = \epsilon$$

da un valor a la integral impropia denominado **valor principal**, y se lo denota como P.

$$\begin{aligned} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx &= lim_{\epsilon\to 0^+} I(\epsilon, \epsilon) \\ &= lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

A.3 Valor principal de una función test

Sea $\phi \in \mathcal{D}$, luego,

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] \tag{A.1}$$

consideremos primero el corchete,

$$[\cdots] = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

$$= \left[\phi(x) \ln |x| |_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln |x| dx \right] + \left[\phi(x) \ln |x| |_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx \right]$$

$$= [\phi(-\epsilon) - \phi(\epsilon)] \, \ln |\epsilon| - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln |x| dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx$$

$$= \phi'(\xi) \, 2\epsilon \, \ln |\epsilon| - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln |x| dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx \, ,$$

donde hemos usado el teorema del valore medio.

Tomando el límite, el primer término de anula, resultando

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right]$$

$$= lim_{\epsilon \to 0^+} \left[- \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln |x| dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx \right]$$

$$= - \int_{-\infty}^{0} \phi'(x) \ln |x| dx - \int_{0}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx$$

Luego,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \phi'(x) \ln |x| dx \tag{A.2}$$

A.4 Procedimiento de Hadamard

Para $n > 1$ el valor principal de la integral no existe e integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x^n} dx \, , \tag{A.3}$$

divergen.

En la teoría de propagación de ondas aparecen integrales de la forma de la Ec. (A.3) con $n \geq 2, 3, \ldots$. Hadamard instrumentó un procedimiento para extraer un valor finito de la integral divergente. Éste consiste en integrar por partes, como si la integral fuera convergente, tantas veces como haga falta hasta conseguir una integral convergente, al tiempo que se desechan los términos divergentes.

Ejemplo: Veamos el caso $\frac{1}{x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx \to \phi(x) \left.\frac{(-1)}{x}\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\phi'(x) dx$$

$$\to \phi'(x) \ln|x| |_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx$$

$$\to - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx := - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx \tag{A.4}$$

Vemos que este resultado coincide con el que surge de la teoría de distribuciones.

A.5 Resolución de la ecuación $\boldsymbol{xf} = \mathbf{1}$

Sea que queremos hallar la distribución $\boldsymbol{f}$ que satisface la siguiente relación algebraica con las distribuciones regulares $\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{1}$,

$$\boldsymbol{xf} = \mathbf{1} \,. \tag{A.5}$$

Comencemos definiendo una función test con la propiedad que se anule cuando $x \to 0$. Ello se consigue definiendo ϕ y θ, ambas funciones test, tal que $\theta(0) = 1$ y componiéndolas de la siguiente forma, $\phi(x) - \phi(0)\theta(x)$. Luego la siguiente función $\tilde{\phi}(x) \in \mathcal{D}$ y es bien comportada en cero,

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle &= \langle \boldsymbol{f}, x\tilde{\phi} + \phi(0)\theta \rangle = \langle \boldsymbol{f}, x\tilde{\phi} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{xf}, \tilde{\phi} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle = \langle \boldsymbol{1}, \tilde{\phi} \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \int \tilde{\phi}(x)dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \int \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x} dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle = P \int \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x} dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle - \langle \boldsymbol{P/x}, \phi(0)\theta \rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle + \langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{P/x}, \phi(0)\theta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle + \phi(0)\langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{P/x}, \theta \rangle \\
&= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle + \phi(0)C \\
&= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi \rangle + \langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle C \\
&= \langle (\boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}), \phi \rangle
\end{aligned}$$

con $C = \langle \boldsymbol{f} - \boldsymbol{P/x}, \theta \rangle = cte.$

Luego,

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \langle (\boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}), \phi \rangle \Rightarrow \boldsymbol{f} = \boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}\,,$$

con C constante.

A.6 Serie $\sum \cos(2n\pi x)$

En el presente apéndice damos los detalles procedimentales para generar una distribución singular a partir de la serie del coseno,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x)\,. \tag{A.6}$$

Esta serie no tiene significado en el análisis usual dado que

- Diverge para x entero ($x \in \mathcal{Z}$),
- Oscila para $x = \frac{2n+1}{2}$, y
- No converge para $x \in \mathcal{Q}$.

La serie de cosenos, Ec. (A.6), puede obtenerse diferenciando *formalmente*[1] término a término la siguiente serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} .$$

Esta serie de senos es la serie de Fourier de la función f,

$$f(x) = \frac{1-2x}{4} , \tag{A.7}$$

la cual es periódica con período 1 y definida para $0 < x < 1$. Ver Fig. A.1

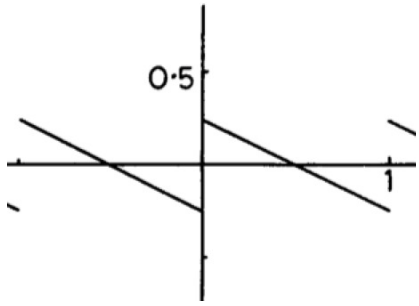


Figure A.1:

La serie,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \tag{A.8}$$

convergen punto a punto pero no uniformemente. Ésta puede obtenerse diferenciando término a término la siguiente función

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{(2n\pi)^2} , \tag{A.9}$$

la cual converge uniformemente para todo x, y las sumas parciales son continuas y por lo tanto son *localmente integrables*.

Luego, por el teorema de convergencia distribucional [2], las sumas parciales convergen distribucionalmente, esto es, la serie de distribiuciones

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-2} \boldsymbol{\cos(2n\pi x)}$$

converge a la distribución $\boldsymbol{F}$ generada por la suma clásica $F(x)$ de la serie (A.9),

$$-\sum_{n=1}^{m} (2n\pi)^{-2} \boldsymbol{\cos(2n\pi x)} \to \boldsymbol{F} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty ,$$

con $\boldsymbol{F}$ generada por $F(x)$.

Notemos que la función $F(x)$ es la integral de $f(x)$. Esto motiva el siguiente paso.

[1] La derivación término a término no es permisible en el análisis clásico porque la serie no converge uniformemente

[2] Si $F, f1, f2, \cdots$ son loc. tal que $f_n \to F$ uniformemente en cada intervalo acotado, entonces $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$ distribucionalmente

Volviendo a la serie del seno, observamos que una serie de Fourier puede ser integrada término a término aunque no converja uniformemente [3]. Tomando la integral de f, ec. (A.8), término a término obtenemos la serie $F(x)$, ec. A.9. Luego, F es la primitiva de f,

$$f(x) = F'(x)$$

Usando el teorema sobre la diferenciación término a término de una suceción de distribuciones [4], resulta que si

$$-\sum_{n=1}^{m}(2n\pi)^{-2}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} \to \boldsymbol{F} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty\,,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{m}(2n\pi)^{-1}\boldsymbol{\sin(2n\pi x)} \to \boldsymbol{f(x)} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty\,.$$

Esto muestra que la serie

$$(2n\pi)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\sin(2n\pi x)} = \boldsymbol{f(x)}$$

es una distribución, y derivando una ves más obtenemos otra distribución,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} = \boldsymbol{f'(x)}$$

que es la versión funcional de la serie de cosenos con que iniciamos esta sección.

Falta aún, explicitar $\boldsymbol{f'(x)}$. A partir de la Fig. A.1 y de la ec. (A.7), obtenemos,

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{excepto} \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Por otro lado, ya aprendimos que las discontinuidades contribuyen (las derivadas) con deltas de amplitud del salto (0.5 en este caso), entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k)\,, \tag{A.10}$$

lo cual da significado la serie de cosenos en el sentido de distribución.

A.7 Sobre integrales

La definición de la integral de una función generalizada sólo involucra la antiderivada, no dando indicio de cómo calcularla. En este apéndice damos detalles que complementan los conceptos introducidos en la sección 2.1 que permite calcular la integrar de una distribución.

El problema con la definición

$$\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \Phi \rangle\,, \tag{A.11}$$

es que Φ puede no ser una función test.

[3] Ver por ejemplo la demostración en el libro The theory of Functions. Titchmarsh. Oxford. 1939.

[4] Si $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots$ tal que $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$, entonces $\boldsymbol{f}'_n \longrightarrow \boldsymbol{F}'$

Dado que $\phi = \Phi'$ podemos escribir,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \phi(y)dy\,.$$

En lo que sigue mostramos que $\Phi(x)$ podría no tener soporte acotado.

Sea $\phi \in \mathcal{D}$ con $sop(\phi) \subset [a, b]$, podemos definir

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} \phi(y)dy\,,$$

entonces $\Phi(x)$ es suave, $\Phi' = \phi$ y $\Phi(x) = 0$ para $x < a$.

Para $x > b$ tenemos,

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} \phi(y)dy = \int_{a}^{b} \phi(y)dy\,,$$

donde hemos usado $sop(\phi) \subset [a, b]$. Esta integral, en general, no será nula,

$$\Phi(x) \neq 0$$

para $x > b$, y por ende $\Phi(x)$, aún siendo suave, no tendría soporte compacto, entonces $\Phi \notin \mathcal{D}$.

Para garantizar que $\Phi(x)$ tenga soporte compacto debemos pedir

$$\int_{a}^{b} \phi(y)dy = 0\,,$$

lo cual restrige el conjunto de funciones test, y la Ec. (A.11) puede ser usada para calcular $\boldsymbol{F}$ sólo para un *sub conjunto* de $\mathcal{D}$ consistentes de las funciones con integral nula, y esto no es lo que estamos buscando.

Para completar la construcción de $\boldsymbol{F}$, y entonces probar que cada distribución es integrable, uno debe extender (A.11) a *todo* $\mathcal{D}$. En lo que sigue se mostrará cómo hacer esto descomponiendo cada $\phi \in \mathcal{D}$ en una función con integral nula más un término remanente, el cual hace las veces de la constante de integración del cálculo usual.

Sobre Notación: En lo que sigue del apéndice no distinguiremos notacionalmente entre funciones y funciones generalizadas (distribuciones), esto es, no usaremos la notación 'negrita' para funcionales como veníamos haciéndolo.

El teorema de existencia de integrales declara que existen infinitas distribuciones F tal que $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f}$ y la diferencia entre dos cualesquiera de ellas es una constante. En lo que sigue vamos a mostrar constructivamente estas afirmaciones.

Sea

$$\mathcal{Z} = \{\psi : \psi \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) = 0\}\,.$$

Mostraremos como descomponer cualquier $\phi \in \mathcal{D}$ en un elemento de $\mathcal{Z}$ más un remanente.

Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = 1\,.$$

Para cada $\phi \in \mathcal{D}$ se define una función ψ como

$$\psi(x) = \phi(x) - k\varphi_0(x) \tag{A.12}$$

con

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \tag{A.13}$$

Entonces $\psi \in \mathcal{D}$ por ser suma de funciones test y también $\psi \in \mathcal{Z}$, pues

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x) - k\varphi_0(x)]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) - k\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x)dx = k - k\,1 = 0\,.\end{aligned}$$

Escribamos

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$$

entonces

$$\Psi(x) = 0$$

para $x < a$ y $x > b$, donde $[a, b]$ es un intervalo que contiene el $sop(\psi)$.

Veamos...

Para $x < a$ es inmediato, pues

$$\Psi(x < a) = \int_{-\infty}^{x<a} \psi(x)dx = \int_{-\infty}^{x<a} 0dx = 0\,.$$

Para $x > b$ tenemos,

$$\begin{aligned}\Psi(x > b) &=_1 \int_{-\infty}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_2 \int_{-\infty}^{a} \psi(x)dx + \int_{a}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_3 0 + \int_{a}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_4 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx \\ &=_5 0\end{aligned}$$

la igualdad $=_4$ por ser $[a, b]$ el soporte de ψ, y la igualdad $=_5$ por pertenecer al conjunto $\mathcal{Z}$.

Luego Ψ es una función test arbitraria, $\Psi \in \mathcal{D}$, por lo que podemos definir un funcional F sobre $\mathcal{D}$ como

$$\langle F, \phi\rangle = -\langle f, \Psi\rangle\,, \tag{A.14}$$

esto es, $\langle F, \phi\rangle$ es calculada descomponiendo $\phi(x) = \psi(x) + k\varphi_0(x)$ en una parte ψ que pertenece a $\mathcal{Z}$ y un remanente; luego se usa (A.11) aplicado a $\psi = \Psi'$ e ignorando el término $k\varphi_0(x)$. Esto es, hemos tomado $\langle F, \varphi_0\rangle$ nulo.

Desarrollemos el contenido de éste último párrafo,

$$\begin{aligned}
\langle F, \phi \rangle &= \langle F, \psi + k\varphi_0 \rangle \\
&= \langle F, \psi \rangle + \langle F, k\varphi_0 \rangle \\
&= \langle F, \Psi' \rangle + \langle F, k\varphi_0 \rangle \\
&= -\langle F', \Psi \rangle + \langle F, k\varphi_0 \rangle \\
&= -\langle f, \Psi \rangle + \langle F, k\varphi_0 \rangle
\end{aligned} \tag{A.15}$$

donde hemos usado,

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(x)dx \to \Psi'(x) = \psi(x)$$

y

$$F' = f \,.$$

Resta por demostrar que F definido por ec. (A.14) es una integral de f. Es simple mostrar que F es lineal y continuo. Para mostrar que $F' = f$, notemos que si θ' es la derivada de una función test, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)dx = \theta(-\infty) - \theta(\infty) = 0\,,$$

de modo que k en (A.13) se anula, esto es,

$$\psi(x) = \theta'(x) - k\phi_0(x) = \theta'(x)\,,$$

de este modo resulta para Ψ

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \theta'(y)dy\,. \tag{A.16}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle F', \theta \rangle &=_1 -\langle F, \theta' \rangle \\
&=_2 \langle f, \theta \rangle
\end{aligned}$$

donde en $=_1$ hemos usados la definición de derivada funcional y en $=_2$ hemos usado la definición (A.14) y ec. (A.16). *Esto muestra que F es una integral de f.*

Este procedimiento da muchas integrales de la distribución f, dependiendo de la elección de φ_0. En la Secc. 2.1 hemos mostrado que todas las integrales posibles son obtenidas agregando una constante a una de ellas, esto es,

$$F = G + cte\,,$$

con F y G integrales de f.

A.8 Transformada de Laplace

Tomando la transformada de Fourier (TF) de funciones causales, esto es, funciones que son nula para $t < 0$, resultaría

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-i\omega t} dt \,.$$

Para hacer que la integral sea convergente agregamos al integrando un factor de damping $e^{-\sigma t}$, con $\sigma > 0$,

$$F(\omega) = \int_0^\infty f(t) e^{-\sigma t} e^{-i\omega t} dt \,,$$

de este modo, la variable real ω cambia a una variable compleja $s = \sigma + i\omega$. Con esta nueva construcción podemos construir espectro de funciones que no eran posible con la TF, como por ejemplo, la función escalón.

Definición: Sea $f(t)$ una función causal, luego $f(t) = 0$ para $t < 0$. La **transformada de Laplace** $F(s)$ de $f(t)$ es la función compleja definida para $s \in \mathcal{C}$ por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \,,$$

siempre que la integral exista.

Para ejemplos y aplicaciones ver archivo *Transparencia-TransformadaLaplace.pdf.*

A.9 Series de Fourier compleja

En esta sección deducimos la siguiente expresión exponencial de la serie de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,n\,x}$$

Sea $f(x)$ periódica, luego

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx + \sum_{n=1} b_n \sin nx$$

con

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx
\end{aligned}$$

Escribiendo los senos y cosenos en téminos de las exponenciales compleja tenemos

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1} b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} e^{inx} \frac{a_n - ib_n}{2} + \sum_{n=1} e^{-inx} \frac{a_n + ib_n}{2} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} c_n e^{inx} + \sum_{n=1} \bar{c}_n e^{-inx}
\end{aligned}$$

con $c_n = (a_n - ib_n)/2$.

Veamos que $\bar{c}_n = c_{-n}$

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
\bar{c}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \\
&= c_{-n}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}e^{-inx} \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m e^{imx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}
\end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i0x}dx = c_0$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\,.$$