MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA II (F1810)

3^{er} año Lic. Física. FCEIA. UNR.

1er Semestre 2024

Módulo II:
Análisis Complejo

Docentes:
Federico Torresi
Alejandro Mezio
Rodolfo M. Id Betan(Rolo)

Reportar errores o comentarios a: idbetan@fceia.unr.edu.ar

July 25, 2024

Contents

Chapter 1

Elementos de números complejos

Actualizado: 2023.12.12

Contenido: Definición, propiedades, operaciones y representación gráfica de los números complejos. Representación polar y exponencial. Entornos, dominios y punto de acumulación. Esfera de Riemann y plano complejo extendido. Potencias enteras y raíces. Fórmula de Moivre. Raíz principal.
Crédito: Las figuras fueron tomadas del Churchill y del Zill.

Observación: Estos contenidos corresponden a nociones del Análisis Complejo que fueron introducidos en la asignatura Álgebra y Geometría Analítica I (1er año, 1er cuatrimestre).

Fuentes: (i) R. V. Churchill, J. W. Brown. Variable compleja y aplicaciones. 4ta Edición. McGraw-Hill. Boston (1988). Capítulo 1. (ii) D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications. Jones and Bartlett Publishers (2003). Capítulo 2.

Dedicación: 0.5 clase.

1.1 Definición, operaciones y representación gráfica

Definición: Se definen los números complejos z como los pares ordenados $z = (x, y)$, con x e y reales.

Definición: definimos parte real e imaginaria de z como x=Re(z) e y=Im(z).

Definiciones de igualdad, suma, producto, unidad imaginaria, conjugado y módulo: Sean $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$.

- **Igualdad**: $x = x'$ e $y = y'$
- **Suma**: $z + z' = (x + x', y + y')$
- **Producto**: $zz' = (xx' - yy', xy' + x'y)$.
- Escribiendo $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1)y$ resulta la **unidad imaginaria** $i = (0, 1)$, con
$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = -1$$

- Notación alternativa $z = x + i\,y$
- **Cero**: $z = 0 + i\,0$
- **Complejo conjugado**: Sea $z = x + i\,y$, su complejo conjugado es $z^* = x - i\,y$, o $\bar{z} = x - i\,y$, Luego,
$$zz^* = x^2 + y^2$$
- **Módulo**: $|z| = +\sqrt{x^2 + y^2}$, luego
$$zz^* = |z|^2$$

Representación gráfica en coordenadas cartesianas:

Se puede representar $z = x + i\,y$ en dos dimensiones, llamado plano complejo, con x la abscisa e y la ordenada, esto es, como coordenadas cartesianas $z = (x, y)$. Ver Fig. 1.1.

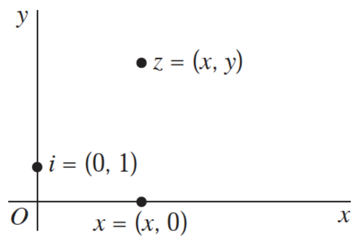


Figure 1.1: Representación cartersiana del número complejo z.

De esto resulta que z tiene la representación de un vector con (ver Fig. 1.2)

- Longitud $|z|$
- $z + z'$ suma usual de dos vectores.
- $-z$ es el vector opuesto de z.
- $|z - z'|$ es la distancia entre z y z'.
- z^* es la imagen especular de z respecto al eje real.

Propiedades del módulo

Desigualdad triangular: $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (ver Fig. 1.3)

Propiedades: (ver Fig. 1.4)

- $|z + z'| \geq |(|z| - |z'|)|$
  - Si $|z| > |z'| \Rightarrow |z + z'| \geq |z| - |z'|$. Ver Fig. 1.3
    Demostración:
    $$|z| = |z + z' + (-z')| \leq |z + z|' + |-z'| = |z + z'| + |z'| \Rightarrow |z| - |z'| \leq |z + z'|$$
  - Si $|z| < |z'| \Rightarrow |z + z'| \geq -(|z| - |z'|) = |z'| - |z|$
- $|z - z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z - z'| \geq |(|z| - |z'|)|$
- $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$

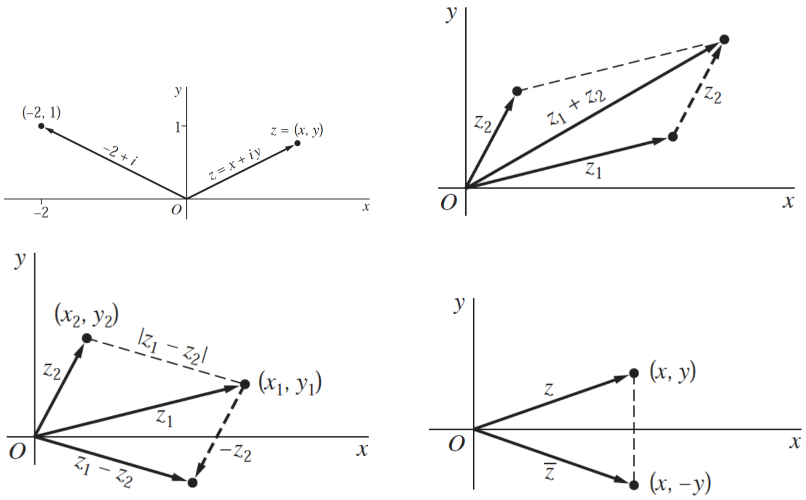


Figure 1.2:

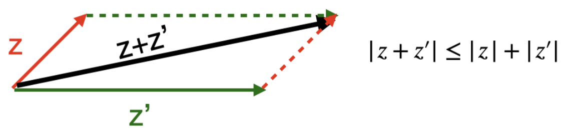


Figure 1.3: Desigualdad triangular

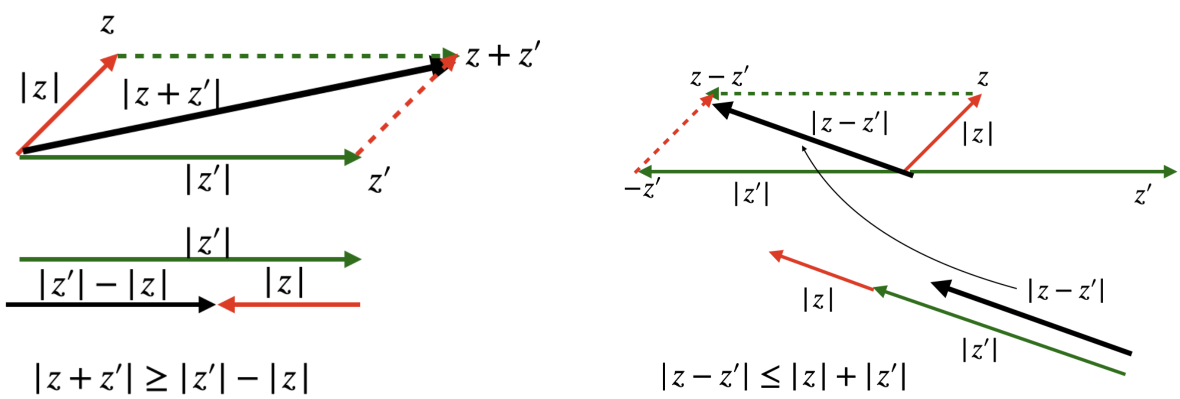
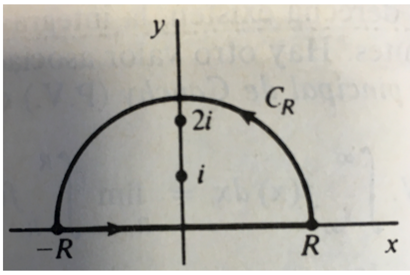


Figure 1.4: Algunas propiedades de módulos

Aplicación de las propiedades del módulo para calcular integrales: Consideremos la siguiente integral, donde el denominador tiene las siguientes raices $z = \pm i,\ \pm 2i$.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx \\
&\to \frac{1}{2}\int_C \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}dz = \frac{1}{2}\int_C \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz \\
&= \frac{1}{2}\int_L \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz + \frac{1}{2}\int_{C_R} \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}dz
\end{aligned}
$$



Queremos mostrar que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz = 0$

- Acotamos el polinomio del numerador:

$$|2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

- Acotamos el polinomio del denominador:

$$|(z^2+1)(z^2+4)| \geq (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 4) = (R^2-1)(R^2-4)$$

Luego, el integrando se comporta como $\frac{1}{R^2}$,

$$\left|\frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}\right| \leq \frac{2R^2+1}{(R^2-1)(R^2-4)} \to \frac{1}{R^2} \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left|\int_{C_R} \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz\right| = 0$$

Actividad 1: Luego de aprender sobre integrales indefinidas, volver al ejemplo anterior y mostrar que el comportamiento asintótico de la integral es de la forma $\frac{1}{R}$.

Propiedades aritméticas

- $z + z' = z' + z$
- $zz' = z'z$
- $(z + z') + z" = z + (z' + z")$
- $z(z' + z") = zz' + zz"$
- $-z = (-x, -y)$
- $zz^{-1} = 1$ con $z \neq 0$ y $z^{-1} = \left(\frac{x}{|z|^2}, -\frac{y}{|z|^2}\right)$
- $\frac{z'}{z} = z'z^{-1}$ con $z \neq 0$

Forma polar y argumento principal

Apelando a la representación gráfica de z, podemos introducir la siguiente representación **polar**, tomando coordenadas polares en lugar de cartesianas de la representación vectorial de z,

$$z = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

con (ver Fig. 1.5)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

y $z \neq 0$, porque para $z = 0$, θ no está definido.

Se define θ como el **argumento** de z:

$$\theta = arg(z)\,,$$

donde cada argumento difiere en $2n\pi$ uno de otro, con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Ver Fig. 1.5.

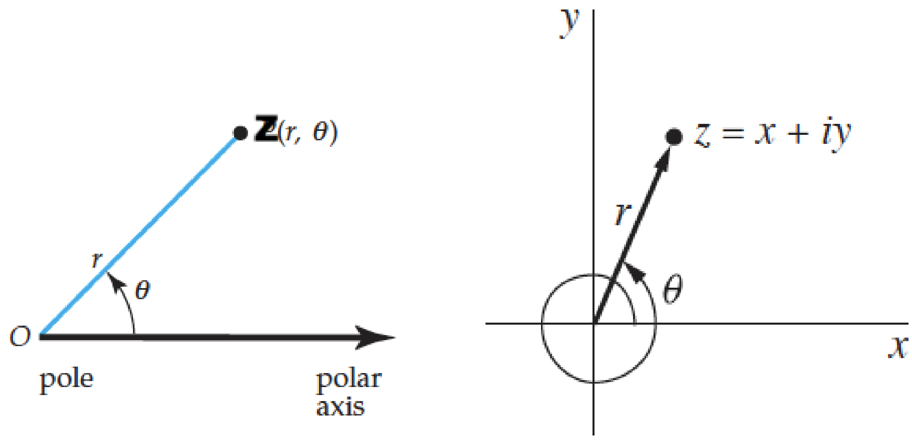


Figure 1.5: Representación polar de z.

Se define como el **valor principal** del $\arg(z)$, y se lo denota $\mathrm{Arg}(z)$, al valor del argumento comprendido entre $(-\pi, \pi]$, ver Fig. 1.6 (izquierda).

Actividad 2: Pensar porqué $\mathrm{Arg}(z)$ no es continua.

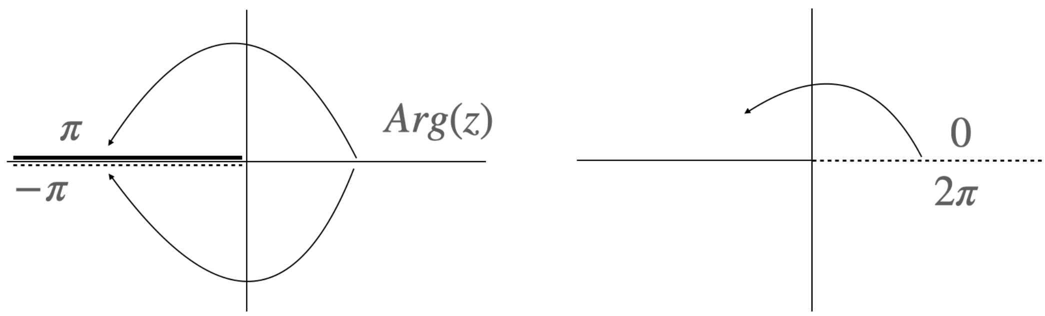


Figure 1.6: Argumento principal o valor principal del argumento de z

Luego, podemos escribir el $arg(z)$ de la siguiente forma,

$$\arg(z) = Arg(z) + 2n\pi\,,$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Ejemplo: Calculemos el argumento y el argumento principal de $z = 1 + i$.
Uno tiene

$$r = \sqrt{2}$$
$$\theta = arg(z) = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + 2n\pi\,,$$

(en este caso el ángulo puede 'verse' geométricamente) con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. El argumento principal resulta,

$$Arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

Actividad 3: Graficar el punto $z = -1 - i$ y justificar porqué el argumento principal de z es $-\frac{3}{4}\pi$ y no $\frac{5}{4}\pi$.

Actividad 4: Calcular el argumento y el argumento principal de

- $z_1 = 1$
- $z_2 = -1$

Propiedad de los argumentos

Los argumentos verifican la siguiente propiedad,

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,,$$

la cual puede demostrarse trabajando con las formas polares de z y z'. La Fig. 1.7 da una validación geométrica a esta propiedad.

Actividad 5: mostrar analíticamente esta propiedad.

Notar que esta propiedad la satisfacen los $\arg(z)$, pero no necesariamente los $\mathrm{Arg}(z)$. Esto se muestra desarrollando explícitamente el producto de las formas polares de z y z':

$$zz' = rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')]\,.$$

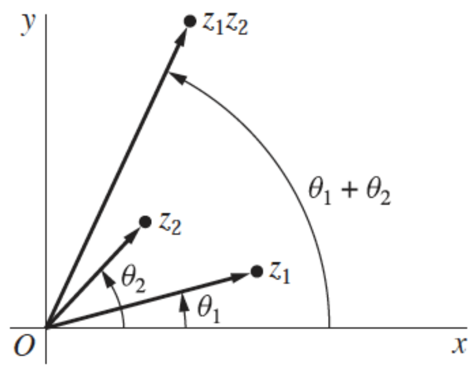


Figure 1.7: Suma de argumentos.

Forma polar de z^{-1}:

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]$$

Luego,

$$\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta)]$$

con

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

Fórmula de Euler: Las propiedades de los argumentos definidas en la forma polar y las propiedades algebraicas de la función exponencial, inducen a introducir la siguiente relación,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta$$

denominada fórmula de Euler, con θ en radianes.

Forma exponencial de z:

$$z = re^{i\theta}$$

Luego, dos números complejos no nulos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ son iguales si y sólo si

$$\begin{aligned} r_1 &= r_2 \\ \theta_1 &= \theta_2 + 2k\pi \end{aligned}$$

con $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Observación: esta relación entre los argumentos la vamos a usar para definir las funciones raíces y logaritmo.

Ejemplo: forma exponencial de $-1 - i$,

$$-1 - i = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{3}{4}\pi + 2n\pi\right)},$$

con $n = 0, \pm 1, ...$

Aplicación de la forma exponencial para la parametrización de una circunferencia: La siguiente expresión de z representa una circunferencia de radio R, centrado en z_0 en el plano complejo:

$$z = z_0 + Re^{i\theta},$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Ver Fig. 1.8.

Para $z_0 = 0$, todos los valores de $z = Re^{i\theta}$, se encuentran sobre la circunferencia de radio R con centro en el origen. Al incrementarse θ el punto z recorre la circunferencia en sentido anti-horario. Incrementando θ en 2π, volvemos al mismo punto z (relacionar esto con $arg(z)$). Luego, $z = Re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es una representación paramétrica de la circunferencia

$$|z| = R$$

centrado en el origen y radio R, mientras, $z = z_0 + Re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es una representación paramétrica de la circunferencia

$$|z - z_0| = R$$

centrado en $|z_0|$ y radio R.

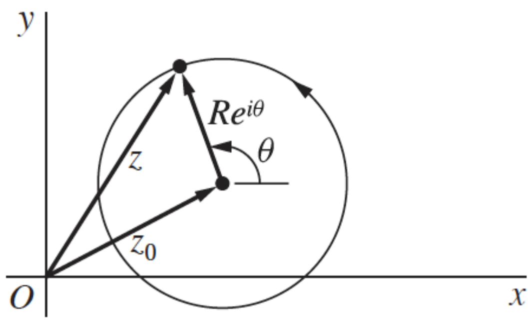


Figure 1.8: Parametrización de una circunferencia.

Aplicación: cambio de fase de una onda plana Sea $f(x) = \cos(x)$. Cambiemos la fase de f en $\pi/2$. Ver Fig. 1.9.

$$f(x) = \cos x = Re(e^{ix})$$
$$f(x) = \cos x \to f(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = Re(e^{i(x+\frac{\pi}{2})})$$
$$e^{ix} \to e^{i(x+\frac{\pi}{2})} = e^{ix}e^{i\frac{\pi}{2}} = ie^{ix}$$

Luego, multiplicar por la unidad imaginaria i cambia la fase en $\pi/2$.

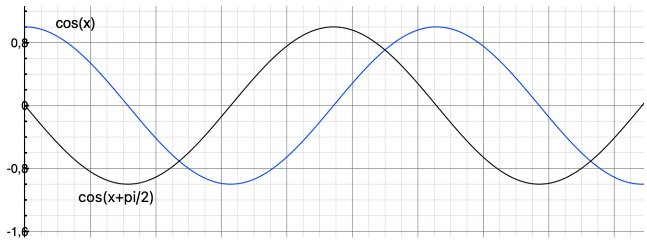


Figure 1.9: Cambio de fase en $\pi/2$.

Propiedades de $z = re^{i\theta}$ usando la fórmula de Euler:

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, luego
$$z^{-1} = r^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
- $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
- $z = re^{i(\theta+2n\pi)}$, con $n = 0, \pm 1, \cdots$.

1.2 Definición de regiones en el plano complejo

Para estudiar la proximidad entre puntos en el plano complejo se utiliza el concepto de entorno.

Entorno o vecindad: Entorno ϵ (con $\epsilon > 0$), o simplemente entorno de un dado punto z_0 consiste en todos los puntos z dentro de la circunferencia centrada en z_0 y radio ϵ. Ver Fig. 1.10:

$$|z - z_0| < \varepsilon\,.$$

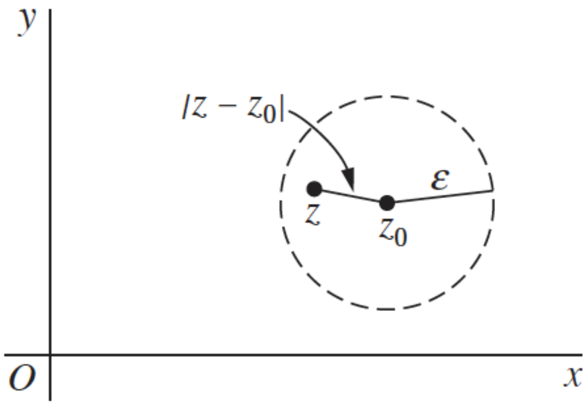


Figure 1.10: Entorno de z_0.

Definición de entorno agujereado o punteado: consiste en todos los puntos z de un entorno ϵ de z_0 excepto z_0, esto es, $0 < |z| < z_0$.

Definición de punto interior, exterior y frontera: Un punto z_0 se denomina **punto interior** de un conjunto S cuando existe algún entorno de z_0 que contiene solamente puntos de S; y es denominado **punto exterior** de S cuando existe un entorno de z_0 que no contiene puntos de S. Si z_0 no es ni punto interior ni punto exterior, se lo denomina **punto frontera** de S, luego un punto frontera tiene por vecinos, al menos un punto que pertenece a S y al menos un punto que no pertence a S.

Actividad 6: representar estos conceptos haciendo un esquema.

Definición de frontera: el conjunto de todos lo *puntos frontera* se denomina **frontera** de S.
Ejemplos: La circunferencia $|z| = 1$ es frontera de (i) $|z| < 1$ y (ii) $|z| \leq 1$.

Definición de conjunto abierto, cerrado y clausura: un conjunto se denomina **abierto** cuando no contiene ninguno de sus puntos frontera. **Ejemplo:** $|z| < 1$. Un conjunto se denomina **cerrado** cuando contiene todos sus puntos frontera. **Ejemplo:** $|z| \leq 1$. La **clausura** de un conjunto $\bar{S}$ es el conjunto cerrado formado por todos los puntos de S junto con la frontera de S.

Sobre conjuntos ni abiertos ni cerrados: algunos conjuntos no son ni abierto ni cerrados. Para que un conjunto sea **no abierto**, debe existir algún punto frontera que pertenece al conjunto. Para que un conjunto sea **no cerrado**, debe existir algún punto frontera no contenido en el conjunto. **Ejemplo 1:** el disco agujereado o punteado $0 < |z| \leq 1$ no es ni abierto ni cerrado. **Ejemplo 2:** el círculo $|z| \leq |e^{i\theta}|$ para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\theta$ y $|z| < |e^{i\theta}|$ para $\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ no es ni abierto ni cerrado.

Sobre conjuntos abiertos y cerrados: el conjunto de todos los números complejos es simultáneamente abierto y cerrado, dado que no tiene puntos fronteras.

Definición de conjunto conexo, dominio y región: un conjunto *abierto* S se denomina **conexo** o **conectado** si cada par de puntos z_1 y z_2 pueden unirse mediante un camino poligonal consistente en un número finito de intervalos contenidos enteramente en S. **Ejemplos:** (i) el conjunto abierto $|z| < 1$ es conexo, (ii) el anillo abierto $1 < |z| < 2$ es conexo. Ver Fig. 1.11. Un conjunto abierto y conexo es denominado **dominio**. **Ejemplo:** toda vecindad $|z - z_0| < \epsilon$, es un dominio. Un dominio con alguno, ninguno o todos sus puntos frontera se denomina **región**.

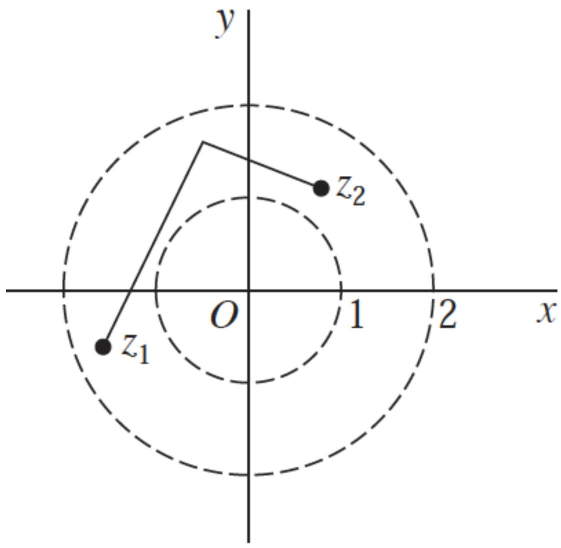


Figure 1.11: Conjunto conexo o conectado.

Definición de conjunto acotado y no acotado: un conjunto S se denomina **acotado** si cada punto de S está dentro de alguna circunferencia $|z| = R$, de otro modo, S es un conjunto **no acotado**. **Ejemplos:** (i) $|z| < 2$ es acotado, (ii) $Re(z) \geq 0$ no es acotado.

Punto de acumulación: un punto z_0 se denomina **punto de acumulación** de un conjunto S si cada entorno agujereado de z_0 contiene al menos un punto de S (notar que no pide que z_0 pertenezca a S). Luego, si un conjunto S es cerrado, entonces éste contiene todos sus puntos de acumulación. Recíprocamente, si un conjunto S contiene todos sus puntos de acumulación, entonces S es cerrado. **Ejemplo:** el cero es el único punto de acumulación del conjunto $z_n = \frac{i}{n}$, con $n = 1, 2, \cdots$.

Plano complejo extendido: si al conjunto de números complejos se le incluye el **punto infinito**, denotado por ∞, se genera el **plano complejo extendido**. Por convención, al referirnos a un punto z se hace referencia a plano finito.

Esfera de Riemann y proyección estereográfica: para visualizar el punto del infinito se considera una esfera unitaria con su centro en el plano complejo. Ver Fig. 1.12. Luego, a cada punto z del plano complejo le corresponde exactamente un punto P sobre la superficie de la esfera, identificado por la intersección de la semirrecta que une el polo norte con z. Haciendo corresponder al punto ubicado en el polo norte con el punto del infinito del plano extendido se tiene una correspondencia uno a uno entre el plano extendido y la esfera. Esta correspondencia recibe el nombre de **proyección estereográfica** y la esfera se denomina **esfera de Riemann**.

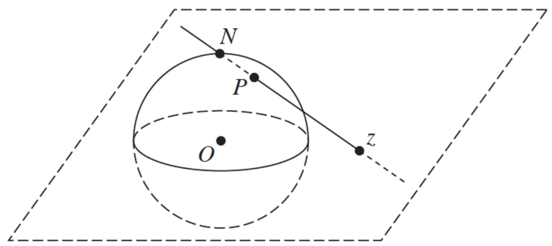


Figure 1.12: Esfera de Riemann y proyección estereográfica.

Entorno de ∞: Para todo número pequeño positivo ε, los puntos del plano *exterior* a la circunferencia $|z| = \frac{1}{\varepsilon}$ se corresponden con puntos de la esfera cercanos al punto en el polo norte. Se denomina **entorno de** ∞ al conjunto $|z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Este es el concepto de infinito al que apelaremos al introducir **límite**.

Álgebra con infinito: En el plano extendido uno define

- Para z finito ($z \neq \infty$), $z + \infty = \infty + z = \infty$
- Para z finito y no nulo ($z \neq \infty, 0$), $\frac{z}{\infty} = 0$
- Para z finito y no nulo, $\frac{z}{0} = \infty$
- Las siguientes expresiones son **indeterminadas** por carecer de definiciones no ambiguas:
  - $\infty - \infty$,
  - $\frac{\infty}{\infty}$,
  - ∞^0, y
  - 1^∞

1.3 Potencia y raíces

Potencias enteras

Para $z = re^{i\theta}$ se define la potencia de z como

$$z^n = r^n e^{in\theta}$$

con $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ y

$$z^0 = 1\,.$$

Para $n > 0$ se demuestra por inducción. Para $n < 0$ escribimos $n = -m$ con $m > 0$,

$$z^n = (z^{-1})^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = \left(\frac{1}{r}\right)^{-n} e^{i(-n)(-\theta)} = r^n e^{in\theta}$$

Aplicación para el cálculo de potencias: calcular $(\sqrt{3}+i)^7$. Convertimos $\sqrt{3}+i$ a su expresión exponencial y resolvemos,

$$(\sqrt{3}+i)^7 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{6}} = -64(\sqrt{3}+i)$$

Actividad 7: verificar el resultado anterior.

Fórmula de Moivre: Si $r = 1$,

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},$$

luego

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

esta última relación se denomina fómula de Moivre.

Aplicación de la fórmula de Moivre para determinar identidades trigonométricas:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$$

Luego, igualando parte real e imaginaria resulta,

$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

Actividad 8: verificar el resultado anterior.

Raíces

Denotamos $z_0^{1/n}$ al conjunto de la n raíces de $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$. La n-ésima raiz de z_0 es un número no nulo $z = re^{i\theta}$ que verifica

$$\begin{aligned}z^n &= z_0\\ r^n e^{in\theta} &= r_0 e^{i\theta_0} \Rightarrow\\ r &= \sqrt[n]{r_0}\\ n\theta &= \theta_0 + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\theta_0+2k\pi}{n}\end{aligned}$$

con $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ (ver restricción más abajo).

Luego, las n-ésima raíces de z_0

$$z = \sqrt[n]{r_0}e^{\frac{\theta_0+2k\pi}{n}},$$

se ubican en una circunferencia, equiespaciadas en el ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Así para $n = 2$ una raíz está opuesta a la otra, para $n = 3$ distan angularmente en $\frac{2\pi}{3} = 120^o$. En general las raíces se encuentran en los vértices de un polígono regular de n lados. Ver Fig. 1.13. Luego, la raiz es una **función multivaluada** porque asigna más de un valor a $z_0^{1/n}$ (la definición de *función compleja* la vemos formalmente más adelante).

Notemos que las raíces se repiten a partir de $k = n$, por lo que definimos las n raíces $z_0^{1/n}$ de $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$ como,

$$c_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}},$$

con $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Cuando el valor θ_0 en $c_k = \sqrt[n]{r_0}\, e^{i\frac{\theta_0+2k\pi}{n}}$ es el valor principal del $arg(z_0)$, esto es, $-\pi < \theta_0 \leq \pi$, el número c_0 es llamado **raíz principal**. En particular, cuando z_0 es un número real positivo r_0, su raiz principal es $\sqrt[n]{r_0}$.

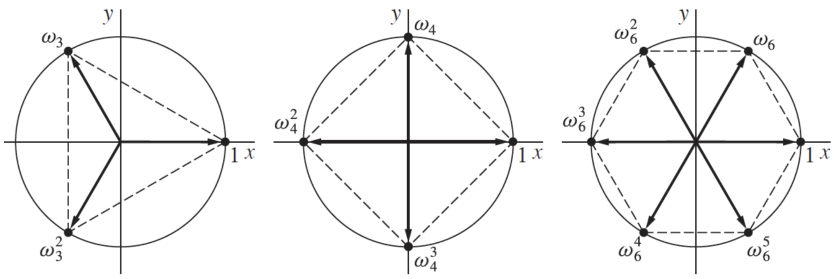


Figure 1.13: Ubicación geométrica de las raices para $n = 3, 4, 6$.

Actividad 9: Calcular $(-8i)^{1/3}$, graficar e indicar la raíz principal.
Rta. tenemos, $z_0 = -8i = 8\, e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, luego, $z = z_0^{1/3}$ implica $c_{k=0,1,2} = 2\, e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)}$, con $c_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\,\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$.

Chapter 2

Elementos de funciones complejas

Actualizado: 2023.12.12

Contenido: Funciones multivaluadas. Mapeos. Superficie de Riemann. Límite. Continuidad. Derivadas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. Analiticidad. Funciones elementales.

Fuentes: (i) R. V. Churchill, J. W. Brown. Variable compleja y aplicaciones. 4ta Edición. McGraw-Hill. Boston (1988). Capítulos 2, 8(sec.76) y 3. (ii) D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications. Jones and Bartlett Publishers (2003). Capítulos 2 y 4.

Dedicación: tres (3) clases.

2.1 Funciones de una variable compleja

Sea S un conjunto de números complejos. Una **función** f definida en S es una regla que asigna a cada $z \in S$ un número complejo w, denominado **valor de** f en z:

$$w = f(z)\,.$$

El conjunto S se llama **dominio de definición**. En caso que no se haga referencia al dominio de definición, se ha de tomar el mayor conjunto posible. Por ejemplo, se asume que S para $1/z$ es todo el plano complejo excepto cero.

Función multivaluada: se define la **función multivaluadas** cuando la regla asigna más de un valor al punto $z \in S$.
Ejemplo:

$$z^{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\Theta}{2}}\,,$$

con $r = |z|$ y Θ el valor principal del $arg(z)$, esto es, $-\pi < \Theta \leq \pi$.

Podemos definir una **función simplemente valuada** a partir de una multivaluada. Por ejemplo, para $z^{1/2}$ podemos tomar la solución con signo positivo,

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\frac{\Theta}{2}}$$

con $r > 0$ y $-\pi < \Theta \leq \pi$, con $f(0) = 0$. De este modo f está bien definida en todo el plano complejo.

Parte real e imaginaria de f: separando la parte real e imaginaria de $f(z)$ se tienen dos funciones reales de las variables $x = Re(z)$ e $y = Im(z)$,

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$$

En coordenadas polares $z = re^{i\theta}$ tenemos,

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)\,.$$

Ejemplo: Para $f(z) = z^2$ uno tiene,

- en coordenadas cartesianas $f(z) = [x^2 - y^2] + i\,[2xy]$,

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$
$$v(x, y) = 2xy$$

- en polares $f(z) = r^2 e^{i2\theta} = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$,

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta$$
$$v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta$$

Generación de una función a partir de dos funciones: recíprocamente, uno puede generar una función compleja f a partir de dos funciones reales $u(x, y)$ y $v(x, y)$ de las variables reales x, e y, por la construcción $f(z) = u + i\, v$, con $z = x + i\, y$ y el dominio de definición de f para z donde u y v están ambas definidas.

Función real a variable compleja: Si $v = 0$ entonces $f(z) = u(x, y)$ es una función real a variable compleja.

Ejempo: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ con $z = x + iy$.

Polinomio: Sea n cero o entero positivo, y sean $a_0, a_1, ..., a_n$ constantes complejas, la siguiente función es un polinomio de grando n,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

Funciones racionales: La función

$$\frac{P(z)}{Q(z)}\,,$$

con $P(z)$ y $Q(z)$ polinomios, es una función racional, cuyo dominio de definición es todo z con $Q(z) \neq 0$.

Mapeos

Se denomina **mapeo, aplicación o transformación** a la representación de la función compleja $w = f(z)$ a variable compleja z en dos planos separados, uno indicando los puntos $z = (x, y)$ y otro representando los puntos $w = (u, v)$.

Definición de imagen, rango e imagen inversa: la **imagen** de un punto z del dominio S es un punto $w = f(z)$, y el conjunto de imágenes de todos los puntos de un conjunto $T \subset S$ es llamado imagen de T. La imagen de todo el dominio de definición S es llamado **rango** de f. La **imagen inversa** de un punto w es el conjunto de todos los puntos z en el dominio de definición de f que tienen a w por imagen. La imagen inversa de un punto puede contener sólo un punto, muchos puntos, o ninguno. Este último caso ocurre cuando w no está en el rango de f.

Mapeos especiales: los términos **traslación, rotación y reflección** son usados para describir características geométricas dominantes de ciertos mapeos. En estos casos puede resultar conveniente usar un solo plano donde se representan simultáneamente z y w.

Ejemplos de mapeos especiales:

- Traslación: el mapeo
$$w = z + 1 = (x + 1) + iy\,,$$
con $z = x + iy$, puede ser pensada como una traslación de cada punto z en una unidad hacia la derecha.

- Rotación: el mapeo
$$w = iz = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$$
con $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ y $z = re^{i\theta}$, rota el radiovector del punto z un ángulo recto en el sentido antihorario.

- Reflexión: el mapeo
$$w = \bar{z} = x - iy$$
produce un punto en el plano complejo que es la imagen especular (reflexión) de $z = x+iy$ respecto al eje horizontal

Transformación de curvas y regiones. Los mapeos pueden resultar útiles para convertir dominios complicados o infinitos en dominios simples o finitos. Son utilizados, por ejemplo, para resolver ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: El mapeo $w = z^2$
$$w = x^2 - y^2 + i\,2xy\,,$$
con $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, transforma cada rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = c_1$ ($c_1 > 0$) en el plano (x, y), en una línea vertical en el plano (u, v). Ver Fig. 2.1. **Veamos:** de la relación $u = x^2 - y^2$ tenemos que $u = c_1$ para (x, y) en cualquiera de las dos ramas. Si $x > 0$, la relación $v = 2xy = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$ relaciona cada punto (x, y) en la dirección ascendente en la hipérbola con puntos ascendentes en la recta en el plano (u, v). Luego, si consideramos los puntos de la rama izquierda de la hiperbola, $x < 0$, por lo que la relación $v = 2xy$ dará $v = -2y\sqrt{y^2 + c_1}$. De este modo, tomando los puntos (x, y) descendiendo la rama, obtenemos una o uno lo punto de la recta en sentido ascendente.

Viendo la transformación $w = z^2$ en polares, donde $z = re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi/2$, tenemos
$$w = r^2 e^{i2\theta}\,,$$
con $w = \rho e^{i\phi}$, $\rho = r^2$ y $\phi = 2\theta$. Luego, el punto (r_0, θ_0) en la circunferencia de radio r_0 en el plano (r, θ) transforman en el punto $(r_0^2, 2\theta)$ de una circunferencia de radio r_0^2 en el plano

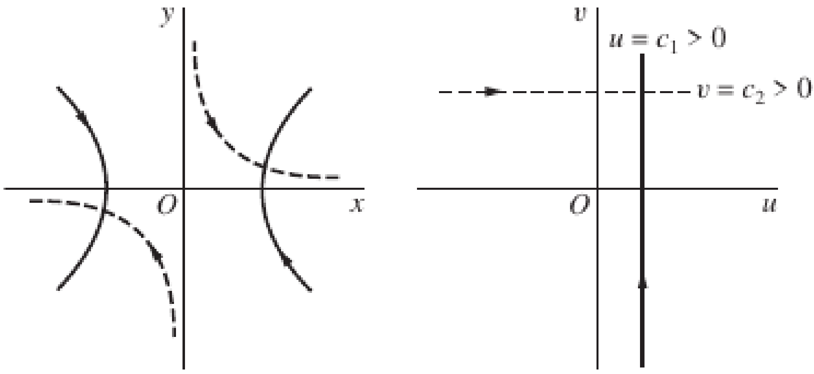


Figure 2.1: Transformación de hipérbolas por $w = z^2$.

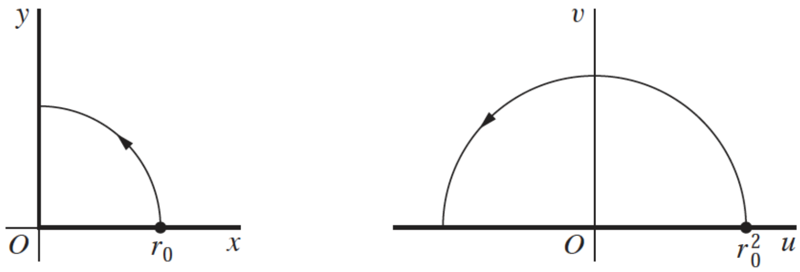


Figure 2.2: Mapeo $w = z^2$ en polares con $0 \le \theta \le \pi/2$.

(ρ, ϕ). De este modo el primer cuadrante del plano (r, θ) $(r \ge 0,\ 0 \le \theta \le \pi/2)$ transforma en el semiplano superior del plano (ρ, ϕ). Ver Fig. 2.2.

Del análisis anterior resulta que $w = z^2$ transforma el semiplano complejo superior en todo el plano complejo. Si tomáramos el dominio completo del argumento (los dos semiplanos) duplicaríamos la imagen. Para separar esa duplicación de planos complejos se introduce la superficie de Riemman.

Superficie de Riemann: Una superficie de Riemann es una generalización del plano complejo que consta de más de una hoja. El criterio para construir la superficie es asignar a cada punto de la superficie sólo un valor de la función multivaluada, de modo que la función resulta **simplemente valuada** en la superficie de Riemann. Los beneficios de esta construcción serán evidentes al definir el concepto de analiticidad. Un ejemplo de superficie de Riemann lo constituye la figura construída a partir de la función multivaluada $arg(z) = \theta + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. Ver Fig. 2.3 (izquierda). Cada valor de n define una hoja, al tiempo que cada hoja se conecta con una superior y otra inferior. Un punto arbitrario en la superficie puede moverse en forma continua de una hoja a otra pasando por los cortes ramas.

En física es muy común que aparezca la función multivaluada $z^{1/2}$. Por ejemplo, en Mecánica Cuántica la relación de dispersión $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ vincula la energía con el número de onda; luego, $k \propto \varepsilon^{1/2}$. La Fig. 2.3 (derecha) muestra la superficie de Riemman asociada.

Taller, construir una superficie de Riemman: Tomemos como ejemplo la función multivaluada $arg(z)$. La superficie se hace continua con la siguiente construcción. Consideremos

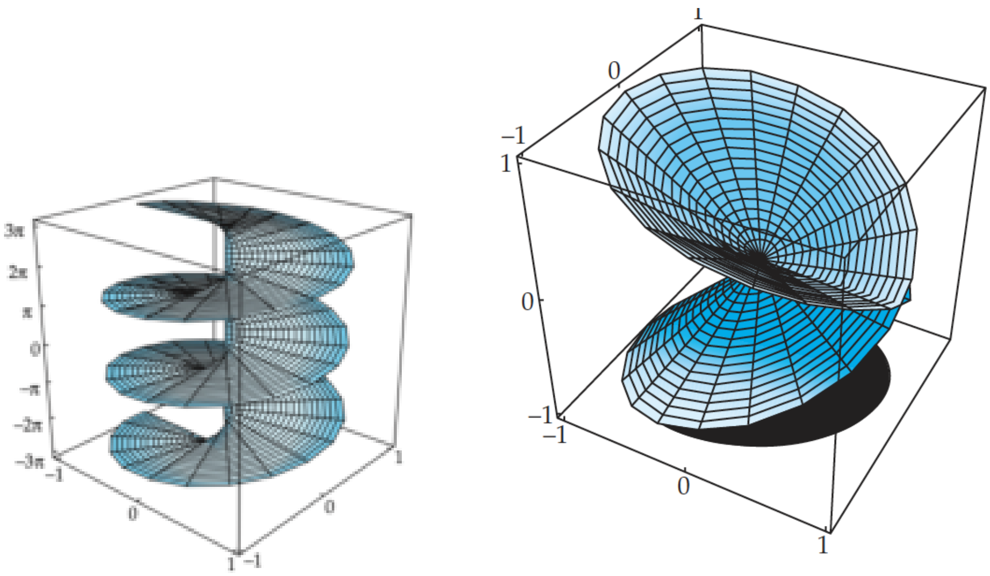


Figure 2.3:

el plano z sin el origen, como si fuera una hoja R_0 que tiene un corte a lo largo del semieje real positivo: (i) sobre R_0 tomaremos θ variando entre 0 y 2π; (ii) tomemos una segunda hoja R_1 cortada de igual forma que R_0, donde tomamos que θ varía de 2π y 4π; (iii) situemos R_1 arriba de R_0; (iv) unimos el borde inferior de R_0 con el superior de R_1 (hacerlo con una hoja doblada a la mitad y haciendo un corte en ambas); (v) repetir este procedimiento de creación y unión de hojas. Entre las hojas R_0 y R_1, θ varía continuamente desde 0 y 4π. Se pueden imaginar el resto del camino ascendiendo en la superficie de Riemann. Un procedimiento similar permite construir las superficies de Riemann hacia abajo.

2.2 Límites

Sea f una función definida en todos los puntos z de algún entorno punteado de z_0. La declaración que el *límite* de $f(z)$ cuando z tiende a z_0, es un número w_0,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

significa que el punto $w = f(z)$ puede estar arbitrariamente cerca de w_0 si tomamos z suficientemente próximo a z_0 pero distinto a z_0. Luego, para cada número positivo ε, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta\,.$$

Nótese, que z puede aproximarse a z_0 de forma arbitraria, desde cualquier vecindad del plano complejo (bidimensional). Ver Fig. 2.4

Unicidad del límite: cuando un límite de una función $f(z)$ existe en un punto z_0, éste es único.

Camino: si el límite $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ existe, el símbolo $z \to z_0$ implica que z puede acercarse a z_0 de forma arbitraria, esto es, por cualquier dirección o camino.

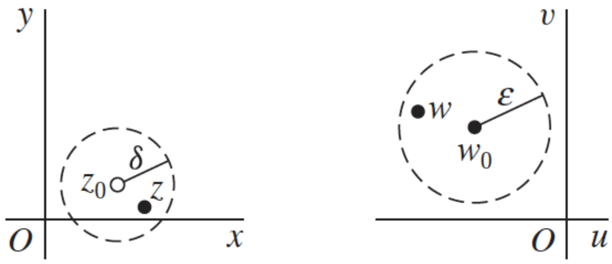


Figure 2.4: Representación esquemática de límite.

Ejemplo: El $\lim_{z\to 0} z/\bar{z} = \nexists$, pues (ver Fig. 2.5)

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{x^2}{x^2} + i0 = 1 & \text{si} \quad \mathrm{z = (x, 0)} \\ \frac{-y^2}{y^2} + i0 = -1 & \text{si} \quad \mathrm{z = (0, y)} \end{cases}$$

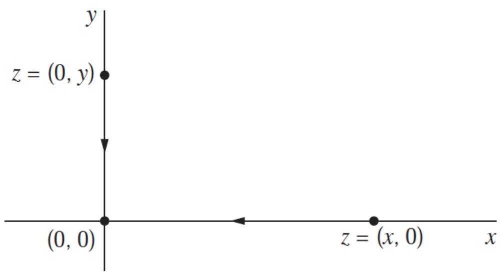


Figure 2.5: Diferentes 'caminos' para el límite.

Casos con infinitos: Los límites $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ con z_0 u w_0 infinitos, se entiende mediante la proyección estereográfica con una pequeña circunferencia en el polo de la esfera de Riemann.

- Si $z_0 = \infty$, entonces
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$
significa que existen ε y δ positivos tal que,
$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad |z| > \frac{1}{\delta}\,,$$
con z más allá de la circunferencia $1/\delta$, donde δ es el radio de una pequeña circunferencia en el polo de la esfera de Riemann.

- Si $w_0 = \infty$, entonces
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$
significa que existen ε y δ positivos tal que,
$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < |z - z_0| < \delta\,,$$
con $f(z)$ más allá de la circunferencia $1/\epsilon$, donde ϵ es el radio de una pequeña circunferencia en el polo de la esfera de Riemann.

Teorema sobre el límite

Las definiciones introducidas hasta el momento dan un criterio para verificar si w_0 es un límite, pero no dan un procedimiento para hallarlo. El siguiente teorema y las propiedades listadas nos permitirán calcular límites en forma práctica.

Teorema: Sea

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)\,,$$

con $z = x + i\,y$ y

$$\begin{aligned} z_0 &= x_0 + i\, y_0 \\ w_0 &= u_0 + i\, v_0\,. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si y sólo si

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) &= u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) &= v_0 \end{aligned}$$

Propiedades: Sean

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{y} \quad \lim_{\mathrm{z} \to \mathrm{z}_0} \mathrm{F(z)} = \mathrm{W}_0\,.$$

Entonces

- $\lim_{z\to z_0}[f(z) + F(z)] = w_0 + W_0$
- $\lim_{z\to z_0}[f(z)F(z)] = w_0 W_0$
- $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}$, si $W_0 \neq 0$.
- $\lim_{z\to z_0} c = c$, con c constante compleja.
- $\lim_{z\to z_0} z = z_0$
- $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$, con $n = 1, 2, \cdots$
- $\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0)$, con $P(z)$ polinomio.

L'Hospital *a cuenta de futuro conocimientos, pues no hemos definido ni derivada ni analiticidad:* Sea f y g funciones analíticas en z_0 y $f(z_0) = 0$, $g(z_0) = 0$, con $g'(z_0) \neq 0$. Entonces

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}\,.$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to(2+i)} \frac{z^2 - 4z + 5}{z^3 - z - 10i} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{z\to(2+i)} \frac{2z - 4}{3z^2 - 1} = \frac{2i}{8 + 12i} \\ &= \frac{3}{26} + \frac{1}{13} i \end{aligned}$$

Teorema con puntos en el infinito: Si z_0 y w_0 son puntos en los planos z y w, respectivamente, entonces

- si el límite de f es infinito, vale

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

Ejemplo:

$$\lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} =? \left(= \frac{-i+3}{-1+1} = \infty\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to -1} \frac{1}{\frac{iz+3}{z+1}} = \lim_{z\to -1} \frac{z+1}{iz+3} = \frac{0}{-i+3} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to -1} \frac{iz+3}{z+1} = \infty$$

- si el límite de z va a infinito, vale

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$$

Ejemplo:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z+1}{z+1} =?$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{2\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}+1} = \lim_{z\to 0} \frac{2+z}{1+z} = 2 \Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{2z+1}{z+1} = 2$$

- si tomamos el ímite de z a infinito y el límite es infinito, vale

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Longleftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Ejemplo:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} =? \left(\frac{\infty^3}{\infty^2} =?\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\frac{2\frac{1}{z^3}-1}{\frac{1}{z^2}+1}} = \lim_{z\to 0} \frac{z+z^3}{2+z^3} = \frac{0}{2} = 0$$

Luego, $\lim_{z\to\infty} \frac{2z^3-1}{z^2+1} = \infty$.

2.3 Continuidad

Una función f es *continua* en el punto z_0 si las tres condiciones siguientes son satisfechas:

- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe,
- $f(z_0)$ existe,
- $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Continuidad en región: una función se dice *continua en una región*[1] R, si es continua en cada punto de R.

Propiedades: Sean f y g dos funciones continuas en un punto z_0, entonces

- $f + g$ es continua en z_0,
- fg es continua en z_0,
- $\frac{f}{g}$ es continua en z_0 si $g(z_0) \neq 0$.
- Un polinomio $P(z)$ es continuo en todo el plano complejo.
- La composición de funciones continuas es continua (ver sgte. teorema).

Teorema sobre las funciones compuestas: Una composición de funciones continuas es continua. Ver Fig. 2.6.

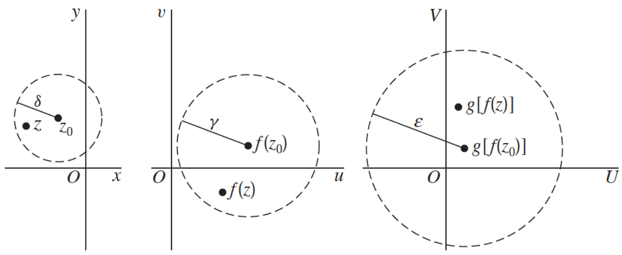


Figure 2.6: Composición de dos funciones.

Teorema sobre valor de $f(z)$ en una vecindad: si una función $f(z)$ es continua y no nula en un punto z_0, entonces

$$f(z) \neq 0$$

en algún entorno [2] de z_0.

Sobre la continuidad de $f(z)$ en término de la continuidad de $u(x, y)$ y $v(x, y)$: a partir de la definición del límite, y a través de los límites de la parte real e imaginaria de f tenemos que la función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es continua en $z_0 = (x_0, y_0)$ si y solo si sus funciones componentes $u(x, y)$ y $v(x, y)$, como funciones de dos variables, son continuas en (x_0, y_0). Pensar, por **ejemplo** en $e^z = [e^x \cos y] + i[e^x \sin y]$.

[1]**Dominio:** un conjunto abierto y conexo es denominado *dominio*. **Región:** un dominio con alguno, ninguno o todos sus puntos frontera se denomina *región*.

[2]**Entorno o vecindad**: un entorno de z_0 es el conjunto de puntos z dentro de la circunferencia de radio ε: $|z - z_0| < \varepsilon$.

Teorema sobre funciones acotadas: si una función f es continua en la región cerrada y acotada [3] R, existe un número real no negativo M que verifica, para todo $z \in R$

$$|f(z)| = \sqrt{u^2(x,y) + v^2(x,y)} \leq M \text{ , para todo } z \text{ en } R$$

donde la igualdad vale al menos para algún z. Luego, f está acotada en R. Pensar, por **ejemplo** en $f(z) = e^z$, con $|z| \leq 1$. Luego $|e^z| = e^x$, con $M = e$.

2.4 Derivadas

Sea f una función cuyo dominio de definición contenga un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0. La *derivada* de f en z_0 es el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \,.$$

La función f se dice *diferenciable* en z_0 cuando $f'(z_0)$ existe.

En término de la variable $\Delta z = z - z_0$, con $z \neq z_0$ resulta, (ver Fig. 2.7)

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0}$$

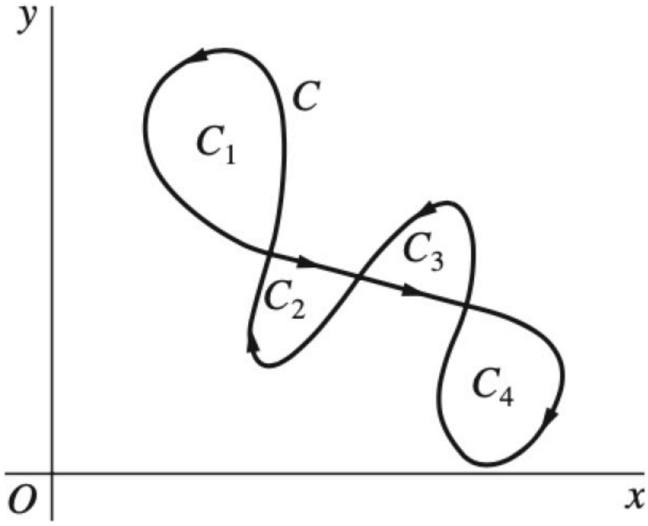


Figure 2.7: Variable en la definición de derivada.

Ejempo $f(z) = z^2$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = 2z$$

[3] Una región es cerrada si contiene todos sus puntos frontera y acotada si está contenidad en algún círculo centrado en el origen

Ejemplo $f(z) = |z|^2$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z} \right)$$

- Sea $z = 0$, entonces

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{0} + \overline{\Delta z} \right) = 0\,,$$

para cualquier camino en el plano complejo. Luego, el límite en $z = 0$ existe y por ende la derivada:

$$\left.\frac{d|z|^2}{dz}\right|_{z=0} = 0\,.$$

- Sea $z \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \left(z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z} + \overline{\Delta z} \right) \\ &= \begin{cases} z\frac{\Delta x}{\Delta x} + \bar{z} + \Delta x & \text{si } \Delta \mathrm{z} = \Delta \mathrm{x} \\ z\frac{-i\Delta y}{i\Delta y} + \bar{z} + (-i\Delta y) & \text{si } \Delta \mathrm{z} = \mathrm{i}\,\Delta \mathrm{y} \end{cases} \\ &= \begin{cases} z + \bar{z} = 2x & \text{si } \Delta \mathrm{z} = \Delta \mathrm{x} \\ -z + \bar{z} = -i2y & \text{si } \Delta \mathrm{z} = \mathrm{i}\,\Delta \mathrm{y} \end{cases}\end{aligned}$$

Luego,

$$\left.\frac{d|z|^2}{dz}\right|_{z\neq 0} = \nexists\,.$$

Propiedades de funciones a variable compleja en término de su continuidad: Del ejemplo anterior con la función $f(z) = |z|^2$ concluimos:

- Una función puede ser derivable en un punto, pero no derivable en ningún otro punto de su entorno.
  Ejemplo: $f(z) = |z|^2$, en $z = 0$,

$$\left.\frac{d|z|^2}{dz}\right|_{z=0} = 0\,.$$

- Las componentes real e imaginaria de una función

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

pueden tener derivadas parciales continuas de todos los órdenes en un punto y, sin embargo, puede ser que la función no sea derivable en ese punto.
Ejemplo: $f(z) = |z|^2$, con $z \neq 0$

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2\,,$$

con $u(x,y) = x^2 + y^2$ y $v(x,y) = 0$.

$$\frac{\partial^{(n)} u}{\partial x^{(n)}} = \exists\,, \qquad \frac{\partial^{(n)} u}{\partial y^{(n)}} = \exists$$
$$\frac{\partial^{(n)} v}{\partial x^{(n)}} = \exists\,, \qquad \frac{\partial^{(n)} v}{\partial y^{(n)}} = \exists$$
$$\left.\frac{d|z|^2}{dz}\right|_{z\neq 0} = \nexists\,.$$

- La continuidad de una función en un punto no supone la existencia de la derivada en ese punto.
  Ejemplo: $f(z) = |z|^2$, es continua para $z \neq 0$, pero no es derivable

- (recíproco del punto anterior) La existencia de la derivada de una función en un punto implica la continuidad de la función en ese punto.
  Veamos: supongamos que existe $f'(z_0)$, luego

$$\lim_{z\to z_0}[f(z) - f(z_0)] = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)}\lim_{z\to z_0}(z - z_0) = f'(z_0)0 = 0$$

Valores de derivadas: La definición de derivada para funciones a variable compleja es formalmente idéntica al caso de variable real. Pueden demostrarse las siguientes identidades:

- $\frac{d}{dz}c = 0$, con c una constante compleja
- $\frac{d}{dz}z = 1$
- $\frac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z)$
- $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$, con $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$ y $z \neq 0$ si $n < 0$
- $\frac{d}{dz}[f(z) + g(z)] = f'(z) + g'(z)$ si existen $f'(z)$ y $g'(z)$.
- **Producto:**
$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$
- **Cociente:** para $g(z) \neq 0$,
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$
- **Regla de la cadena:** sea $h(z) = f(g(z))$,
$$h'(z) = f'(g(z))g'(z)$$
- Usando la regla de la cadena en el cociente
$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = f'(z)\frac{1}{g(z)} - f(z)\frac{g'(z)}{g^2(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}\,,$$
  con $g(z) \neq 0$.

2.5 Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Retomamos el desarrollo formal de la teoría del análisis complejo para introducir una relación entre las derivadas parciales de primer orden de la parte real e imaginaria de $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ cuando $f'(z)$ existe.

Supongamos que existe $f'(z_0)$, con $z_0 = x_0 + i\, y_0$, luego

$$
\begin{aligned}
Re[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} Re\left[\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right] \\
Im[f'(z_0)] &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} Im\left[\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right]
\end{aligned}
$$

con $\Delta z = \Delta x + i\, \Delta y$ y

$$
\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)] + i\,[v(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\, \Delta y}
$$

Tomando, en particular dos caminos, (i) uno sobre el eje real $\Delta z = \Delta x$, y (ii) otro sobre el imaginario $\Delta z = i\, \Delta y$, resulta

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)] + i\,[v(x_0+\Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x} \\
\frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{[u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)] + i\,[v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\, \Delta y}
\end{aligned}
$$

Tomando el límite, tenemos

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{(\Delta x,0)\to(0,0)} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + i\, v_x(x_0, y_0) \\
f'(z_0) &= \lim_{(0,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(z_0+\Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u_y(x_0, y_0)}{i} + v_y(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

donde los subíndices expresan derivadas parciales.

Luego, de la condición de la existencia de f' implica que ambas expresiones de arriba son iguales. Igualando parte real e imaginaria en ambas ecuaciones quedan definidas las **ecuaciones de Cauchy-Riemann**

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} u(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) \\
\frac{\partial}{\partial y} u(x, y) &= -\frac{\partial}{\partial x} v(x, y)
\end{aligned}
$$

esto es,

$$
\begin{aligned}
u_x &= v_y \\
u_y &= -v_x
\end{aligned}
$$

Por otro lado, las relaciones

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= u_x + i\, v_x \\
f'(z) &= \frac{1}{i} u_y + v_y
\end{aligned}
$$

proveen **formas prácticas de calcular la derivada** de $f(z)$.

Dado que el resultado anterior se obtuvo tomando límites muy específicos definimos el siguiente teorema.

Teorema: Supóngase que $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ y que $f'(z)$ existe en $z_0 = (x_0, y_0)$. Entonces las derivadas parciales de primer orden de u y v respecto a x e y deben existir en (x_0, y_0), y deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ese punto. Además, $f'(z_0)$ está dada en término de estas derivadas parciales evaluadas en (x_0, y_0):

$$
\begin{aligned}
f'(z_0) &= u_x(x_0, y_0) + i\,v_x(x_0, y_0) \\
f'(z_0) &= -i[u_y(x_0, y_0) + i\,v_y(x_0, y_0)
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Hemos visto que la función

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

es diferenciable en todo z y

$$f'(z) = 2z\,.$$

Veamos qué resulta usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Tenemos

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= x^2 - y^2 \\
v(x,y) &= 2xy
\end{aligned}
$$

luego,

$$f'(z) = u_x + i\,v_x = 2x + i2y = 2z\,.$$

Comentario: dado que las ecuaciones de Cauchy-Riemann constituyen condiciones necesarias para la existencia de la derivada de f en z_0, pueden utilizarce para localizar puntos donde f *no tiene derivada.*
Veamos un ejemplo: Para $f(z) = |z|^2$ tenemos

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= x^2 + y^2 \\
v(x,y) &= 0\,,
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
u_x &= 2x \\
u_y &= 2y \\
v_x &= v_y = 0
\end{aligned}
$$

Luego,

$$u_x = v_y\,, u_y = -v_x \Rightarrow 2x = 0\,, 2y = 0$$

Estas relaciones no se satisfacen para $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Luego, $f(z) = |z|^2$ es diferenciable para $z = 0$ pero no lo es para $z \neq 0$. Notar que el teorema no asegura la existencia de $f'(0)$. En teorema de la siguiente sección se ocupa de este punto.

Que una función $f(z) = u + iv$ sastisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z_0 no es suficiente para *asegurar* la existencia de la derivada $f'(z_0)$. Pero bajo ciertas condiciones de continuidad, tenemos el siguiente teorema que resulta de utilidad.

Teorema sobre la existencia de $f'(z_0)$: Supongamos que la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ está definida en un entorno ε de $z_0 = x_0 + iy_0$. Supongamos también que *existen* las derivadas parciales de primer orden de u y v respecto a x e y en todos los puntos del entorno y que son *continuas* en (x_0, y_0). Entonces, si estas derivadas parciales *satisfacen* las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, existe la derivada $f'(z_0)$ en (x_0, y_0).

Ejemplo: Consideremos la función ($z = x + iy$)

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy}\,,$$

escribiendo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \\ v(x,y) &= e^x \sin y\,, \end{aligned}$$

Tomando las derivadas parciales tenemos,

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \\ u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y \\ v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x\,, \end{aligned}$$

en todo lugar y dado que las derivadas son continuas, también en todo lugar, se satisfacen las condiciones del teorema anterior en todo z. De este modo $f'(z)$ existe para todo z, con

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} \\ &= e^z\,. \end{aligned}$$

Sobre las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares: Asumiento $z_0 \neq 0$, y usando la transformación

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

podemos enunciar el teorema anterior cuando las funciones u y v en $f(z) = u+iv$ son expresadas en las variables polares. Para ello suponemos que las derivadas de primer orden de u y v con respecto a x e y existen en todo lugar en alguna vecindad de un punto z_0 no nulo, y son continuas en z_0. Las derivadas de primer orden de u y v con respecto a r y θ también resultan continuas. Aplicando la regla de la cadena podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\,. \end{aligned}$$

Escribiendo las expresiones correspondientes para v, obtenemos

$$\begin{aligned} u_r &= u_x \cos\theta + u_y \sin\theta \\ u_\theta &= -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta \\ v_r &= v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \\ v_\theta &= -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Actividad 1: Resolver las ecuaciones anteriores para u_x, u_y, v_x y v_y.
Rta: $u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\sin\theta}{r}$, $\quad u_y = u_r \sin\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}$, $\quad v_x$ y v_y pendientes.

Si u y v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en las coordenas (x, y),

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

reescribimos las ecuaciones v_r y v_θ en término de u_x y u_y

$$\begin{aligned} v_r &= -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta \\ v_\theta &= u_y r \sin\theta + u_x r \cos\theta\,. \end{aligned}$$

Finalmente, comparando con las expresiones de u_r y u_θ resulta

$$\begin{aligned} r\, u_r &= v_\theta \\ u_\theta &= -r\, v_r \end{aligned}$$

en z_0.

Parafraseo del teorema sobre la existencia de $f'(z_0)$ en polares: sea la función

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en algún entorno ε de un punto no nulo $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$. Supongamos que en ese entorno existen las derivadas parciales de primer orden de u y v con respecto a r y θ, y que son continuas en (r_0, θ_0). Si esas derivadas parciales satisfacen la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0),

$$\begin{aligned} r\, u_r &= v_\theta \\ u_\theta &= -r\, v_r\,, \end{aligned}$$

entonces, la derivada $f'(z_0)$ existe, con

$$f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)\,.$$

Ejemplo: Sea $f(z) = \frac{1}{z}$, con $z = re^{i\theta}$ no nulo:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{-i\theta}} = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

con $u(r, \theta) = \frac{\cos\theta}{r}$ y $v(r, \theta) = -\frac{\sin\theta}{r}$. Calculando las derivadas parciales resulta,

$$\begin{aligned} ru_r &= -\frac{\cos\theta}{r} = v_\theta \\ u_\theta &= -\frac{\sin\theta}{r} = -rv_r \end{aligned}$$

por lo que las condiciones del teorema se verifican para cualquier $z = re^{i\theta} \neq 0$. Luego, de $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$ tenemos

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos\theta}{r^2} + i\frac{\sin\theta}{r^2}\right) = e^{-i\theta}\frac{(-e^{-i\theta})}{r^2} \\ &= -\frac{1}{e^{2i\theta}r^2} = -\frac{1}{z^2} \end{aligned}$$

2.6 Funciones analíticas

Una función f de la variable compleja z es **analítica** [4] en un punto z_0, si su derivada existe, no sólo en z_0, sino también en cada punto z de un entorno [5] de z_0. Como consecuencia si f es analítica en z_0, lo es también en cada punto en un entorno de z_0.

Ejemplos

- La función $f(z) = 1/z$ es analítica en cada punto no nulo del plano finito.
- La función $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto, dado que su derivada existe sólo en $z = 0$ (y en ningún otro punto de su vecindad).

Propiedad: Si $f(z)$ es analítica en una región R, en general, la función $f(z^*)$ no es analítica. Veamos un ejemplo: $f(z) = z$
Bajando a lo largo del contorno vertical $z = x_0 + iy$:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f^*(z) - f^*(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{z^* - z_0^*}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{(x_0 - iy) - (x_0 - iy_0)}{x_0 + iy - (x_0 + iy_0)}$$
$$= \lim_{z\to z_0} \frac{-iy + iy_0}{iy - iy_0} = -1$$

Moviéndo en la dirección sólo del eje x, $z = x + iy_0$

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z^* - z_0^*}{z - z_0} = 1$$

Sin embargo, la función $f^*(z^*)$ es analítica en la región R^*.

Definición de función entera: una función *entera* es una función que es analítica en cada punto del plano complejo finito.
Ejemplo: los polinomios son funciones enteras.

Definición de punto singular: si una función f no es analítica en un punto z_0, pero lo es en algún punto de todo entorno de z_0, entonces z_0 es denominado *punto singular*, o *singularidad* de f.

Ejemplos:

- El punto $z = 0$ es un punto singular de $f(z) = 1/z$.
- La función $f(z) = |z|^2$ no tiene puntos singulares dado que es no analítica en todo el plano complejo.

Una condición necesaria, pero no sufficiente, para que una función f sea analítica en un dominio D, es que f sea continua en D; que satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario, pero no suficiente. Las condiciones suficientes para la analiticidad de f en D la da el teorema sobre la existencia de $f'(z_0)$ enunciado en la sección anterior.

[4] También denominada **regular** o **holomórfica**

[5] Entorno (o vecindad) ε o simplemente entorno de un dado punto z_0 consiste en todos los puntos z dentro de la circunferencia centrada en z_0 y radio ε. $|z - z_0| < \varepsilon$.

Propiedades de funciones analíticas: Si dos funciones son analíticas en un dominio D entonces,

- su suma es analítica en D.
- su producto es analítica en D.
- su cociente es analítica en D siempre que en denominador no se anule en D
- su composición es analítica

Otra propiedad de las funciones analíticas es que, una función $f(z)$ es constante en un dominio D cuando $f'(z) = 0$ en todo punto de D.
Veamos: Sea $f(z) = u + iv$, con $f'(z) = 0$ en D, entonces $u_x + iv_x = 0$, y por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_y - iu_y = 0$. Luego, $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ en cada punto en D. Esto lleva a u y v constantes, luego $f(z) = c_1 + ic_2$.

2.7 Funciones armónicas

Se dice que una función real h, de dos variables reales x e y, es **armónica** en un dominio dado del plano xy, si en todo ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisface la ecuación diferencial siguiente:

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0$$

denominada **ecuación de Laplace**.

Propiedad de u y v de funciones analíticas: Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces sus funciones componentes u y v son armónicas en D.

Veamos: Supongamos que $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las relaciones de Cauchy-Riemann,

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x\,.$$

Luego, derivando ambas ecuaciones, primero con respecto a x y luego con respecto a y resulta

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v_{xy}\,, \quad u_{xy} = -v_{xx}\,. \\ u_{yx} &= v_{yy}\,, \quad u_{yy} = -v_{yx}\,. \end{aligned}$$

Sumando convenientemente tenemos,

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= v_{yx} + (-v_{xy}) \\ v_{xx} + v_{yy} &= (-u_{xy}) + u_{yx} \end{aligned}$$

Luego, apelando a la igualdad de las derivadas cruzadas resulta,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) &= 0 \\ v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Observación: En las relaciones anteriores hemos asumido que podíamos calcular las derivadas parciales a mayor orden de u y v. Esto queda justificado por una propiedad de las funciones analíticas que se enunciará mas adelantes, y dice: si una función de una variable compleja es analítica en un punto, entonces su parte real e imaginaria tiene derivadas parciales continuas de todos los órdenes en ese punto. Esto es, si $f = u + iv$ es analítica en z_0, entonces existen $u_x, u_{xx}, ..., u_y, u_{yy}, ...u_{xy}, ...$

Si dos funciones u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen Cauchy-Riemann en todo D, se dice que v es una **función armónica conjugada de** u. Luego, si $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en un dominio D, v es entonces armónica conjugada de u. Recíprocamente, si v es armónica conjugada de u en D, la función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ es analítica en D.

Condición necesaria y suficiente para la analiticidad: De la definición anterior resulta que una condición necesaria y suficiente para que una función $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ sea analítica en un dominio D es que v sea armónica conjugada de u en D.

Observación: Si v es armónica conjugada de u en algún dominio, no es cierto en general que u sea armónica conjugada de v en ese dominio. Por ejemplo, para $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$, la función $f = u + iv = z^2$ es analítica, por lo que v es armónica conjugada de u. Pero u no es armónica conjugada de v porque la función $g = v + iu$ no es analítica.

Actividad 2: Mostrar (usando la definición de derivada con límite) que la función $g(z) = 2xy + i(x^2 - y^2)$ no es analítica en ningún punto.

Observación: Si v es armónica conjugada de u en un dominio D entonces $-u$ es armónica conjugada de v en D, y recíprocamente. Esto ocurre porque la función

$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$$

es analítica en D si y sólo si la función

$$-if(z) = v(x, y) - i\,u(x, y)$$

es también analítica en D.

Puede mostrarse que una función u armónica en un dominio de cierto tipo (conexo), tiene siempre una armónica conjugada, de modo que toda función armónica es la parte real de una función analítica. También ocurre que una armónica conjugada, cuando existe, es única salvo una constante aditiva.

Ejemplo de construcción de la armónica conjugada de u armónica: Sea

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$$

(verificar que es armónica). A partir de $u_x = v_y$, construimos $v(x, y)$ por integración de la variable y en ambos miembros, resultando

$$v = -3xy^2 + \phi(x)\,.$$

Derivando con respecto a x y comparando el resultado con u_y usando la identidad $u_y = -v_x$, se obtiene

$$\phi'(x) = 3x^2 \, ,$$

luego

$$\phi(x) = x^3 + c \, .$$

Lo cual permite construir

$$\begin{aligned}
f(z) &= u(x,y) + i\,v(x,y) \\
&= (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + c) \\
&= (y^3 - 3x^2y) + i(-3xy^2 + x^3 + c) \\
&= y^3 - 3x^2y - i3xy^2 + ix^3 + ic \\
&= \frac{(iy)^3}{i^3} - 3x^2\frac{iy}{i} + i3x(iy)^2 + ix^3 + ic \\
&= i(iy)^3 + i3x^2(iy) + i3x(iy)^2 + ix^3 + ic \\
&= i[(iy)^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + x^3] + ic \\
&= i(x+iy)^3 + ic \\
&= i(z^3 + c) \, .
\end{aligned}$$

Contenido de Funciones Elementales: Funciones multivaluadas. Funciones exponencial y logaritmo. Valor principal y diferentes realizaciones del logaritmo. Función inversa de la exponencial. Potencia compleja. Funciones trigonométricas e hiperbólicas y sus inversas.
Fuentes: (i) R. V. Churchill, J. W. Brown. Variable compleja y aplicaciones. 4ta Edición. McGraw-Hill. Boston (1988). Capítulo 3. (ii) D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications. Jones and Bartlett Publishers (2003). Capítulo 2.
Dedicación: una (1) clase.

2.8 Función exponencial

El siguiente análisis eurístico puede considerarse como una definición plausible de la función e^z, con z complejo. Luego, usaremos ésta para definir otras funciones elementales. Si una función f de la variable compleja $z = x + i\,y$ ha de reducirse a la exponencial del cálculo real cuando z es real, la función f debe verificar,

- $f(x + i\,0) = e^x$ para todo número real x.
- Como $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$, f debe verificar que $f'(z) = f(z)$ para todo z.

La función $e^x(\cos y + i \sin y)$ verifica ambas condiciones listadas arriba y, por otro lado, puede demostrarse que es la única función que cumple dichas condiciones.

Luego, la **función exponencial** en el análisis complejo está definida por la ecuación,

$$e^z = e^x\,(\cos y + i \sin y)$$

con $z = x + iy$.

Si $z = i\,\theta$ recuperamos la fórmula de Euler: $e^{i\,\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$.

Derivada: la **derivada** de e^z es

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z$$

para todo z en el plano complejo, luego e^z es una función entera.

Actividad 3: verificar la derivada en término de $u(x, y)$ y $v(x, y)$.

La notación exponencial también permite escribir

$$e^z = e^x\, e^{i\,y}\,,$$

la cual puede explotarse para demostrar en forma compacta propiedades, como por ejemplo

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}\,.$$

Algunas propiedades de la exponencial:

- $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$
- $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.
- $e^0 = 1$

Otras propiedades de la exponencial: Sea $e^z = e^x\, e^{i\,y}$,

- **Periodicidad:**
$$e^z = e^{z+T}\,,$$
con $T = 2\pi\, i$. Notar que en el análisis real la exponencial no es periódica. En general $T = 2n\pi\, i$, con $n = 0, \pm 1, \cdots$. Ver Fig. 2.8.

- **Módulo y argumento:**
$$|e^z| = e^x = \rho$$
$$arg(e^z) = y + 2n\pi = \phi\,,$$
con $n = 0, \pm 1, \cdots$. Luego,
$$e^z = \rho\, e^{i\,\phi}\,,$$
con $\rho > 0$.

- **La imagen es todo el plano complejo excepto el cero:**
$$e^z \neq 0$$
para todo número complejo z. Esto es, la transformación $w = e^z$ mapea el dominio $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$ a todo el plano w excepto cero.
Veamos: Sea $w = e^z = e^{x+iy} = u(x,y)+iv(x,y)$ y tomemos una línea horizontal $z = x+ib$, con $-\pi < b \leq \pi$. Esta línea define un vector en el plano (u,v) con origen en cero y vértice $(e^x \cos b, e^x \sin b)$, el cual puede escribir como $w = e^x w_b$ con $w_b = \cos b + i \sin b$ el vector definido para $y = b$ y e^x un factor de escala que agranda o achica la longitud del vector, pero sin anularlo. Tomando otro valor de $y = b'$ generamos otro vector con diferente ángulo en el plano (u,v), al tiempo que tomando $-\infty < x < \infty$ cambiamos el tamaño del rayo. Todos los valores de y en $-\pi < y \leq \pi$ generan vectores para todos los ángulos por lo que se cubre completamente el plano (u,v) sin incluir el origen $(w = 0)$.

- Cualquier región definida en el ítem anterior trasladada en el eje vertical también mapea a todo el plano w excepto al cero. Ver Fig. 2.8.

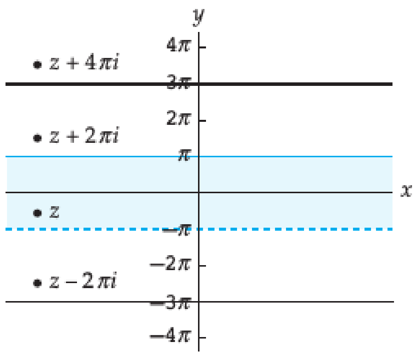


Figure 2.8: Diferentes regiones de z en el plano cartesiano complejo (x,y) que mapea z a todo el plano complejo a través de e^z. Fuente: libro Zill and Shanahan.

Luego, cualquier punto no nulo w es imagen de un número infinito de puntos en el plano z bajo la transformación exponencial $w = e^z$. Escribiendo $w = |w|e^{i\phi}$, con $\phi = \Phi + 2n\pi$ y Φ el argumento principal, se tiene que w (no nulo) es imagen de todos los puntos,
$$z = \ln|w| + i[Arg(w) + 2n\pi]$$
con z la **preimagen** de w.

2.9 Función logaritmo

Teniendo en cuenta el análisis del dominio y la imagen de la función exponencial se define la función logaritmo de un número complejo no nulo z como,

$$\log z = \ln |z| + i\, arg(z) \quad z \neq 0$$

con $arg(z) = Arg(z) + 2n\pi$. De modo que $\log z$ es **multivaluada** con infinitos valores. Estos valores tienen una parte real común y sus partes imaginarias difieren en múltiplos de 2π.

Se define el **valor principal del logaritmo** $\mathrm{Log\, z}$ utilizando el argumento principal,

$$\mathrm{Log\, z = \ln |z| + i\, Arg(z)}$$

Esta función sí es **univaluada**, y definida en todo el plano complejo excepto el cero, con $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$.

Sobre la continuidad de $\mathrm{Log\, z}$**:** la función univaluada $\mathrm{Log\, z}$ **no es continua** en el *semieje real negativo* en el dominio $Arg(z) \in (-\pi, \pi]$ debido a que $Im(\mathrm{Log\, z})$ tiende π aproximándose por arriba, mientras tiende a $-\pi$ viniendo por debajo del semieje real negativo. *Restringiendo* el dominio al abierto $(-\pi, \pi)$, la función $\mathrm{Log\, z}$, es continua. Luego, la función **univaluada y continua** $\mathrm{Log\, z}$, con $arg(z) \in (-\pi, \pi)$ no está definida ni para cero ni para el semieje real negativo.

Las componentes u y v (en coordenadas polares)

$$u(r, \Theta) = \ln r$$
$$v(r, \Theta) = \Theta$$

con $\Theta = Arg(z)$, son continuas en el dominio restringido:

$$u_r = \frac{1}{r}\,, \quad u_\Theta = 0$$
$$v_r = 0\,, \quad v_\Theta = 1$$

y satisfacen Cauchy-Riemann $u_r = v_\Theta / r$ y $u_\Theta / r = -v_r$. Por lo que la función Log z es analítica en el dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$.

Derivada: La derivada Log z en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \mathrm{Arg\ z} < \pi$ resulta

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log\, z = e^{-i\Theta}(u_r + iv_r) = \frac{e^{-i\Theta}}{r} = \frac{1}{z}}\,.$$

Dado que la función logaritmo $\log z = \ln |z| + i\, arg(z)$ es multivaluada, podemos restringir el dominio arbitrariamente para tomar realizaciones univaluadas y continuas del logaritmo,

$$\log\, z = \ln r + i\, \theta \quad r > 0,\, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\,,$$

con $z = re^{i\theta}$ y α un número real arbitrario. Estas funciones son analíticas y tienen por derivada $1/z$.

Determinación de f**:** Una determinación o **realización** de una función multivaluada f es cualquier función univaluada F, analítica en algún dominio y tal que en cada punto z del citado dominio, el valor $F(z)$ es uno de los valores de $f(z)$.

Ejemplo: Cada valor α en la definición

$$\log\, z = \ln r + i\, \theta \quad r > 0,\, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi$$

define una determinación de la función logaritmo $\log z = \ln |z| + i\, arg(z)$.

Determinación principal del logaritmo: La función Log z en el dominio $r > 0$, $\pi < \theta < \pi$ es una determinación de la función logaritmo $\log z = \ln |z| + i\, arg(z)$, denominada **determinación principal**. En la Fig. 2.3, cada una de las múltiples superficies, puede ser considera como una realización o rama de la función $arg(z)$.

Corte: Cada punto del semieje real negativo $\Theta = \pi$, así como el origen es un *punto singular* de la determinación principal de Log z. La semirrecta $\Theta = \pi$ es el *corte* de la determinación principal, donde por corte se entiende toda recta o curva, cuyos puntos son singulares, que se introduce para definir una determinación de una función multivaluada.

Punto de ramificación: Un punto singular común a todos los cortes de una función multivaluada se denomina *punto de ramificación* o *punto rama*. El origen es el punto de ramificación de la función logaritmo.

Actividad 4: Pensar en diferentes determinaciones de la función argumento $arg(z)$ restringiendo el dominio convenientemente.

Actividad 5: Determinar la realización principal de $arg(z)$?. Cómo se diferencia de $Arg(z)$?.

Propiedades de los logaritmos

- $e^{\log z} = z$, con $z \neq 0$
- No siempre $\log e^z$ es z, ya que $\log e^z$ tiene un número infinito de valores para cada z
- Log $e^z = z$, con $-\pi < \mathrm{Im} z \leq \pi$. Comparar con lo enunciado en la propiedad anterior.
- $\log(zz') = \log z + \log z'$
- $\log \frac{z}{z'} = \log z - \log z'$
- $\log z^n = n \log z$
- $z^n = e^{n \log z}$ con $z \neq 0$ y $n = 0, \pm 1, \cdots$. Ver primera propiedad.
- $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log z}$ con $n = \pm 1, \pm 2, \cdots$

Actividad 6: Calcular w en las siguientes expresiones.

- Sea $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$:
  - $e^w = i$.
    Sol.: $w = \log i = \ln 1 + i(\pi/2 + 2n\pi) = i\,(4n + 1)\pi/2$
  - $e^w = 1 + i$.
    Sol.: $w = \log(1 + i) = \ln \sqrt{2} + i(\pi/4 + 2n\pi)$
  - $e^w = -2$.
    Sol.: $w = \log(-2) = \ln 2 + i(\pi + 2n\pi)$

Función inversa de la exponencial: la función exponencial

$$f(z) = e^z\,,$$

con $z = x + i\,y$, definida en la región $-\infty < x < \infty$, $-\pi < y \leq \pi$, tiene por inversa el valor principal del logaritmo, esto es,

$$f^{-1}(z) = \mathrm{Log\,z}\,.$$

2.10 Potencia compleja

Para $z \neq 0$ y c complejo arbitrario, se define la exponenciación según la siguiente relación,

$$z^c = e^{c\,\log z}\,.$$

Dado que $\log z$ es multivaluada, también lo es, en general z^c.

Actividad 7: *Para pensar:* convencerse que para c entero, z^c es univaluada y se recupera la definición original de z^n.

Si $z = re^{i\theta}$ y α un número real arbitrario, la rama

$$\log z = \ln r + i\,\theta \quad r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\,,$$

de la función logaritmo es simplemente valuada y analítica. Cuando esta rama es usada, la función $z^c = e^{c\,\log z}$ es *simplemente valuada y analítica* en el mismo dominio.

Derivada: La derivada de una determinación de z^c se calcula aplicando la regla de la cadena, y usando la identidad $z = e^{\log z}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^c &= \frac{d}{dz} e^{c\log z} = \frac{c}{z} e^{c\log z} \\ &= \frac{c}{e^{\log z}} e^{c\log z} = ce^{(c-1)\log z} = cz^{c-1}\,, \end{aligned}$$

con $|z| > 0$, $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$, y $\alpha \in \mathcal{R}$.

Algunas propiedades:

- $z^c z^{c'} = z^{c+c'}$
- $(z\,z')^c = z^c z'^c$
- $\frac{z^c}{z^{c'}} = z^{c-c'}$
- $(z^c)^n = z^{nc}$
- $(z^c)^{c'}$ no es igual a $z^{c\,c'}$ a menos que c' sea entero

Tener en cuenta, como hemos indicado en otras ocasiones, que algunas propiedades pueden no valer cuando se usa el valor principal. Por ejemplo, la identidad $(z\,z')^c = z^c z'^c$ no es válida si se utiliza el valor principal.

Actividad 8: Calcular,

- i^{2i}.
  Sol.: $\log i = \frac{(4n+1)\pi}{2} i$, luego $i^{2i} = e^{2i \log i} = e^{-(4n+1)\pi}$
- $(1+i)^i$.
  Sol.: $\log(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{(8n+1)\pi}{4} i$, luego $(1+i)^i = e^{i\log(1+i)} = e^{-(8n+1)\pi/4 + i(\ln 2)/2}$

Determinación principal de la potencia compleja: Siendo $\text{Log}\, z$ continuo en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < Arg\, z < \pi$, implica que también lo es z^c en el mismo dominio. Esta función es una de las posibles determinaciones o ramas de la función multivaluada z^c y se la llama **determinación o rama principal** de z^c. Luego, la determinación principal es

$$f_1(z) = z^c = e^{c\,\text{Log z}},$$

con $|z| > 0$, y $-\pi < Arg\, z < \pi$.

2.11 Funciones trigonométricas y sus inversas

A partir de e^{ix} y e^{-ix}, para x real se deduce, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, y $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$. Por lo que resulta natural definir las versiones con argumento complejo promoviendo $x \to z$,

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

A partir de ellas definimos,

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$
$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \qquad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

La tangente y la secante son singulares en $z = (2n+1)\pi/2$, con $n = 0, \pm 1, \cdots$, mientras la cotangente y la cosecante lo son para $z = n\pi$, con $n = 0, \pm 1, \cdots$.

Derivadas: El $\sin z$ y $\cos z$ son funciones enteras dado que son combinaciones lineales de las funciones enteras e^{iz} y e^{-iz}. Mientras que el resto de las funciones son analíticas excepto en los ceros del denominador.

Usando la regla de la cadena y la derivada de la exponencial obtenemos las siguientes expresiones para las derivadas,

$$\frac{d}{dz}\sin z = \cos z \qquad \frac{d}{dz}\cos z = -\sin z \qquad \frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$
$$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z \qquad \frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z \qquad \frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$$

Identidades: Las identidades del cálculo usual también son válidas,

$$\sin(-z) = -\sin z \qquad \cos(-z) = \cos z \qquad \cos^2 z + \sin^2 z = 1$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \qquad \cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$$

Actividad 9: Verificar $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.

Periodicidad: Las funciones seno y coseno son periódicas con período real 2π:

$$\sin(z + 2\pi) = \sin z$$
$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

Actividad 10: calcular los valores de z que satisfacen $\sin z = 5$.

Sol.: $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 5$. Luego, $e^{2iz} - 10ie^{iz} - 1 = 0$, que tiene por solución $e^{iz} = (5 \pm 2\sqrt{6})i$. Usando $e^z = w \to z = \log w$, obtenemos $iz = \ln[i(5 \pm 2\sqrt{6})] \to z = -i \ln[i(5 \pm 2\sqrt{6})]$. Resolviendo el logaritmo resulta, $z_{1,2} = \frac{(4n+1)\pi}{2} - i\ln(5 \pm 2\sqrt{6})$

Módulos: El módulo de las funciones trigonométricas puede ser útil para resolver ecuaciones trigonométricas. Operando algebraicamente resulta

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} \\ &= \sin x \frac{e^y + e^{-y}}{2} + i\cos x \frac{e^y - e^{-y}}{2} \end{aligned}$$

luego,

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y\,.$$

Del mismo modo puede mostrarse,

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y\,.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} |\sin z| &= \sqrt{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y} = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y} \\ |\cos z| &= \sqrt{\cos^2 x + \sinh^2 y} \end{aligned}$$

donde hemos usado $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ y $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$.

Ceros del seno: para hallar los ceros del seno utilizamos la expresión del módulo que deducimos arriba,

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y = 0\,.$$

Siendo $\sin^2 x$ y $\sinh^2 y$ no negativos, debe ser $\sin x = 0$ y $\sinh y = 0$ simultáneamente, esto es,

$$x = n\pi$$
$$y = 0\,,$$

con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Luego, los ceros del seno con argumento complejo son los mismos que los cero del seno con argumento real $z = n\pi$.

Ceros del coseno: de modo similar podemos determinar que los ceros del $\cos z$ son reales $z = \frac{2n+1}{2}\pi$, con $n = 0, \pm 1, \cdots$.

Inversa del $\sin z$, $\cos z$, $\tan z$

Primero vamos a construir explícitamente la inversa del seno usando las propiedades de la función logaritmo. Esto nos permitirá ver que la inversa es una función multivaluada y nos dará la pista para saber cómo restringirla para que sea univaluada. Luego daremos, simplemente, las definiciones del resto de la funciones trigonométricas inversa, pero ya sabiendo cómo debe procederse en caso que deseemos hacerlo.

Queremos hallar una expresión de w cuando $\sin w = z$,

$$\sin w = z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{i2w} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

luego,

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}\,,$$

donde $(1 - z^2)^{1/2}$ tiene dos soluciones. Esto ya muestra que la inversa del seno va a resultar, al menos, bivaluada. En este estadío podríamos tomar una de las dos posibles raíces o ramas.

Hallando w usando la función logaritmo, resulta

$$w = -i \ln \left[iz + (1 - z^2)^{1/2}\right]\,,$$

lo que resulta en una función multivaluada, debido a la definición del argumento de la función logaritmo. Luego

$$\sin^{-1} z = \mathrm{arcsin\,z} = -\mathrm{i} \ln \left[\mathrm{iz} + (1 - \mathrm{z}^2)^{1/2}\right]$$

es multivaluada. Restringiendo una de las raíces y el argumento podemos hacerla univaluada. Alternativamente podemos definir una superficie de Riemman. La figura 2.9 muestra superficie de Riemann de la función compleja $\arcsin z$. Podemos ver que hereda las propiedades de las funciones argumento y raiz cuadrada, esto es, una hélice infinita y una conexión entre hojas, respectivamente.

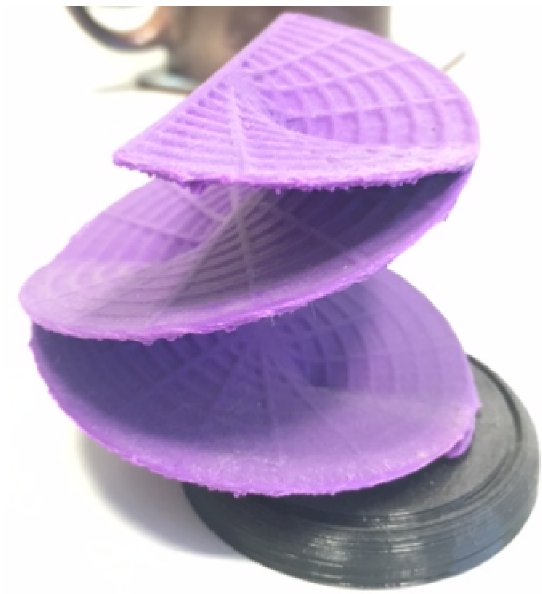


Figure 2.9: Superficie de Riemann de la función $\arcsin z$ (gentileza Leandro Salvañá)

Actividad 11: Calcular $\sin^{-1}\sqrt{5}$.

Sol.: Tomando $z=\sqrt{5}$ resulta,

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i\log[i\sqrt{5}+\left(1-(\sqrt{5})^2\right)^{1/2}] = -i\log[i\sqrt{5}+(-4)^{1/2}]\,.$$

. Las dos raíces de $(-4)^{1/2}$ son $\pm 2i$. Luego,

$$\sin^{-1}\sqrt{5} = -i\log[i\sqrt{5}\pm 2i] = -i\log[i(\sqrt{5}\pm 2)]\,.$$

Trabajemos sólo con el término del logaritmo,

$$\begin{aligned}\log[i(\sqrt{5}\pm 2)] &= \ln|(\sqrt{5}\pm 2)| + i(Arg[i(\sqrt{5}\pm 2)]+2n\pi)\\ &= \ln(\sqrt{5}\pm 2) + i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\end{aligned}$$

El primer término puede reescribirse del siguiente modo,

$$\begin{aligned}\ln(\sqrt{5}-2) &= \ln[(\sqrt{5}-2)\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}]\\ &= \ln[\frac{5-4}{\sqrt{5}+2}] = \ln[\frac{1}{\sqrt{5}+2}]\\ &= -\ln(\sqrt{5}+2)\end{aligned}$$

Luego, el término del logaritmo resulta,

$$\ln[i(\sqrt{5}\pm 2)] = \pm\ln(\sqrt{5}+2) + i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)\,.$$

Juntando el término del logaritmo con el término $-i$ de la ecuación original $\sin^{-1}\sqrt{5} = -i\ln[i(\sqrt{5}\pm 2)]$, tenemos

$$\begin{aligned}\sin^{-1}\sqrt{5} &= (-i)\left[\pm\ln\left(\sqrt{5}+2\right)+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]\\ &= \mp i\ln\left(\sqrt{5}+2\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\\ &= \frac{1+4n}{2}\pi \mp i\ln\left(\sqrt{5}+2\right)\end{aligned}$$

que resuelve $\sin^{-1}\sqrt{5}$.

Otras funciones inversas

$$\begin{aligned}\cos^{-1}z &= -i\ln\left[z+i(1-z^2)^{1/2}\right]\\ \tan^{-1}z &= \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)\end{aligned}$$

ellas también son multivaluadas.

Derivadas de las funciones inversas: Definiendo las funciones inversas de modos que sea simplemente valuadas, por ejemplo tomando la parte principal de la raíz y el logaritmo, podemos definir sus derivadas. La derivada del $\sin^{-1} z$ y $\cos^{-1} z$ depende de los valores elegidos para las raíces; mientras la derivada de la $\tan^{-1} z$ no depende de esta elección,

$$\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{(1-z^2)^{1/2}}$$
$$\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{(1-z^2)^{1/2}}$$
$$\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$$

2.12 Funciones hiperbólicas

Siguiendo la definición del cálculo usual con $x \to z$ se define,

$$\sinh z = \frac{e^z - e^z}{2} \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Luego,

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \qquad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$
$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z} \qquad \cosh z = \frac{1}{\sinh z}$$

Identidades:

$$\sinh(-z) = -\sinh z \qquad \cosh(-z) = \cosh z$$
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$
$$\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$$

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z \qquad \frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \qquad \frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$$
$$\frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z\, \tanh z \qquad \frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z\, \coth z$$

Derivada de las funciones hiperbólicas: Tanto el $\sinh z$ como el $\cosh z$ son funciones enteras por ser combinaciones lineales de exponenciales. La función $\tanh z$ es analítica en el dominio en el cual $\cosh z \neq 0$. Sus derivadas resultan:

$$\tfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z \qquad \tfrac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \qquad \tfrac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$$

$$\tfrac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z \qquad \tfrac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z\, \tanh z \qquad \tfrac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z\, \coth z$$

Identidades entre funciones trigonométricas e hiperbólicas:

$$\sin(z) = -i\sinh(iz) \qquad \cos(z) = \cosh(iz)$$
$$\sinh(z) = -i\sin(iz) \qquad \cosh(z) = \cos(iz)$$
$$\tan(iz) = i\tanh(z)$$

Módulos: Sea $z = x + i\,y$,

$$
\begin{aligned}
|\sinh z|^2 &= \sinh^2 x + \sin^2 y \\
|\cosh z|^2 &= \sinh^2 x + \cos^2 y
\end{aligned}
$$

Funciones inversas: De modo similar a como se definieron las funciones trigonométricas pueden introducirse las hiperbólicas, las cuales también son multivaluadas,

$$
\begin{aligned}
\sinh^{-1} z &= \ln\left[z + (z^2+1)^{1/2}\right] \\
\cosh^{-1} z &= \ln\left[z + (z^2-1)^{1/2}\right] \\
\tanh^{-1} z &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)
\end{aligned}
$$

Derivadas de las funciones inversas: Del mismo modo que para las funciones trigonométricas inversas, se puede definir derivadas tomando la parte principal de la raíz y el logaritmo, según corresponda. Se trabajan en forma similar a las inversas trigonométricas, obteniendo para sus derivadas,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\sinh^{-1} z &= \frac{1}{(z^2+1)^{1/2}} \\
\frac{d}{dz}\cosh^{-1} z &= \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} \\
\frac{d}{dz}\tanh^{-1} z &= \frac{-1}{z^2-1}
\end{aligned}
$$

Actividad 12: Relacionar alguna función trigonomética con argumento puramente imaginario, por ejemplos $\sin(iy)$, con las funciones hiperbólicas y viceversa.

Chapter 3

Integrales y series

Modificado: 2023.12.17

Fuente: R. V. Churchill, J. W. Brown. Variable compleja y aplicaciones. 4ta Edición. McGraw-Hill. Boston (1988). Capítulos 4 y 5.

Contenido: Funciones complejas. Integrales curvilíneas. Teorema de Cauchy-Goursat. Primitivas. Integrales de funciones multivaluadas. Fórmula integral de Cauchy. Enunciados de teoremas. Series de potencia. Serie de Taylor. Serie de Laurent.

Observación: La definición de sucesiones, series y sus ropiedades fueron introducidas en la asignatura Análisis Matemático III (2do año, 1er cuatrimestre).

Dedicación: tres (3) clases.

3.1 Integrales

3.1.1 Definiciones preliminares

Función compleja a variable real Sean las funciones reales u y v, en la variable real t, continuas por trozos en $a \leq t \leq b$. Luego,

$$w(t) = u(t) + i\, v(t)$$

es continua por trozos.

Integral definida de una función compleja a variable real: se define la integral de la función compleja w a variable real como

$$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b u(t)\, dt + i \int_a^b v(t)\, dt$$

siempre que las integrales de la derecha existan, lo cual se verifica para funciones continuas a trozos en el intervalor $a \leq t \leq b$.

Propiedades:

- La parte real e imaginaria satisface,

$$Re\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b Re[w(t)]\,dt$$
$$Im\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b Im[w(t)]\,dt$$

- Sea z_0 una constante compleja,

$$\int_a^b z_0\,w(t)\,dt = z_0\int_a^b w(t)\,dt$$

- Sea $w(t)$ continua por trozos en $a \le t \le b$

$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \le \int_a^b |w(t)|\,dt$$
$$\left|\int_a^\infty w(t)\,dt\right| \le \int_a^\infty |w(t)|\,dt$$
$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^c w(t)\,dt + \int_c^b w(t)\,dt$$

- Supongamos que

$$w(t) = u(t) + iv(t)$$
$$W(t) = U(t) + iV(t)$$

son continuas en $a \le t \le b$. Si

$$W'(t) = w(t)$$

en $a \le t \le b$, entonces

$$U'(t) = u(t)$$
$$V'(t) = v(t)\,.$$

Luego,

$$\int_a^b w(t)\,dt = U(t)|_a^b + i\,V(t)|_a^b$$
$$= W(t)|_a^b\,.$$

- El teorema del valor medio no es válido

$$\int_a^b w(t)\,dt \neq w(c)(b-a)$$

Actividad 1: Verificar que no se satisface el teorema del valor medio para $w(t) = e^{it}$ con $0 \le t \le 2\pi$.

- Otras propiedades:

$$\frac{dw(-t)}{dt} = -\left.\frac{dw(t)}{dt}\right|_{t=-t} = -w'(-t)$$
$$\int_{-b}^{-a} w(-t)dt = \int_a^b w(\tau)d\tau$$

Sobre contornos: las integrales de funciones complejas a variable compleja se definen sobre curvas en el plano complejo, en lugar de sobre intervalos sobre el eje real.

Definición de arco: un conjunto de puntos $z = (x, y)$ en el plano complejo se dice que es una **arco** si

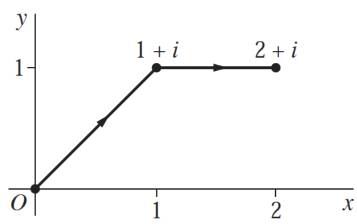
$$x = x(t)$$
$$y = y(t)\,,$$

con $a \leq t \leq b$, donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas del parámetro real t. Esto establece un mapeo continuo del intervalo $a \leq t \leq b$ al plano (x, y) o z. Los puntos de la imágen z se ordenan según valores crecientes de t en una curva C y escribimos,

$$z = z(t) = x(t) + i\,y(t)$$

con $a \leq t \leq b$.

Ejemplo: (con $t = x$)



$$z = \begin{cases} x + ix & 0 \leq x \leq 1 \\ x + i & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Ejemplo: Arco de circunferencia (semicircunferencia superior de Fig. 3.1) centrado en $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$z = z_0 + Re^{i\theta}\,,$$

con $t = \theta \in [0, \pi]$ y

$$x(\theta) = x_0 + R\cos\theta$$
$$t(\theta) = y_0 + R\sin\theta\,.$$

Definición de arco Jordan: se denomina **arco simple** o **arco de Jordan** si el arco no se corta a sí mismo, esto es $z(t) \neq z(t')$ cuando $t \neq t'$.

Definición de curva de Jordan: cuando el arco C es simple excepto por el hecho que $z(a) = z(b)$, con $a \leq t \leq b$, decimos que C es una **curva simple cerrada** o **curva de Jordan**.

Convención de circulación: cuando la curva de Jordan se recorre en sentido anti horario se la considera **positivamente orientada**.

Ejemplo: $z = z_0 + Re^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ es una curva de Jordan que define una circunferencia recorrida en sentido anti horario, Fig. 3.1.

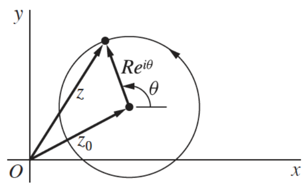


Figure 3.1:

Definición de arco diferenciable: Sea que $z(t) = x(t)+i\,y(t)$ describe un arco C. Supóngase que existen y son continuas en todo el intervalo $a \leq t \leq b$ las derivadas x' e y'. En tal caso C se denomina **arco diferenciable**, cuya longitud L viene dada por la integral,

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt\,.$$

Definición de arco suave o regular: si $z'(t)$ es continua y no nula en el intervalo $a \leq t \leq b$ decimos que la curva es suave o regular.

Definición de arco suave a trozos o contorno: un **contorno** o **arco suave a trozos**, es un arco formado por un número finito de arcos suaves.

Ejemplo: ver ejemplo arriba de la función partida $z(t) = t + it$ para $0 \leq t \leq 1$, $z(t) = t + i$ para $1 \leq t \leq 2$.

Sobre la longitud: la longitud de un contorno simple o simple cerrado es la suma de las longitudes de los arcos suave que lo forman.

Sobre el teorema de la curva de Jordan: con cualquier curva simple cerrada o contorno simple cerrado C están asociados dos dominios, cada uno de los cuales tiene a los puntos de C por únicos puntos frontera. Uno de estos dominios, llamado el interior de C es acotado; el otro, que es exterior de C, es no acotado. Estas definiciones constituyen el llamado **teorema de la curva de Jordan**. La demostración rigurosa no es sencilla aunque la visualización geométrica es clara.

3.1.2 Integral curvilínea

La integral de una función compleja a variable compleja,

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C f(z)\, \frac{dz}{dt}\, dt =$$

$t \in [a, b]$
$z(t) = x(t) + iy(t)$
$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$\int_C f(z)\, dz = \int_C [u(x, y) + iv(x, y)]dz$$

$$\int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))](dx(t) + idy(t)$$

es una integral curvilínea, donde C es un contorno en el plano complejo que se extiende desde el punto $z = z_1$ al punto $z = z_2$. Luego, se trata de una integral de línea, de modo que su valor depende, en general, del contorno C y del integrando f. Usamos la siguiente notación

$$\int_C f(z)\,dz$$

o, si la integral no depende del contorno, usamos

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz\,.$$

Definición de la integral: supongamos que la ecuación

$$z(t)$$

con $a \leq t \leq b$, describa un contorno C de $z_1 = z(a)$ a $z_2 = z(b)$. Supongamos, también que

$$f(z(t))$$

es continua a trozos en $a \leq t \leq b$, lo cual entendemos como que $f(z)$ es continua a trozos en C. Luego, definimos la integral de línea o **integral de contorno** de f en C es término del parámetro t como:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt \tag{3.2}$$

Sobre la integral circulando el contorno en sentido opuesto: La integral de $f(z)$ sobre una curva C recorrida en un sentido, se relaciona con la integral de $f(z)$ sobre la misma curva recorrida en sentido opuesto de la siguiente forma (ver Fig. 3.2)

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz\,.$$

En el Apéndice A.5 mostramos esta identidad.

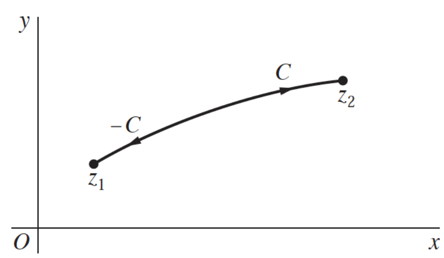


Figure 3.2:

Propiedades:

- Sea el contorno C formado por los contornos C_1 y C_2, de modo que el punto inicial de C_2 es el final de C_1 y se lo puede representar $C = C_1 + C_2$. Ver Fig. 3.3

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz\,,$$

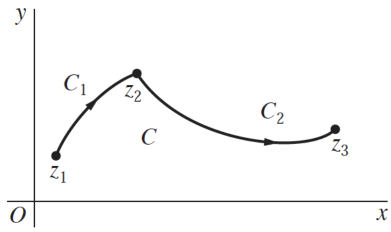


Figure 3.3:

- Sea z_0 una constante compleja

$$\int_C z_0\, f(z)\, dz = z_0 \int_C f(z)\, dz\,.$$

- Otras propiedades:

$$\int_C [f(z) + g(z)]\, dz = \int_C f(z)\, dz + \int_C g(z)\, dz\ .$$

$$\left| \int_C f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t))\, z'(t)|\, dt\,.$$

- Supongamos que $f(z)$ es continua por trozos sobre el contorno C. Si M es una constante no negativa tal que

$$|f(z)| \leq M$$

para todo z en C, entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\, dz \right| &\leq M \int_a^b |z'(t)|\, dt \\ &\leq M\, L\,, \end{aligned}$$

con L la longitud del contorno.

Actividad 2: Acotar la integral $\int_C \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$, con C el arco del primer cuadrante del cículo $|z| = 3$ (i.e. $z_1 = 3$ y $z_2 = 3i$.)
Rta.:

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \right| &\leq \left| \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} \right| L \\ &\leq \frac{2|z|^2+1}{|(z^2+1)(z^2+4)|} L = \frac{2R^2+1}{|(z^2+1)(z^2+4)|} L \\ &\leq \frac{19}{|(z^2+1)(z^2+4)|} L \end{aligned}$$

con $L = \frac{\pi}{4}$ y donde hemos acotado el numerador. Ahora acotamos denominador,

$$\begin{aligned} |(z^2+1)(z^2+4)| &\geq |(|z|^2-1)(|z|^2-4)| = |(R^2-1)(R^2-4)| \\ &\geq 40 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \left| \int_C \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)} dz \right| &\leq \frac{19}{|(z^2+1)(z^2+4)|} L = \frac{19}{40} L \\ &\leq \frac{19\pi}{160} \end{aligned}$$

Actividad 3: La siguiente integral nos será de utilidad al tratar el tema de residuos. Calcular la integral de $f(z) = \bar{z} = e^{-i\theta}$ en los siguientes tres contornos:

- Semicírculo superior centrado en el origen de radio unidad, recorrido en sentido horario.
  Sol.: Parametrización de la curva: $z = e^{i\theta}$, con $\pi \geq \theta \geq 0$. Luego

  $$I_1 = \int_{\pi}^{0} e^{-i\theta}(ie^{i\theta}d\theta) = -i\pi\,,$$

  donde hemos usado $dz = ie^{i\theta}d\theta$.

- Semicírculo inferior centrado en el origen de radio unidad, recorrido en sentido antihorario.
  Sol.: Parametrización de la curva: $z = e^{i\theta}$, con $-\pi \leq \theta \leq 0$. Luego

  $$I_2 = \int_{-\pi}^{0} e^{-i\theta}(ie^{i\theta}d\theta) = i\pi\,.$$

- Círculo centrado en el origen de radio unidad, recorrido en sentido antihorario.
  Sol.: Podemos componer la integral sumando las dos anteriores, teniendo en cuenta en forma apropiada la suma de los contorno. Para tener el círculo recorrido en sentido antihorario debemos sumar I_2 con $-I_1$, luego

  $$I = I_2 + (-I_1) = 2\pi\, i\,.$$

  Alternativamente: Podemos integrar en la circurferencia completa en sentido positivo,

  $$I = \int_{0}^{2\pi} e^{-i\theta}(ie^{i\theta}d\theta) = 2i\pi\,.$$

La conexión con residuos es observar lo siguiente,

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}dz = \int_C e^{-i\theta}dz &= \int_C \frac{1}{e^{i\theta}}dz \\ &= \int_C \frac{1}{z}dz\end{aligned}$$

luego,

$$\int_C \frac{1}{z}dz = 2i\pi$$

con C recorrido en el sentido positivo. Luego veremos $1/z$ tiene un polo simple en $z = 0$ con residuo 1. Veremos que la teoría de residuos dice que integrales en contornos cerrados que contengan al polo es igual al producto 2π por el residuo, por lo que no haría falta hacer ningún cálculo, y el resultado de la integral es independiente de la forma de C, maravilloso, no?

Actividad 4: repetir los cálculos para un semicírculo de radio 2 definido entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Considere las diferentes opciones y luego compóngalas para obtener el resultado de un contorno cerrado.´

3.1.3 Teorema de Cauchy-Goursat

Teorema de Cauchy-Goursat: si una función f es analítica en todos los puntos de un contorno simple cerrado C y en su interior, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Una demostración obsoleta es la que hace uso de exigencia no requerida que f' sea continua (formulación original de Cauchy). Esta demostración tiene la ventaja de ser corta y elegante y apela a la ecuaciones de Cauchy-Riemann (la versión que no requiere f' es algo más larga y complicada, no se dará en estas notas).

Información preliminar: supóngase que dos funciones reales P y Q, de dos variables reales (x, y) son continuas, así como sus derivadas parciales de primer orden, en toda la región cerrada R formada por los puntos de un contorno simple cerrado C y los de su interior en el plano xy. Por el teorema de Green que relaciona la integral de linea con la integral en el área, se tiene

$$\int_C [P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = \iint_R \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx\,dy$$

donde el contorno se recorre en sentido antihorario (positivo).

Aplicación del teorema de Green a $f(z)$: La integral de contorno puede escribirse en término de u y v,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy)\\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\end{aligned}$$

Luego, aplicando el teorema de Green tenemos

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\\ &= \int_R (-u_y - v_x)\,dx\,dy + i\int_R (-v_y + u_x)\,dx\,dy\\ \int_C f(z)\,dz &= 0\end{aligned}$$

donde en la última línea se ha aplicado la ecuación de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Recordemos que esta no es la demostración según las condiciones del teorema, porque hace uso de la continuidad de f' que no es requerida por el teorema. Relajar esta condición fue la contribución de Goursat.

Aplicaciones: Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat, sin calcular las integrales, tenemos

- Para cualquier contorno C,
$$\int_C dz = 0$$
- Para cualquier contorno C,
$$\int_C z\,dz = 0$$
- Para cualquier contorno C,
$$\int_C z^2\,dz = 0$$

Actividad 5: porqué vale para cualquier contorno simple cerrado?

- Sea C el disco entre $|z| = 2$ y $|z| = 1$ con el contorno externo recorrido en sentido antihorario y el interno en sentido horario. Entonces,

$$\int_C \frac{1}{z^2(z^2+9)}\, dz = 0$$

Actividad 6: Qué pasaría si:

- sólo consideramos el contorno $|z| = 2$
- que pasaría si consideramos el contorno $|z| = 4$ y $|z| = 1$ circulado como el $|z| = 2$ y $|z| = 1$?

Comentario: El contorno formado por el anillo del disco C entre $|z| = 2$ y $|z| = 1$ no tiene la estructura simple de los otros ejemplos, pero aún así vale Cauchy-Goursat. En lo que sigue veremos esto con un poco más de detalle.

Definición de dominio simplemente conectado: un dominio D **simplemente conexo** es un dominio en el que todo contorno simple cerrado contenido en él encierra sólo puntos de D.
Ejemplo: círculos

Definición de dominio multiplemente conexo: un dominio que no es simplemente conexo se dice **múltiplemente conexo**.
Ejemplo: anillos

Versión alternativa del teorema de Cauchy-Goursat usando el concepto de simplemente conexo: Si una función f es analítica en todo un dominio simplemente conexo D entonces,

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

donde C es cualquier contorno simple cerrado contenido en D. Se puede reemplazar aquí el contorno simple cerrado por un contorno cerrado arbitrario C que no sea necesariamente simple. Pues si C se corta él mismo un número finito de veces, está formado por un número finito de contornos simples y cerrados, ver figura 3.4.

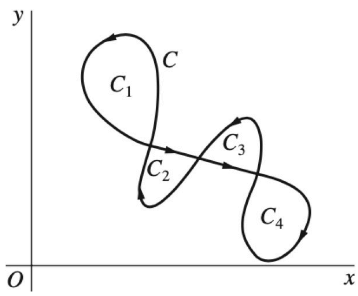


Figure 3.4:

Independencia del contorno(camino): Consideremos los contornos C_1 y C_2 de la figura Fig. 3.5, en un dominio simplemente conexo D, ellos tienen el mismo punto inicial y final, de modo que C_1 y $-C_2$ unidos forman un contorno cerrado,

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = 0$$
$$\int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = 0$$
$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz$$

lo que muestra que la integral de z_1 a z_2 es independiente del camino cuando f es analítica en D. Esto es lo que se entiende cuando se usa la notación,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$$

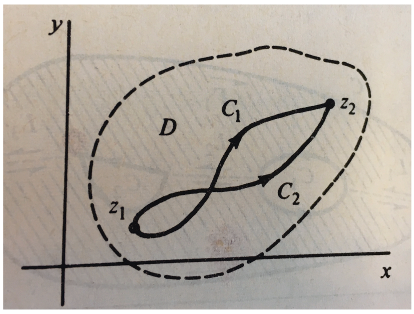


Figure 3.5:

Teorema de Cauchy-Goursat para dominios múltiplemente conexo: Sea C un contorno simple cerrado, y sean C_j, con $j = 1, 2, \cdots, n$, contornos simples cerrados dentro de C, tales que las regiones interiores a cada C_j no tengan puntos en común. Sea R la región cerrada formada por todos los puntos dentro de C, salvo los puntos interiores a cada C_j, ver figura 3.6. Denotamos por B toda la frontera orientada de R formada por C y todos los contornos C_j, recorridos en un sentido tal que los puntos interiores de R queden a la izquierda de B. Luego,

$$\int_B f(z)\,dz = 0$$

cuando f es analítica en R.

3.1.4 Primitivas

Sea f continua en D, y supóngase que existe un función analítica F tal que, para cada punto de D se verifique,

$$F'(z) = f(z)$$

se dice que F es una **primitiva** de f en D.

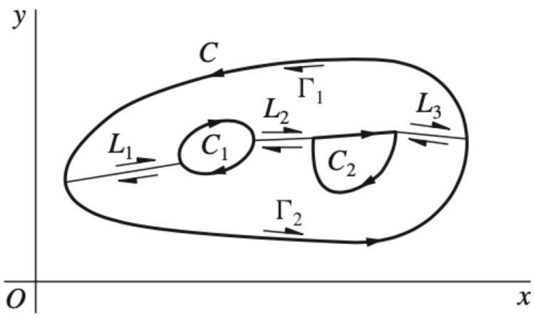


Figure 3.6:

Supongamos que el contorno C tiene la representación paramétrica $z = z(t)$, con $a \le t \le b$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_a^b f(z(t))\,\frac{dz}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b \frac{dF}{dz}\,\frac{dz}{dt}\,dt \\
&= \int_a^b \frac{dF}{dt}\,dt \\
\int_C f(z)\,dz &= F(z(b)) - F(z(a))
\end{aligned}$$

Denotando $z_1 = z(t = a)$ y $z_2 = z(t = b)$, a los puntos inicial y final de C, respectivamente, resulta que la **integral es independiente del camino** y puede ser calculada a través de su primitiva,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

con F la primitiva de f, f continua en D y C contenido en D.

Curva cerrada: para el caso particular que el contorno es cerrado, $z_1 = z_2$, luego,

$$\int_C f(z)\,dz = 0\,.$$

Propiedad: dos primitivas cualesquiera de una función f pueden diferir a lo sumo en una constante compleja aditiva.

Juntamos cada elemento descripto arriba en el siguiente teorema.

Teorema: Supongamos que la función $f(z)$ es continua en un dominio D. Si una cualquiera de las siguientes afirmaciones es correcta, entonces también lo son las otras:

- $f(z)$ tiene una primitiva $F(z)$ en D
- la integral de $f(z)$ a lo largo de contornos contenidos completamente en D desde cualquier punto z_1 a cualquier otro punto z_2 tienen el mismo valor

  $$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

  donde $F(z)$ es la primitiva de $f(z)$.

- las integrales de $f(z)$ en contornos cerrados contenidos completamente en D tienen todas valor nulo.

Actividad 7: Calcular las siguientes integrales:

- $\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz$ para todo contorno entre $z_1 = 0$ y $z_2 = 1+i$.
  Rta.: $f(z) = z^2$ es entera, luego es analítica en todo el plano complejo, luego es continua. La función $F(z) = z^3/3$ es analítica y verifica $F'(z) = z^2$. Luego F es la primitiva de f

$$\int_{z_1}^{z_2} z^2 dz = \left.\frac{z^3}{3}\right|_{z_1}^{z_2}$$

- $\int_{z_1}^{z_2} 1/z^2 dz$ para cualquier contorno de z_1 a z_2 que no pase por el origen.
  Rta.: $f(z) = 1/z^2$ es continua en todo el plano excepto en el origen.
  La función $F(z) = -1/z$ con $|z| > 0$ es analítica, esto es, el dominio no incluye $z = 0$, y verifica $F'(z) = 1/z^2$. Luego

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{z^2} dz = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}$$

  con $z_1 \neq 0$ y $z_2 \neq 0$.
  Comentario: si el contorno fuera un círculo (aún alrededor del origen) la integral es cero.

Actividad 8: qué pasaría si $f(z) = 1/z$?
Rta.: El dominio de$f$ es todo el plano complejo excepto $z = 0$, pero su primitiva (tomando sólo una rama) $\log z$ no es analítica en todo el mismo dominio debido al corte rama. Esto significa que no podríamos calcular la integral en un círculo completo como hicimos para $1/z^2$ usando la primitiva. Pero, para por ejemplo, $z_1 = -2i$ y $z_2 = 2i$, con un contorno parametrizado por $z = 2e^{i\theta}$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ tendríamos que $\int_{z_1}^{z_2} 1/z\, dz$ con z en el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \theta < \pi$, tiene por primitiva Log z. Luego,

$$\int_{z_1}^{z_2} 1/z\, dz = Log\,(2i) - Log\,(-2i) = i\,\pi$$

Integrales de funciones multivaluadas: Consideremos integrales donde el integrando es una función multivaluada y por ende admite diferentes realizaciones dependiendo del entorno en el cual se lo defina. Tomando como ejemplo $f(z) = z^{1/2}$ con el corte rama en el semieje real positivo, calcularemos

- la integral de -3 a 3 de dos ramas (realizaciones) diferentes de f;

- la integral de f en un contorno cerrado que encierra el punto rama

La integral (Fig. 3.7)

$$\int_{-3}^{3} z^{1/2}\, dz$$

con $z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$ tiene un corte en el semieje real positivo, luego no es continua allí y no podemos evaluar la primitiva en $z = 3$, esto es, uno de los puntos no está contenido en el dominio donde el integrando es contínuo.

Alternativamente, podemos definir la realización (rama)

$$f_1(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\,,$$

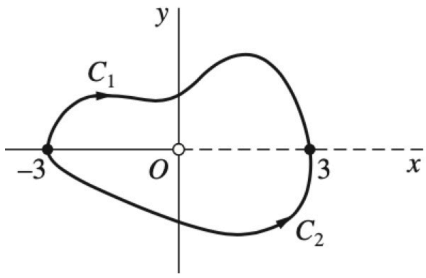


Figure 3.7:

con $r > 0$ y $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ cuyo corte se encuentra en $\theta = -\frac{\pi}{2}$, y por ende está definida en ambos extremos de la integración y todo el dominio si tomamos una curva en el semiplano complejo superior, como por ejemplo C_1, ver Fig. 3.7.

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{C_1} z^{1/2}\,dz = \int_{-3}^{3} z^{1/2}\,dz = \int_{-3}^{3} f_1(z)\,dz &= \frac{2}{3} z^{3/2}\Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= \frac{2}{3}(3^{3/2}e^{i0\frac{3}{2}} - 3^{3/2}e^{i\pi\frac{3}{2}}) \\ &= 2\sqrt{3}(1+i)\end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} z_1 &= -3 = 3e^{i\pi} \\ z_2 &= 3 = 3e^{i0}\end{aligned}$$

Tomando la realización

$$f_2(z) = z^{1/2} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\,,$$

con $r > 0$ y $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}$, se tiene que el corte se encuentra en $\theta = \frac{\pi}{2}$. Luego, podemos realizar la integral de $z_1 = -3$ a $z_2 = 3$ por un contorno en el semiplano complejo inferior, como por ejemplo C_2, ver Fig. 3.7.

Luego,

$$\begin{aligned}\int_{C_2} z^{1/2}\,dz = \int_{-3}^{3} z^{1/2}\,dz = \int_{-3}^{3} f_2(z)\,dz &= \frac{2}{3} z^{3/2}\Big|_{z_1}^{z_2} \\ &= \frac{2}{3}(3^{3/2}e^{i2\pi\frac{3}{2}} - 3^{3/2}e^{i\pi\frac{3}{2}}) \\ &= 2\sqrt{3}(-1+i)\end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} z_1 &= -3 = 3e^{i\pi} \\ z_2 &= 3 = 3e^{i2\pi}\end{aligned}$$

notar los valores del argumento de z_1 y z_2.

Lo que muestra que diferentes realizaciones de la función $z^{1/2}$ dan diferentes valores de la integral.

Luego, para calcular la integral en un contorno cerrado C, combinamos ambos cálculos con los contornos C_1 y C_2 circulados en las direcciones adecuadas. Consideremos, por ejemplo, la circulación sea positiva,

$$\begin{aligned}\int_C z^{1/2}\,dz &= \int_{-C_1} z^{1/2} + \int_{C_2} z^{1/2}\\ &= (-1)2\sqrt{3}(1+i) + 2\sqrt{3}(-1+i)\\ &= -4\sqrt{3}\end{aligned}$$

lo que muestra que la intergral no es nula para un contorno cerrado.

3.1.5 Fórmula integral de Cauchy

Sea f una función analítica sobre un entorno simple cerrado C y en su interior. Para cualquier z_0 interior a C, vale la siguiente identidad, denominada **fórmula integral de Cauchy**

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

donde el contorno se recorre en el sentido positivo (antihorario).

Actividad 9: identificar qué tiene de diferente esta integral con la integral de Cauchy-Goursat. Es analítico el integrando?

Comentario: Notar que el valor de la función en un punto interior al contorno se calcula por sus valores en el contorno, al tiempo que el contorno es arbitrario!, no es maravilloso?

Actividad 10: Calcular la integral

$$\int_C \frac{f(z)}{z+i}dz = ?$$

con

$$f(z) = \frac{z}{9-z^2}\,,$$

y $C = |z| = 2$ recorrido positivamente.
Sol.: $f(z)$ es analítica en, y dentro de C. Luego,

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0} = 2\pi\, i f(z_0)$$

Escribiendo,

$$\int_C \frac{f(z)}{z+i}dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)}dz\,,$$

implica $z_0 = -i$. Luego

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z+i} &= 2\pi i f(z_0) = 2\pi i\frac{(-i)}{10}\\ &= \frac{\pi}{5}\,.\end{aligned}$$

Actividad 11: Alternativamente el problema anterior pudo haber sido planteado de la siguiente forma: calcular el valor de la siguiente integral

$$\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)} dz$$

con $C = |z| = 2$ recorrido positivamente.
Cómo reformularía la solución?

Derivadas

Sea f analítica dentro y sobre un contorno simple cerrado C positivamente orientado, y sea z un punto interior a C. Luego, la derivada de f existe y viene dada por la ecuación,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')}{(z'-z)^2}\, dz'$$

La cual puede deducirse reemplazando las funciones $f(z+\Delta z)$ y $f(z)$ por la correspondiente expresiones integral de Cauchy en la definición de derivada como límite del cociente incremental (no lo desarrollamos en estas notas), $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$.

Mediante el mismo procedimiento aplicado a f' se encuentra,

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(z')}{(z'-z)^3}\, dz'$$

Lo que implica que $f''(z)$ existe para z en el interior de C, y por ende $f'(z)$ es analítica en el interior de C. Iterando este procedimiento y argumento se puede establecer el siguiente teorema.

Teorema sobre la analiticidad de f y sus derivadas: Si una función f es analítica en un punto, entonces sus derivadas de todos los órdenes son también analíticas en ese punto. El valor de las derivadas en cada punto interior viene dada por la expresión,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$$

donde f es analítica sobre y en el interior del entorno simple cerrado C recorrido positivamente, $n = 1, \cdots$ es el orden de la derivada, y z_0 es un punto interior a C. Definiendo $f^{(0)}(z) = f(z)$ y $0! = 1$, podemos incluir la fórmula de Cauchy en la expresión anterior.

Actividad 12: pensar que implicancia tiene este teorema sobre las derivadas parciales de u y v. Esta es la propiedad adelantada en el capítulo anterior la cual fue usada para mostrar la armonicidad de u y v.

Sobre la analiticidad de Re(f) e Im(f): Cuando la función $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es analítica en un punto $z = (x,y)$, la analiticidad de f' asegura allí la continuidad de f', luego, las derivadas parciales de u y v son continuas en ese punto, dado que $f' = u_x + i\,v_x = -i\,u_y + v_y$. Repitiendo esta lógica a derivadas de mayor orden, se concluye que las derivadas parciales de u y v de todos los órdenes son continuas en todo punto en el que f es analítica.

Actividades 13: Calcular las siguientes integrales suponiendo que C es un contorno simple cerrado con orientación positiva y z_0 interior a C.

- Calcular
$$\int_C \frac{1}{z-z_0}dz$$
Sol.: Tomando $f(z)=1$
$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i$$
Observación: hacer el vículo con la integral vista en la pág. 53
$$\int_{C=|z|=1} \bar{z}dz$$

- Calcular
$$\int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$
con $n = 1, 2, \cdots$.
Sol.:
$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0) = 0$$
donde hemos usado $f(z) = 1$, luego $f^{(n)}(z) = 0$ para todo z interior a C y $n \geq 1$.

- Calcular
$$\int_{C:|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^4}dz$$
Rta.: Sea $f(z) = e^{2z}$ y $z_0 = 0$, entonces
$$\begin{aligned}\int_{C:|z|=1} \frac{e^{2z}}{z^4}dz &= \int_{C:|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^{3+1}}dz \\ &= \frac{2\pi i}{3!}f^{(3)} = \frac{8\pi i}{3}\end{aligned}$$

3.1.6 Enunciados de teoremas

En esta sección se enucian algunos teoremas de interés.

Teorema de Morera

Si una función f es continua en un dominio D, no necesariamente simplemente conexo, y si
$$\int_C f(z)\,dz = 0$$
para todo contorno cerrado C contenido en D, entonces f es *analítica* de D.
Veamos... Usando información de las secciones anteriores construimos el siguiente argumento. Dado que f es continua y $\int_C f(z)\,dz = 0$, por hipótesis, se infiere que las integrales no dependen del camino, y luego que f tiene una primitiva F. Esto es, existe una función analítica $F(z)$ tal que $F'(z) = f(z)$ en cada punto de D. Por último, sabemos que la derivada de una función analítica también es analítica, por lo que f es analítica.

Funciones constantes

Sea $f = u + iv$ analítica en un dominio D. Si $u = cte$, o $v = cte$, o $|f| = cte$ en D, entonces $f(x, y)$ es una *función constante.*
Veamos..

- Si $u = cte$, entonces $u_x = u_y = 0$. Luego, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann por ser f analítica tenemos, $v_x = -u_y = 0$ y $v_y = u_x = 0$, luego $v = cte$, y $f = u + iv = cte$.
- Si $v = cte$, seguimos la lógica del ítem anterior y resulta $f = u + iv = cte$.
- Si $|f| = cte$, entonces
$$|f|^2 = u^2 + v^2 = cte \Rightarrow (|f|^2)' = 0$$
Derivando la expresión $u^2 + v^2 = cte$ con respecto a x e y resulta
$$\begin{aligned} 2uu_x + 2vv_x &= 0 \\ 2uu_y + 2vv_y &= 0 \end{aligned}$$
Usando las ecuaciones e Cauchy-Riemann $v_x = -u_y$ y $v_y = u_x$, construimos dos ecuaciones para u_x y u_y,
$$\begin{aligned} u_x u - u_y v &= 0 \\ u_x v + u_y u &= 0 \end{aligned}$$
Entonces,
$$u_x \left(v + \frac{u^2}{v} \right) = 0$$
Consideremos las dos posibles opciones:
  - Si $u_x = 0 \Rightarrow u = cte \Rightarrow f = cte$
  - Si $\left(v + \frac{u^2}{v} \right) = 0 \Rightarrow v^2 + u^2 = 0$, y siendo $v^2 > 0, u^2 > 0 \Rightarrow u = v = 0 \Rightarrow f = 0 = cte$

Principio del máximo

En el apéndice A.1 damos material complementario para contextualizar el principio del máximo enunciado aquí.

Si una función $f(z)$ es continua en una región R cerrada y acotada, y $f(z)$ es analítica y no constante en el interior de R, el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en la frontera de R y nunca en el interior.

Actividad 14: Calcular el máximo de $|\sin z|$ en la región R mostrada en la Fig. 3.8.
Rta.: Escribiendo
$$|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$$
obtenemos $x = \pi/2$ e $y = 1$.

Actividad 15: Calcular el mínimo de la actividad anterior. Ocurre en la frontera?
Rta.: si

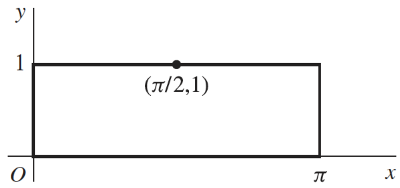


Figure 3.8:

Teorema de Liouville

Si f es entera y acotada para todos los valores de z en el plano complejo, entonces $f(z)$ es constante en todo el plano. Ver Apéndice A.2 para más detalles.

Teorema fundamental del álgebra

Cualquier polinomio $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j$, con $a_n \neq 0$, de grado n, con $n \geq 1$, tiene al menos un cero. Esto es, existe al menos un punto z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Actividad 16: cómo se conecta este teorema con lo que uno espera que $P(z) \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j$ tenga n ceros?
Rta.: Del teorema se infiere que $P(z)$ puede factorizarce de la forma $P(z) = (z - z_1)Q(z)$ con $Q(z)$ un polinomio de orden $n' = n - 1$. Luego, por el teorema este polinomio Q de orden n' tiene al menos un cero, por lo que puede factorizarce como $Q(z) = (z - z_2)H(z)$. Repitiendo esta lógica llegamos a los n ceros de $P(z)$. Luego, como una consecuencia se demuestra que un polinomio de grado n, con $n \geq 1$, tiene a lo sumo n ceros.

3.2 Series

3.2.1 Definiciones preliminares

En lo que sigue desarrollaremos la representación en series de funciones analíticas. Se presentan los teoremas que garantizan la existencia y se dan algunas herramientas para manipularlas.

Convergencia de sucesiones: una sucesión

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$$

de números complejos, tiene por **límite** z si, para cada número positivo ε existe un entero positivo n_0 tal que,

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

siempre que $n > n_0$ (donde n_0 puede depender de ε). Ver Fig. 3.9.

La sucesión $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ puede tener a lo sumo un límite, esto es, el límite z es **único**. Cuando el límite existe, se dice que la sucesión **converge** a z; y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z\,.$$

Si la sucesión no tiene límite, se dice que **diverge**.

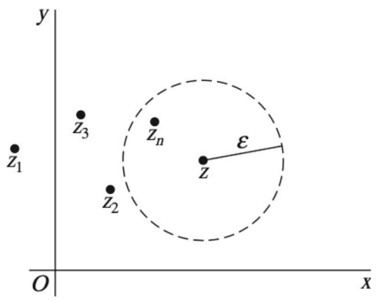


Figure 3.9: Límite de una sucesión.

Teorema: Supóngase que $z_n = x_n + i\,y_n$, con $n = 1, 2, \cdots$, y que $z = x + i\,y$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Actividad 17: calcular el límite de la sucesión $z_n = 1/n^3 + i$.
Rta.:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3} + i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} + i\lim_{n\to\infty} 1 = 0 + i\,1 = i$$

Convergencia de series: Una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

de números complejos **converge** a la **suma** S si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N$$

de **sumas parciales**, con $N = 1, 2, \cdots$, converge a S; luego escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S\,.$$

Dado que la sucesión puede tener a lo sumo un límite, una serie puede tener a lo sumo una suma. Cuando una serie no converge, decimos que **diverge**.

Teorema: Supóngase que $z_n = x_n + i\,y_n$, con $n = 1, 2, \cdots$ y que $S = X + i\,Y$. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

si y sólo si,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y\,.$$

Corolario: si una serie de números complejos converge, el n-ésimo término converge a cero cuando n tiende a infinito. Luego, los términos de una serie convergente están **acotados**, esto es, existe $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para cada n.

Definición de serie absolutamente convergente: si la serie de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

con $z_n = x_n + iy_n$, converge, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente.

Definición de resto: para una serie que converge al número complejo S, definimos el resto como la diferencia entre S y la suma parcial de los N primeros términos,

$$\rho_N = S - S_N \, .$$

De este modo

$$S = S_N + \rho_N$$

y dado que

$$|S_N - S| = |\rho_N - 0|$$

una **serie converge** a S si y sólo si la **sucesión de restos tiende a cero**.

Definición de series de potencias: son series con la siguiente forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + +a_n(z - z_0)^n + \cdots$$

con z_0 y a_n constantes complejas, y z cualquier número complejo de alguna región que contiene a z_0.

Actividad 18: Verificar la suma de potencia siguiente usando restos

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

con $|z| < 1$.
Rta.: Partimos de la identidad (para $z \neq 1$)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

y escribimos la suma parcial

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}$$

para $z \neq 1$, como

$$S_N(z) = \frac{1 - z^N}{1 - z}$$

Luego, usando $S(z) = 1/(1-z)$ construímos el resto

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) = \frac{z^N}{1-z}$$

con $z \neq 1$. En el límite $N \to \infty$ el resto tiende a cero para $|z| < 1$,

$$|\rho_N(z)| = \frac{|z|^N}{|1-z|}$$

por lo que vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

con $|z| < 1$.

3.2.2 Teoremas relativos a series de potencia

Convergencia absoluta: La convergencia absoluta $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ de una serie de números complejos implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Convergencia en el interior de un disco: Si una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ converge para $z = z_1$, con $z_1 \neq z_0$, *es absolutamente convergente* para todo valor de z tal que $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Convergencia en el exterior de un disco: Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ converge cuando $z = z_1$ con $z_1 \neq z_0$, entonces *es absolutamente convergente* en todo punto z *exterior* al disco centrado en z_0 que pasa por z_1.

Convergencia uniforme: [1] La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$, con $|z| < R$, es uniformemente convergente en todos los puntos z de un disco cerrado centrado en el origen contenido en el *interior del disco de convergencia.*

Continuidad: La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ representa una función continua de z en cada punto interior de su disco de convergencia.

Integración: Denotemos por C un contorno cualquiera en el interior del disco de convergencia de la serie de potencia $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$, y sea $g(z)$ una función continua en C. La serie formada multiplicando cada término de la serie por g se puede integrar término a término sobre C,

$$\int_C g(z)\, S(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)\, z^n\; dz$$

Analiticidad: La serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ representa una función que es analítica en todo el interior del disco de convergencia.

[1] Si la serie convergen, entonces el resto $|\rho_N(z)| < \varepsilon$ para $N > N_\varepsilon$. Cuando la elección de N_ε depende de ε pero no del punto z, se dice que la serie converge uniformemente en esa región.

Derivada: La serie de potencias $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ se puede derivar término a término; esto es, en cada punto z del disco de convergencia se tiene

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, z^{n-1}\,.$$

Observación: Los últimos tres teoremas se extienden inmediatamente a las series con potencias positivas o negativas de $z - z_0$.

Producto de series de potencia: Supongamos que cada una de las series de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n$ convergen dentro de alguna circunferencia $|z| = R$ a las funciones $f(z)$ y $g(z)$ respectívamente. El producto de ellas tiene el siguiente desarrollo en serie válido para $|z| < R$,

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n$$

denominado **producto de Cauchy**, con $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$.

Actividad 19: Deducir la expresión de c_n.
Hint: Los coeficientes c_n se obtienen de la identidad

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z)\,,$$

donde $f^{(k)}(z)$ denota la derivada k-ésima, y los coeficientes de Maclaurin $a_k = \frac{f^{(k)}(z=0)}{k!}$, de la expansión $f(z) = \sum_k a_k\, z^k$.

3.2.3 Serie de Taylor

La serie de Maclaurin corresponde a la serie de Taylor desarrollada alrededor del origen. Dada la importancia de los desarrollos en serie alrededor del cero, se mantiene este nombre específico, aunque sea un caso especial de Taylor.

Teorema. Serie de Taylor: Sea f analítica en el disco $|z - z_0| < R_0$ centrado en z_0 y de radio R_0. Entonces $f(z)$ admite la siguiente representación en serie de potencia,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $|z - z_0| < R_0$, donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$. De modo que la serie converge a $f(z)$ con z en el disco abierto $|z - z_0| < R_0$.

Cualquier función que es analítica en z_0 tiene una serie de Taylor alrededor de z_0. Si f es entera, el radio R_0 puede ser arbitrariamente grande, esto es $|z - z_0| < \infty$, de modo que la serie converge en todo z del plano finito. Si f no es analítica, entonces el radio de convergencia tendra por radio $R = |z_1 - z_0|$, con z_1 la singularidad más cercana a z_0.

Teorema sobre la unicidad de la serie: Si una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos interiores de alguna circunferencia $|z - z_0| = R$, entonces es el desarrollo en serie de Taylor de $f(z)$ en potencias de $z - z_0$.

Corolario: Si existen constantes a_n tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

para todos los puntos z interiores a alguna circunferencia centrada en z_0, entonces esta serie de potencia ha de ser la correspondiente serie de Taylor.

Propiedad: Las series de Taylor pueden derivarse término a término.

Teorema. Serie de Maclaurin: La serie de potencia de Taylor de f para $z_0 = 0$ se denomina serie de Maclaurin,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n$$

con $|z| < R_0$.

Ejemplos:

- La función

  $$f(z) = e^z$$

  es entera, con $f^{(n)} = e^z$ y $f^{(n)}(0) = 1$. Luego, su serie de Marclaurin resulta

  $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

  con radio de convergencia infinito $|z| < \infty$.

- La función

  $$f(z) = \sin z$$

  también es entera, por lo que tiene radio de convergencia infinito, con $f^{(2n)}(0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, para $n = 0, 1, \cdots$. Luego

  $$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

  con $|z| < \infty$.

- Serie geométrica

  $$f(z) = \frac{1}{1-z}\,,$$

no es analítica en $z = 1$, por lo que su radio de convergencia será $R_0 = 1$. Los coeficientes resultan,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{(n+1)}}$$
$$f^{(n)}(0) = n!$$

Luego, su serie de Maclauren es

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

con $|z| < 1$.

Ejemplos derivados de los ejemplos anteriores:

- Sea

$$f(z) = e^{z^2}$$

Dado que la composición de funciones analíticas es analítica (en este caso las funciones son z^2 y e^z), podemos obtener la serie de Maclauren a partir de la serie e^z con la substitución z^2, con el mismo radio de convergencia.

Actividad 20: escribirla

- Sea

$$f(z) = \cos z$$

Dado que la series de Taylor pueden derivarse término a término, podemos obtener la serie del $\cos z$ derivando término a término la serie del $\sin z$.

Actividad 21: escribir la serie y hallar el radio de convergencia.

- Sea

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

Se puede obtener de la serie geométrica con la substitución $z \to -z$.

Actividad 22: escribir la serie y hallar el radio de convergencia.

- La serie de Taylor de la función

$$\frac{1}{z}$$

alrededor de $z_0 = 1$, se puede obtener de la serie geométrica con la substitución $z \to 1-z$.

Actividad 23: escribir la serie y mostrar que el radio de convergencia es $|z-1| < 1$.

Actividad 24: Usando la serie geométrica expresar la siguiente función

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3}$$

en potencias de z para $|z| < 1$.
Rta.: Notemos que $f(z)$ no es analítica en $z = 0$, por lo que no podemos aplicar el teorema de Taylor. De todos modos vamos a proceder usando la expansión de series geométricas y ver a que nos lleva (esto sirve como motivación para introducir series alrededor de puntos no analíticos).
Desarrollemos,

$$\begin{aligned}
\frac{1+2z}{z^2+z^3} &= \frac{1}{z^2}\left(\frac{1+2z}{1+z}\right) = \frac{1}{z^2}\left[\frac{(1+z)+z}{1+z}\right] \\
&= \frac{1}{z^2}\left(1+\frac{z}{1+z}\right) \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1+z\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n\right] = \frac{1}{z^2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, z^{n-1} \\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1+z-z^2+\cdots
\end{aligned}$$

para $0 < |z| < 1$.

3.2.4 Series de Laurent

Si un función f no es analítica en z_0, no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. Sin embargo, en ocasiones es posible obtener una serie que incluye potencias negativas (como en el de desarrollo de $f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3}$), esto es, términos con $(z-z_0)^{-n}$ con $n > 0$.

Teorema. Serie de Laurent: sea $f(z)$ analítica en un dominio anular $R_1 < |z-z_0| < R_2$, centrado en z_0, y sea C un contorno arbitrario simple cerrado positivamente orientado alrededor de z_0 y contenido en el dominio anular (ver Fig. 3.10). Entonces, en cada punto del dominio, $f(z)$ tiene la siguiente representación en serie, denominada **serie de Laurent**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

con z en $R_1 < |z-z_0| < R_2$; donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$; y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$$

con $n = 1, 2, \cdots$

Si f no es analítica en z_0 pero lo es en el disco $|z-z_0| < R_2$, el radio R_1 puede hacerse arbitrariamente pequeño. Luego, el desarrollo en serie es válido en el disco punteado (agujereado) $0 < |z-z_0| < R_2$. En forma similar, si f es analítica en cada punto de un plano finito exterior a un círculo $|z-z_0| = R_1$, la condición de validez is $R_1 < |z-z_0| < \infty$.

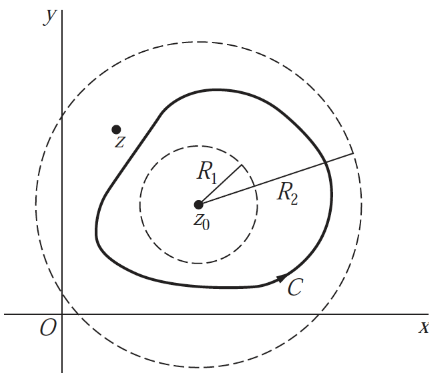


Figure 3.10:

Definición de parte principal: La parte de la serie formada por las potencias negativas de $z - z_0$ se denomina *parte principal* de f en z_0.

Actividad 25: Mostrar que la serie de Laurent se reduce a la serie de Taylor cuando f es analítica $|z - z_0| < R_2$.
Rta.: Veamos primero que $b_n = 0$. Reescribimos b_n como

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz \end{aligned}$$

con $n = 1, 2, \cdots$. Luego, dado que $f(z)$ es analítica en $|z - z_0| < R_2$, también lo es en C y en su interior. Además, $f(z)(z - z_0)^{n-1}$ también es analítica pues el integrando es analítico para $n > 1$, luego,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)(z-z_0)^{n-1}dz = 0$$

Para los coeficientes a_n tenemos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

con $n = 0, 1, 2, \cdots$. Dado que $f(z)$ es analítica en $|z - z_0| < R_2$, también lo es en C y en su interior, luego usando la expresión de Cauchy para las derivadas de funciones analíticas, escribimos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

que son los coeficientes de la serie de Taylor centrada en z_0,

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

Teorema. Sobre la unicidad de las series con potencias negativas: Si una serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos de una corona centrada en z_0, entonces es el desarrollo en serie de Laurent de f en potencias de $z - z_0$ para ese dominio.

Actividad 26: Calcular la series de Laurent para las siguientes funciones:

- Sea
$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$
para $0 < |z| < \infty$.
Rta.: Usando el desarrollo del seno tenemos
$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdots$$

- Sea
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$
para $0 < |z-1| < 1$.
Rta.: Reordenando los términos y usando la serie geométrica resulta,
$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)} &= \frac{1}{(1-1+z)(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \cdots\end{aligned}$$

Chapter 4

Residuos y Aplicaciones

Modificado: 2023.12.18

Contenido: Ceros y singularidades. Teorema de los residuos. Extensión analítica. Enunciados de los teoremas de Riemann y Weierstrass. Uso de los residuos para el cálculo de integrales. *Apéndice:* Principio del argumento y teorema de Rouché.

Fuentes: (i) R. V. Churchill, J. W. Brown. Variable compleja y aplicaciones. 4ta Edición. McGraw-Hill. Boston (1988). Capítulo 5(Sec. 53); Capítulo 6; Capítulo 12(Sec. 102-109). (ii) D. G. Zill, P. D. Shanahan. A First Course in Complex Analysis with Applications. Jones and Bartlett Publishers (2003). Capítulo 6.

Dedicación: cuatro (4) clases.

4.1 Residuos

El teorema de Cauchy-Gousart nos dice que si una función es analítica sobre todos los puntos de un contorno C y en su interior, el valor de la integral a lo largo del contorno es cero. En este capítulo analizaremos casos cuando la función deja de ser analítica en un número finito de puntos en el interior de C.

Recordemos el concepto de Singularidad: Un punto z_0 se denomina punto singular de una función f si f no es analítica en z_0 pero sí lo es en algún punto de cada entorno de z_0.

Ejemplos:

- El punto $z_0 = 0$ es singularidad de $1/z$ y $\log z$.
- Cada punto del semieje real negativo es singularidad de $\text{Log } z$.

Singularidad aislada: Un punto singular se denomina singularidad aislada si existe un entorno de z_0 en el que f es analítica salvo z_0.

Ejemplos:

- $z = 0$ es singularidad aislada de

$$\frac{1}{z}\,.$$

- $z = 0$, $\pm i$ son singularidades aisladas de

$$\frac{z+1}{z^3(z^2+1)}\,.$$

- $z = 0$ no es singularidad aislada de

$$\mathrm{Log\,z}\,,$$

  porque es un punto rama.

- $z = 1/n$ son singularidades aisladas de

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}\,,$$

  $\frac{1}{\sin n\pi} : \{\ldots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$.

- $z = 0$ no es singularidad aislada de

$$\frac{1}{\sin(\pi/z)}\,,$$

  porque es un punto de acumulación.

Serie alrededor de una singularidad aislada: Cuando z_0 es una singularidad aislada de f, existe $R_1 > 0$ tal que f es analítica en todo punto z, $0 < |z - z_0| < R_1$. Luego, f está representada por una serie de Laurent,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

con $0 < |z - z_0| < R_1$ y a_n y b_n dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$$

donde C es un arco cerrado simple positivamente orientado alrededor de z_0 y contenido en el dominio $0 < |z - z_0| < R_1$.

Observación: Notemos, que para $n = 1$, el coeficiente b_1 da información de la integral de f en C

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\, b_1$$

Luego, conocer b_1 permitiría calcular la integral $\int_C f(z)dz$, donde b_1 debería obtenerse de un modo independiente.

Definición de residuo: El número b_1 en la serie de Laurent de f se denomina **residuo** de f en la singularidad z_0.

Actividad 1: Calcular la integral

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}dz\,,$$

con C orientado positivamente, definido por $|z|=2$.
Rta.:

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\, b_1 \quad \text{con} \quad f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,,$$

luego, $z=1$ es singularidad aislada de f.
Se trata de hallar un desarrollo en serie alrededor de $z_0 = 1$.
Reescribimos la exponencial

$$e^{-1}e^{-(z-1)}$$

y reemplazamos $z \to -(z-1)$ en la serie de e^z:

$$e^{-(z-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-(z-1)]^n}{n!}\,.$$

Luego

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{-1}}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(z-1)]^n}{n!} \\ &= e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\frac{(z-1)^{n-2}}{n!} \end{aligned}$$

Resultando

$$b_1 = e^{-1}\frac{-1}{1!} = -\frac{1}{e^1}\,,$$

entonces

$$\int_C f(z)dz = -\frac{2\pi}{e}i\,.$$

4.1.1 Sobre funciones con múltiples singularidades

Si una función f tiene sólo un número finito de puntos singulares dentro de un contorno C dado, tales singularidades han de ser aisladas. Consideremos los puntos singulares de la Fig. 4.1. Generemos un contorno múltiplemente conexo, comenzando desde algún punto de C, recorriéndolo en sentido (positivo) antihorario y rodeando cada z_j con un contorno $\tilde{C}_j$, el cual tiene circulación negativa (sentido horario). Existe un par de contornos paralelos que van de C a cada $\tilde{C}_j$, de modo que la circulación de C es positiva.

Ahora apliquemos el teorema de Cauchy-Goursat a este contorno. Las contribuciones paralelas se cancelan mutuamente ya que $\int_{-L} = -\int_L$, mientras la suma de todos los contornos da que la integral es nula porque no encierran ninguna singularidad:

$$\int_C f(z)dz + \int_{\tilde{C}_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\tilde{C}_n} f(z)dz = 0$$

con C en sentido positivo y $\tilde{C}_j$ negativo.

Siendo que $\tilde{C}_j$ y C_j se recorren en sentido opuesto, $\int_{\tilde{C}_j} f(z)dz = -\int_{C_j} f(z)dz$, luego

$$\int_C f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - \cdots - \int_{C_n} f(z)dz = 0$$

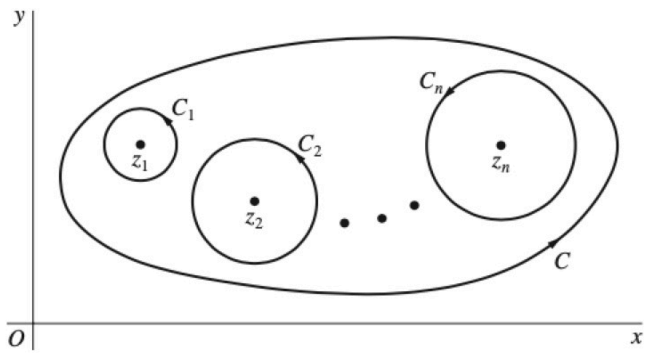


Figure 4.1:

con

$$\int_{C_j} f(z)dz = 2\pi\, i B_j\,,$$

donde B_j se corresponde con el coeficiente b_1 en la definición de residuos, para el contorno C_j. Luego, podemos plantear el siguiente teorema.

Integral de funciones con múltiples singularidades. Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y su interior salvo en un número finito de singularidades $z_1, z_2, \cdots, z_n$ en el interior de C. Si $B_1, B_2, \cdots, B_n$ son los residuos de f en tales singularidades, entonces,

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\, i\,(B_1 + B_2 + \cdots + B_n)$$

Actividad 2: Calcular la integral

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz\,,$$

con C definido por $|z| = 2$ orientado positivamente.
Rta.: Las singularidades son $z = 0$ y $z = 1$. Calculemos los residuos correspondientes

- Desarrollo en $z = 0$ válida $0 < |z| < 1$

$$\begin{aligned}\frac{5z-2}{z(z-1)} &= \left(\frac{5z-2}{z}\right)\frac{(-1)}{1-z}\\ &= \frac{5z-2}{z}(-1)(1+z+z^2+\cdots)\\ &= -5\left(1+z+z^2+\cdots\right) + 2\left(\frac{1}{z}+1+z+\cdots\right)\end{aligned}$$

Luego, $B_1 = 2$.

- Desarrollo en $z = 1$ válida $|z-1| < 1$

$$\begin{aligned}
\frac{5z-2}{z(z-1)} &= \frac{5z-5+3}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{z(z-1)} = \frac{5(z-1)+3}{[(z-1)+1](z-1)} \\
&= \frac{5(z-1)+3}{(z-1)}\left[\frac{1}{1+(z-1)}\right] \\
&= \frac{5(z-1)+3}{(z-1)}[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots] \\
&= 5\left[1-(z-1)+(z-1)^2-\cdots\right]+3\left[\frac{1}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+\cdots\right]
\end{aligned}$$

Luego, $B_2 = 3$.

Entonces

$$\int_C \frac{5z-2}{z(z-1)}dz = 2\pi i(2+3) = 10\pi\, i$$

4.1.2 Ceros y clasificación de las singularidades aisladas

Clasificación de los ceros de las funciones analíticas

Si f es una función analítica en z_0, existe un disco de radio R centrado en z_0 en cuyo interior f está representada por una serie de Taylor,

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

con $|z-z_0| < R$, $a_0 = f(z_0)$, y $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$.

Si $f(z_0) = 0$, entonces $a_0 = 0$; si, además $f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)} = 0$, con $f^{(m)} \neq 0$, se puede escribir

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z-z_0)^n\,,$$

con $|z-z_0| < R$, $a_m \neq 0$, y g analítica.

Entonces,

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z)\,,$$

con z_0 un **cero de orden m** de $f(z)$.

Existe un entorno de z_0 en el que no hay otros ceros de f, a menos que f sea idénticamente nula. Esto es, los ceros de una función analítica no idénticamente nula son aislados.

Clasificación de las singularidades aisladas

Si f tiene una singularidad aislada en z_0 entonces f admite un desarrollo en serie de Laurent en el dominio $0 < |z-z_0| < R$. Anteriormente hemos denominado *parte principal* de f la parte de la serie con potencias negativas. Usaremos la parte principal de f para clasificar los tres tipos de singularidades aisladas, ha saber:

- Polo de orden m
- Singularidad esencial
- Singularidad evitable

Polo: Si la parte principal de f en z_0 tiene al menos un término no nulo, pero el número de tales términos es finito, existirá un entero positivo m tal que $b_m \neq 0$ y $b_n = 0$ para $n > m$, esto es

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m}$$

Tal singularidad se la denomina **polo de orden m**. Donde, no necesariament todos los $b_{n<m}$ son no nulos (como parece indicar nuestra expresión de arriba).

Observación: Un polo de orden unidad $m = 1$ se denomina **polo simple**.

Ejemplos:

- La función

  $$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2}$$

  con $0 < |z - 2| < \infty$, tiene a $z_0 = 2$ por polo de orden uno o polo simple.
  Veamos...

  $$\begin{aligned} f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} &= z + \frac{3}{z - 2} \\ &= 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2} \end{aligned}$$

- La función

  $$f(z) = \frac{\sinh z}{z^4}$$

  tiene un polo de orden 3 en $z = 0$.
  Veamos...

  $$\begin{aligned} f(z) = \frac{\sinh z}{z^4} &= \frac{-i\ \sin(iz)}{z^4} \\ &= \frac{1}{z^4}(-i) \sum_{n=0} (-1)^n \frac{(iz)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} \sum_{n=0} \frac{z^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0} \frac{z^{(2n-3)}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

  donde hemos usado $i^{(2n+1)} = (i)(-1)^n$.

Singularidad esencial: Cuando la parte principal de f en z_0 tiene un número infinito de términos no nulos, el punto se denomina *singularidad esencial*.

Ejemplo: La función $e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$, pues

$$e^{1/z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n}$$

Singularidad evitable: Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en una singularidad aislada z_0 son cero, el punto z_0 se denomina *singularidad evitable* de f.

Notar que el residuo en una singularidad evitable es cero.

Una función f con una singularidad evitable puede hacerse analítica, definiendo que su valor es a_0 (coeficiente de la serie) en la singularidad z_0. Veamos el siguiente ejemplo.

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & z \neq 0 \\ 1 & z = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

En forma de serie sería,

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}(-1)^n \frac{(z)^{(2n+1)}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z}\left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right] \\ &= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \cdots , \end{aligned}$$

donde $a_0 = 1$ en la serie entre corchetes.

Resumen de las singularidades: La Tabla 4.1 resume las singularidades definidas arriba.

$z = z_0$	**Serie de Laurent para** $0 < \lvert z - z_0 \rvert < R$
Singularidad evitable	$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots$
Polo de orden m	$\frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Polo simple	$\frac{b_1}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$
Singularidad esencial	$\cdots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m} + \cdots + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$

Table 4.1: Fuente: libro Zill & Shanahan.

4.1.3 Formas prácticas de calcular residuos

Polo simple

Sea $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0} ,$$

con $\phi(z)$ analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Usando el desarrollo de Taylor de $\phi(z)$, para $|z - z_0| < R$, resulta que $\phi(z_0)$ es el residuo de $f(z)$.

Veamos...

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z)}{z-z_0} \\ &= \frac{1}{z-z_0}\left[\phi(z_0)+\phi'(z_0)\frac{(z-z_0)^1}{1!}+\phi^{(2)}(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!}+\cdots\right] \\ &= \frac{\phi(z_0)}{z-z_0}+\phi'(z_0)+\phi''(z_0)\frac{(z-z_0)}{2!}+\cdots \end{aligned}$$

Luego,

$$b_1 = \phi(z_0)\,.$$

Actividad 3: Hallar los polos de $f(z) = (z+1)/(z^2+9)$ y calcular el residuo correspondiente.
Rta.: La función

$$f(z) = \frac{(z+1)}{z^2+9}$$

tiene polos en $z = \pm 3i$.
Calculemos el residuo en $z = 3i$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z+1)}{(z+3i)(z-3i)} = \frac{\frac{(z+1)}{(z+3i)}}{(z-3i)} \\ &= \frac{\phi(z)}{z-3i} \end{aligned}$$

con

$$\phi(z) = \frac{(z+1)}{(z+3i)}$$

luego,

$$\begin{aligned} b_1 = \phi(3i) &= \frac{3i+1}{6i} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{6}i \end{aligned}$$

Pendiente: Cálculo del residuo en $z = -3i$.

Polo de orden m

Sea $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}\,,$$

con $m = 2, 3, \cdots$ con $\phi(z)$ analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Usando, como antes, el desarrollo de Taylor de $\phi(z)$, para $|z-z_0| < R$, resulta que

$$b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

es el residuo de $f(z)$, donde $\phi^{(m-1)}$ representa la derivada $m-1$-ésima evaluada en z_0.

Veamos...

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}$$

$$=_1 \frac{1}{(z-z_0)^m}\left[\phi(z_0) + \phi'(z_0)\frac{(z-z_0)^1}{1!} + \cdots + \phi^{(m-1)}(z_0)\frac{(z-z_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \phi^{(m)}(z_0)\frac{(z-z_0)^m}{m!} + \cdots\right]$$

$$=_2 \frac{\phi(z_0)}{(z-z_0)^m} + \phi'(z_0)\frac{(z-z_0)^1}{(z-z_0)^m} + \cdots + \phi^{(m-1)}(z_0)\frac{(z-z_0)^{m-1}}{(m-1)!(z-z_0)^m} + \phi^{(m)}(z_0)\frac{(z-z_0)^m}{m!(z-z_0)^m} + \cdots$$

$$=_3 \frac{\phi(z_0)}{(z-z_0)^m} + \phi'(z_0)\frac{1}{(z-z_0)^{(m-1)}} + \cdots + \phi^{(m-1)}(z_0)\frac{1}{(m-1)!(z-z_0)} + \phi^{(m)}(z_0)\frac{1}{m!} + \cdots (pp)$$

donde $\cdots (pp)$ indica que siguen potencias positivas de $z - z_0$.

Luego,

$$b_1 = \frac{1}{(m-1)!}\phi^{(m-1)}(z_0)\,.$$

Actividad 4: Calcular el residuo de $f(z) = (z^3+2z)/(z-i)^3$ en $z = i$,
Rta.:

$$f(z) = \frac{z^3+2z}{(z-i)^3}$$
$$= \frac{\phi(z)}{(z-i)^3}$$

con

$$\phi(z) = z^3 + 2z$$

y $\phi(i) \neq 0$. Luego

$$m = 3$$
$$\phi^{(2)}(z) = 6z$$

y

$$b_1 = \frac{\phi^{(2)}(i)}{2!} = \frac{6i}{2!}$$
$$= 3i$$

Observación: Si una función f tiene un polo en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ puede ser siempre escrita en la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}\,,$$

con $m = 1, 2, 3, \cdots$.

Cálculo de residuos usando límite

- **Polo simple:**

$$Res(f(z), z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

- **Polo de orden** m**:**

$$Res(f(z), z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}}(z-z_0)^m f(z)$$

Actividad 5: Pensar cuál es el efecto de factor $(z - z_0)$ y $(z - z_0)^m$.

Actividad 6: Verificar que los límites se reducen a los resultados anteriores.

Cálculo de residuos a través de cociente de funciones

Consideremos una función $f(z)$ de la forma

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\,,$$

con p y q analíticas en z_0.

Relación entre ceros y polos: Para $f(z)$ definida arriba, el punto z_0 es una *singularidad aislada* de f si y sólo si z_0 es un *cero* de q ($q(z_0) = 0$). Recordar que también vimos que si z_0 es un cero de una función analítica, entonces existe un entorno en el que no existen otros ceros, lo que hace que la singularidad sea aislada.

Determinación del residuo cuando el denominador tiene un cero de orden m: Supongamos que p y q son analíticas en z_0, con $p(z_0) \neq 0$ y $q(z)$ tiene un cero de orden m en z_0,

$$q(z) = (z - z_0)^m r(z)\,,$$

con $r(z)$ analítica en z_0 y $r(z_0) \neq 0$. Luego,

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} &= \frac{p(z)}{(z - z_0)^m r(z)} \\ &= \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \end{aligned}$$

con

$$\phi(z) = \frac{p(z)}{r(z)}\,,$$

de modo que $\phi(z)$ es analítico en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. En consecuencia $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 y las fórmulas anteriores pueden usarse para calcular el residuo.

Residuo para $m = 1$ Si

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}\,,$$

con $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, y $q'(z_0) \neq 0$, el punto z_0 es un polo de f con residuo

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Veamos: siendo un cero simple escribimos

$$q(z) = (z - z_0) r(z)\,,$$

luego,

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)}\,,$$

con
$$\phi(z) = \frac{p(z)}{r(z)}\,.$$
.

Además, sabemos que para un polo simple
$$\begin{aligned} b_1 &= \phi(z_0) \\ &= \frac{p(z_0)}{r(z_0)}\,. \end{aligned}$$
Derivando $q(z) = (z - z_0)r(z)$, tenemos
$$q'(z) = r(z) + (z - z_0)r'(z)$$
entonces
$$q'(z_0) = r(z_0) + (z_0 - z_0)r'(z_0) \to q'(z_0) = r(z_0)\,.$$
Finalmente, reemplazando
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{p(z_0)}{r(z_0)} \\ &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}\,. \end{aligned}$$

Derivación alternativa: Podemos calcular b_1 en forma más directa considerando al residuo como el
$$\lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = b_1\,.$$
Lo cual es práctico pero posiblemente no riguroso. En el caso anterior tendríamos,
$$\begin{aligned} b_1 &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) \\ &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z\to z_0} \frac{p(z)}{\frac{q(z)}{z-z_0}} \\ &= \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \end{aligned}$$

4.1.4 Prolongación analítica

El comportamiento analítico de una función analítica en un dominio está determinado por su comportamiento en un conjunto más pequeño incluído en tal conjunto. En esta sección también definiremos la extensión analítica de una función a variable compleja.

Condiciones bajo las que $f = 0$: Si una función f es analítica en un dominio D y $f(z) = 0$ en cada punto z de un dominio o un arco contenido en D, entonces $f(z) = 0$ en todo punto de D.

Determinación de funciones: Un función analítica en un dominio D está unívocamente determina por sus valores en cualquier dominio o arco interior a D.
Ejemplo 1: La función e^z es la única función entera que toma los valores e^x en un segmento del eje real.
Ejemplo 2: En el apéndice A.3 se da un ejemplo más elaborado.

Funciones constantes: Si una función f es analítica y no constante en un dominio D, entonces no es constante en ningún entorno contenido en D.

Extensión analítica: Dados dos dominios D_1 y D_2 con puntos en común y una función f, analítica en D_1, puede que exista una función f_2 analítica en D_2 tal que $f_2 = f_1$ en cada z de la intersección $D_1 \cap D_2$. f_2 constituye la **prolongación analítica** de f_1 al dominio D_2, ver Fig. 4.2. Por otro lado, la siguiente función F es analítica en la unión $D_1 \cup D_2$,

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & z \in D_1 \\ f_2(z) & z \in D_2 \end{cases}$$

Ejemplo: Consideremos la función

$$f(x) = \sqrt{1+x}\,.$$

Su desarrollo en Taylor alrededor de cero tiene la siguiente expresión (verificarlo),

$$f(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \cdots\,.$$

Su radio de convergencia es la unidad debido al corte en el semieje real negativo a partir de -1. Definimos la función $f_1(z)$ truncando la serie a orden 2,

$$f_1(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8}\,.$$

Las series de Padde es una forma alternativa de expandir funciones mediante polinomios racionales de la forma $f(x) = P(x)/Q(x)$. Tomando primer orden para ambos polinomios se obtiene la siguiente expansión de f,

$$f_2(z) = \frac{4+3z}{4+z}\,.$$

Esta función es singular en $z = -4$, por lo que su radio de convergencia extiende la de la serie de Taylor. De este modo $f_2(z)$ es la extensión analítica de $f_1(z)$. Dado el caracter de serie las funciones no coinciden como establecimos en la definición de extensión analítica. La Tabla **??** compara algunos valores (notar el uso/abuso de la serie de Taylor más allá de su rango de definición).

z	$\sqrt{1+z}$	$f_2(z)$	$f_1(z)$
-0.5	0.707	0.719	0.714
0.5	1.225	1.219	1.222
1.0	1.414	1.375	1.4
2.0	1.732	1.5	1.667
3.0	2.0	1.375	1.857

Table 4.2: Aproximaciones de $\sqrt{1+z}$ por Taylor y Padee.

Actividad 7: (i) Verificar la serie de Taylor y agregarle un término. (ii) Justificar el corte rama del que se habla. (iii) Comparar valores como en la tabla para algunos números complejos.

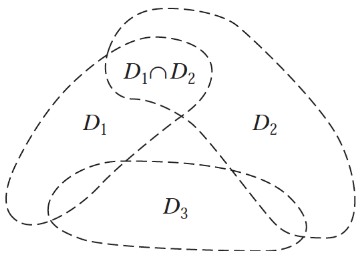


Figure 4.2:

Principio de reflexión: Sea f una función analítica en un dominio D que contiene un segmento del eje x y que es simétrico respecto a tal eje (se refiere a que el dominio es simétrico respecto a x). Si $f(x)$ es real en cada punto x del segmento, entonces,

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$$

para todo z de D.

Luego, $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, con, digamos $z \in \mathcal{C}^+$ y $\bar{z} \in \mathcal{C}^-$.
Ejemplo: Sea $f(z) = e^z = e^{x+iy}$. Luego, $f(\bar{z}) = e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = \overline{e^{x+iy}} = \overline{f(z)}$.

Actividad 8: Investigar que propiedades tiene la parte real de f. Ídem para $v(x, y)$.
Rta.: $u(v)$ es par(impar) en la variable y.

4.1.5 Comportamiento en la vecindad de puntos singulares y ceros

Sobre la vecindad de un polo: Dado un polo z_0 de cualquier orden de f, entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty\,,$$

esto es, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$. Luego, habrá siempre un entorno de cada polo en que no hay ceros.

Dado que los polos son singularidades aisladas, entonces si z_0 es un polo de una función f, existe un entorno de z_0 en el que no hay ni ceros de f ni otros puntos singulares además de z_0.

Relación entre polos y ceros: Si z_0 es un polo de orden m de una función $f(z)$, entonces z_0 es un cero de orden m de la función

$$\frac{1}{f(z)}\,.$$

Vale también el recíproco que usamos al calcular residuos.

Teorema de Riemann: Si una función f es acotada y analítica en un dominio $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces o f es analítica en z_0 o z_0 es una singularidad evitable de f.

Actividad 9: Pensar el por qué.

El comportamiento de f en un entorno de una singularidad esencial es muy irregular.

Teorema de Picard: El teorema de Picard enuncia que, en cada entorno de una singularidad esencial la función toma cualquier valor prefijado un número infinito de veces con, a lo sumo, una única excepción.
Ejemplo: La función

$$f(z) = e^{1/z}\,,$$

con $f(z) = 0$ la excepción.

Actividad 10: Mostrar que $f(z) = e^{1/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y hallar el valor de z tal que $f(z) = e^{1/z} = -1$.
Rta.: Usando el desarrollo en serie de e^z queda explícito que es esencial. El valor de z tal que $f = -1$ resulta ser

$$e^{1/z} = e^w = -1 \Rightarrow e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = -1$$

$$\Rightarrow w = i(2n+1)\pi$$

$$\frac{1}{z} = w \Rightarrow z = \frac{1}{i(2n+1)\pi}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-i}{(2n+1)\pi}$$

$$z_n = \frac{-i}{(2n+1)\pi}$$

con $n = 0, \pm 1, \cdots$.
Luego, para cualquier entorno, sin importar cuan pequeño sea, podemos encontrar infinitas pre-imágenes z_n dentro del intervalo, tal $f(z_n) = -1$. El valor $f(z) = -1$ ocurre infinita veces en una vecindad de $z_0 = 0$, sin importar cuan pequeño es el entorno; al tiempo que no existe z tal que $f(z) = 0$.

Taller: usar algún software simbólico para calcular valores de $f(z) = e^{1/z}$ en un entorno de $z_0 = 0$. Asignarle valores arbitrarios a f y hallar z. Se puede ver que hay infinitos de estos z que dan el mismo valor asignado a f en la vecindad del origen?

Teorema de Weierstrass: Sea z_0 una singularidad esencial de una función f y c un número complejo arbitrario. Entonces para todo número positivo ε la desigualdad

$$|f(z) - c| < \varepsilon$$

se satisface en algún punto z, distinto de z_0, de todo entorno de z_0.

Actividad 11: volviendo al ejemplo del taller, se verifica el teorema de Weierstrass para el ejemplo trabajado?

Número de ceros y polos de f

Sea f una función analítica en el interior de un arco cerrado C y sobre el arco mismo, salvo en un número finito de polos en el interior de C. Supongamos también que f no tiene ceros sobre C y que posee un número finito de ceros en el interior de C. Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N - P\,, \tag{4.2}$$

con C orientado positivamente, N el número total de ceros de f dentro de C, y P el número total de polos de f allí. Un cero de orden(polo) $m_0(m_p)$ es contado $m_0(m_p)$ veces.

Actividad 12: Considerar que f tiene un cero de orden 2, esto es, $N = 2$, $P = 0$. Verificar el teorema.
Rta.: Escribamos $f(z) = (z - z_0)^2 g(z)$ con g analítica,

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-z_0)^2 g(z) \\ f'(z) &= 2(z-z_0)g(z) + (z-z_0)^2 g'(z) \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \frac{2(z-z_0)g(z)}{(z-z_0)^2 g(z))} + \frac{(z-z_0)^2 g'(z)}{(z-z_0)^2 g(z)} \\ &= \frac{2}{(z-z_0)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f'}{f}dz &= \int_C \frac{2}{(z-z_0)}dz + \int_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz \\ &= 2\pi i(2) + 0 \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 2 \end{aligned}$$

Porqué la segunda integral es cero?

Actividad 13: Considerar que f tiene un polo simple, esto es, $N = 0$, $P = 1$. Verificar el teorema.
Rta.: Escribamos $f(z) = g(z)/(z - z_0)$ con g analítica,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{g(z)}{z-z_0} \\ f'(z) &= \frac{g'}{z-z_0} - \frac{g}{(z-z_0)^2} \\ \frac{f'}{f} &= \frac{g'}{z-z_0}\frac{z-z_0}{g} - \frac{g}{(z-z_0)^2}\frac{z-z_0}{g} \\ &= \frac{g'}{g} - \frac{1}{(z-z_0)} \\ \int_C \frac{f'}{f}dz &= \int_C \frac{g'}{g}dz - \int_C \frac{1}{(z-z_0)}dz \\ &= 0 - 2\pi i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -1$$

Actividad 14: Considerar que f tiene un cero z_0 de orden 2 y un polo z_1 de orden uno, esto es, $N = 2$, $P = 1$. Verificar el teorema.
Rta.: Escribamos

$$f(z) = (z - z_0)^2 \frac{g(z)}{z - z_1} \,,$$

con g analítica.

$$\begin{aligned}
f'(z) &= 2(z - z_0)\frac{g(z)}{z - z_1} + (z - z_0)^2 \frac{g'(z)}{z - z_1} + (z - z_0)^2 g(z) \frac{(-1)}{(z - z_1)^2} \\
\frac{f'}{f} &= \frac{2}{z - z_0} + (z - z_0)\frac{g'}{g} - \frac{1}{z - z_1} \\
\int_C \frac{f'}{f} dz &= 2\pi i (2 + 0 - 1) \\
&\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

Teorema de Rouché: El teorema de Rouché permite determinar algunas raices de un problema complicado, reduciéndolo a un más sencillo. En el Apéndice A.4 se enuncia y se muestra una aplicación.

Principio del argumento: En el Apéndice A.6 se enuncia una versión alternativa de la relación (4.2) usando el argumento de $f(z)$.

4.2 Aplicaciones de residuos

Las secciones que siguen muestran cómo calcular cierta clase de integrales del análisis real mediante las técnicas del análisis complejo.

Nociones sobre integrales impropias: En el Apéndice A.7 se repasan algunas nociones de integrales impropias del análisis a variable real.

4.2.1 Integrales con integrandos racionales

Supongamos que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}\,,$$

con $p(x)$ y $q(x)$ polinomios reales en la variable real x. Las funciones p y q no tienen raíces en comunes y $q(x)$ no posee ceros reales. Cuando la integral converge, su valor puede calcularse *hallando su valor principal y aplicando el teorema de los residuos*. Mostraremos la técnica con el siguiente ejemplo.

Ejemplo ilustrativo: Calcular la integral

$$\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx$$

- Reescribimos la integral usando el hecho que el integrando es par,

$$\int_0^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx\,,$$

- Sustituimos $x \to z$, con z complejo

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$

- Factorizamos el denominador, $z = \pm i,\ \pm 2i$

$$f(z) = \frac{2z^2-1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)} = \frac{2z^2-1}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

- Construimos la integral

$$\int_C f(z)dz = \int_L f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz$$

  con el contorno $C = L + C_R$ como se muestra en la Fig. 4.3, de modo de incluir todas las singularidades en el semiplano superior o inferior.

- Parametrizamos cada contorno:
  - $L : z = x$, $dz = dx$
  - $C_R : z = Re^{i\theta}$, $dz = i\,Re^{i\theta}d\theta$

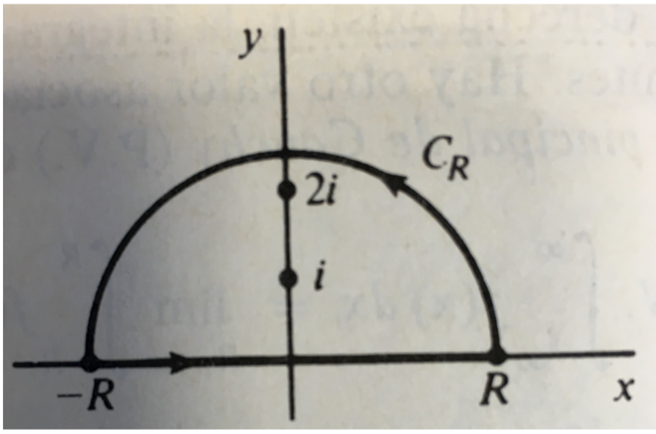


Figure 4.3:

- Notar que la integral sobre L se reduce a la integral de interés cuando $R \to \infty$.
- Calculamos los residuos en $z_1 = i$, $z_2 = 2i$:
  - $B_1 = \frac{-1}{2i}$
  - $B_2 = \frac{3}{4i}$

  Donde hemos usado

$$B_i = \phi(z_i)$$
$$f(z) = \frac{\phi}{z - z_0}$$

- Aplicamos el teorema de los residuos a la integral $\int_C f(z)dz$:

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi\, i(B_1 + B_2) = \frac{\pi}{2}$$

- Resta mostrar que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$$

  - Acotamos el polinomio del numerador:

$$|2z^2 - 1| \leq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

  - Acotamos el polinomio del denominador:

$$|(z^2 + 1)(z^2 + 4)| \geq (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 4) = (R^2 - 1)(R^2 - 4)$$

  - Luego

$$|f(z)| = \left|\frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4}\right| \leq \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

  - entonces

$$|\int_{C_R} f(z)dz| \leq ML$$

    con

$$M = \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$
$$L = \pi R$$

- Finalmente, resulta

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 0\,,$$

dado que

$$\lim_{R\to\infty} ML = 0$$

- Así resulta

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx = \frac{\pi}{2}$$

Entonces,

$$\int_0^{\infty}\frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4}dx = \frac{\pi}{4}$$

Notar que, para este ejemplo, al acotar, en el numerador se genera un polinomio con un orden mayor que el de p. La razón final resultó que el polinomio del denominador tenía un orden original en R. Para que en el límite de R infinito, la razón se anule, se necesita, entonces, que el orden del polinomio $q(x)$ sea, al menos, dos órdenes mayor que el orden de $p(x)$.

4.2.2 Integrales impropias con seno o coseno

Integrales impropias convergentes de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin x\,dx \qquad\qquad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos x\,dx$$

pueden ser combinadas de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}e^{i\,x}\,dx$$

Luego, promoviendo la variable real x a compleja z, construimos una integral que se resuelve, al estilo, del caso anterior, mediante la construcción de un contorno cerrado y aplicando el teorema de los residuos.

Un nuevo elemento se agrega a esta clase de integrales y es la acotación de la exponencial compleja e^{iz}. Si uno toma el contorno en el semiplano superior resulta $z = x + i\,y$, $e^{iz} = e^{ix}e^{-y}$, lo que da un término de decaimiento en el integrando y por ende se espera que la integral resulte acotada.

Veamos los detalles considerando dos ejemplos:

- *Ejemplo 1:* la razón de p/q satisface la condición enunciada en el caso anterior, esto es, q es al menos dos órdenes mayor que p.

- *Ejemplo 2:* la condición del ejemplo 1 no se satisface. Es bajo estas condiciones donde debemos analizar el comportamiento del integrando e^{-y}.

Ejemplo 1: Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Construimos la integral compleja

$$\int_C\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dx\,,$$

con C un contorno como el del ejercicio anterior.

Luego calculamos el residuo B_1 en el polo de orden dos en $z = i$, resultando,

$$B_1 = \phi'(i) = \frac{-i}{2e}\,,$$

donde hemos usado,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z)}{(z-i)^2} \\ \phi(z) &= \frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \end{aligned}$$

Parametrizando la curva L con $z = x$ resulta,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{(x^2+1)^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz = 2\pi\, i B_1 = \frac{\pi}{e}$$

La parte real da,

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e} - Re \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz$$

Tomando el límite R a infinito y usando el hecho que el integrando es par, resulta que el término de la izquierda es la integral requerida.

Queda por mostrar que la integral sobre el contorno semicircular se anula en el límite de R infinito. Veamos,

$$\begin{aligned} \left| Re \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz \right| &\leq \left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\, dz \right| \\ &\leq \frac{|e^{iz}|}{|z^2+1|^2}\, \pi R \\ &\leq \frac{\pi R}{(R^2-1)^2} \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\begin{aligned} |e^{-y}| &\leq 1 \\ |z^2+1| &\geq R^2 - 1 \\ L &= \pi R \end{aligned}$$

Luego, en el $\lim_{R\to\infty}$ resulta,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

Ejemplo 2: Calcular el valor principal de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin(x)}{x^2+2x+2}\, dx$$

Notemos que el integrando es par por lo que vale calcular el valor principal. Generamos el integrando con e^{iz}, factorizamos el polinomio, integramos y al final tomamos la parte imaginaria de la integral.

Tomamos un contorno como en los dos casos anteriores,

$$\int_C \frac{z\,e^{iz}}{z^2+2z+2}\,dz = \int_C \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$$

con $z_{1,2} = 1 \pm i$. Luego,

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\,e^{ix}}{(x^2+2x+2)^2}\,dx + \int_{C_R} \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz = 2\pi\,iB_1$$

donde

$$\begin{aligned} 2\pi\,iB_1 = 2\pi\,i\frac{z_1\,e^{iz_1}}{z_1-z_2} &= \pi(1+i)e^{i-1} \\ &= \pi\,e^{-1}[(\cos 1 - \sin 1) + i\,(\cos 1 + \sin 1)] \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\,\sin x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}(\cos 1 + \sin 1) - Im \int_{C_R} \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$$

Resta acotar la integral de contorno.

$$\begin{aligned} \left| Im \int_{C_R} \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz \right| &\leq \left| \int_{C_R} \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\pi} \frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,(i\,Re^{i\theta})d\theta \right| \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{|z|\,|e^{iz}|}{|z-z_1||z-z_2|}\,R\,d\theta \\ &\leq \int_0^{\pi} \frac{R\,e^{-R\sin\theta}}{(R-\sqrt{2})(R-\sqrt{2})}\,R\,d\theta \end{aligned}$$

hemos usado

$$\begin{aligned} z &= Re^{i\theta} \\ e^{iz} &= e^{iRe^{i\theta}} = e^{iR(\cos\theta + i\,\sin\theta)} \\ |z-z'| &\geq |z| - |z'| \\ dz &= i\,Re^{i\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

Notemos que los polinomios del denominador y numerador tienen el mismo orden, por lo que límite no está bien definido. Debemos trabajar explícitamente el integrando

$$e^{-y} = e^{-R\sin\theta}$$

Acotación de la integral en θ: Mostremos la siguiente desigualdad, denominada *desigualdad de Jordan*

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \leq \frac{\pi}{R}$$

Luego, esta integral da una potencia extra de R en el denominador que hace que la integral se anule en el límite.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta}\,d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R\cos\theta}\,d\theta \end{aligned}$$

donde, para el segundo sumando hemos usado la transformación

$$\theta' = \theta - \frac{\pi}{2}$$
$$\sin(\theta' + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta'$$

El primer integrando puede acotarse usando, ver Fig. 4.4

$$\sin\theta > \frac{2}{\pi}\theta\,,$$

mientras que para el segundo usamos

$$\cos\theta > 1 - \frac{2}{\pi}\theta\,.$$

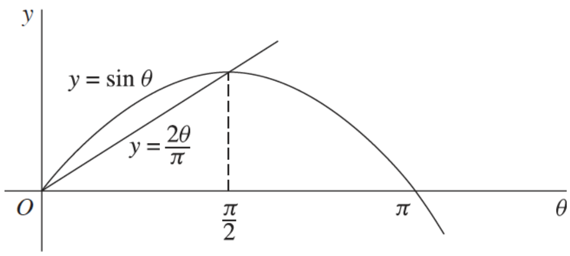


Figure 4.4:

Luego,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta}\,d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}\,d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R\left(1-\frac{2}{\pi}\theta\right)}\,d\theta \\
&= \left.\frac{e^{-R\frac{2}{\pi}\theta}}{-R\frac{2}{\pi}}\right|_0^{\pi/2} + e^{-R}\left.\frac{e^{R\frac{2}{\pi}\theta}}{R\frac{2}{\pi}}\right|_0^{\pi/2} \\
&\leq \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) + \frac{\pi}{2R}e^{-R}\left(e^{R}-1\right) \\
&\leq \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) + \frac{\pi}{2R}\left(1-e^{-R}\right) = \frac{\pi}{R}\left(1-e^{-R}\right) \\
&\leq \frac{\pi}{R}
\end{aligned}$$

Volviendo a la expresión de la integral de contorno,

$$\begin{aligned}
\left| Im\int_{C_R}\frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\right| &\leq \int_0^{\pi}\frac{R\,e^{-R\sin\theta}}{(R-\sqrt{2})(R-\sqrt{2})}\,R\,d\theta \\
&\leq \frac{R^2}{(R-\sqrt{2})^2}\,\frac{\pi}{R}
\end{aligned}$$

luego, en el límite tiende a cero.

Escribimos,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\,\sin x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{e}(\cos 1+\sin 1) - \lim_{R\to\infty} Im\int_{C_R}\frac{z\,e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz$$

Finalmente,

$$PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{\pi}{e}(\cos 1 + \sin 1)$$

Luego,

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,\sin x}{(x^2+2x+2)^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}(\cos 1 + \sin 1)$$

4.2.3 Integrales definidas con sin y/o cos

Integrales definidas de la forma

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

pueden calcularse por el métodos de los residuos usando las definiciones del sin y cos y la parametrización

$$\begin{aligned} z &= e^{i\theta} \\ 0 \leq \theta &\leq 2\pi \\ dz &= i\,e^{i\theta} d\theta \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^{2\pi} F\left(\cos\theta, \sin\theta\right)\,d\theta = \int_C F\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

con C un contorno positivamente orientado, parametrizado por $|z| = 1$ y donde usado las identidades

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{dz}{iz} \\ \cos\theta &= \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \frac{z+z^{-1}}{2} \\ \sin\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z-z^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

Veamos,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{[2+\frac{1}{2}(z+z^{-1})]^2}\left(\frac{dz}{iz}\right) &= \int_C \frac{1}{(2+\frac{z^2+1}{2z})^2}\frac{dz}{iz} \\ &= \frac{4}{i}\int_C \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}dz \\ &= \frac{4}{i}\int_C \frac{z}{[(z-z_1)(z-z_2)]^2}dz \\ &= \frac{4}{i}2\pi\,iB_1 \\ &= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

con

$$
\begin{aligned}
z_1 &= -2-\sqrt{3} \\
z_2 &= -2+\sqrt{3}\,,
\end{aligned}
$$

de modo que sólo z_2 está dentro del círculo unidad y es un polo de orden dos, con

$$
\begin{aligned}
B_1 = \phi'(z_2) &= \frac{1}{6\sqrt{3}} \\
f(z) &= \frac{\phi(z)}{(z-z_2)^2} \\
\phi(z) &= \frac{z}{(z-z_1)^2}
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
\phi'(z) &= \frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{z(-2)}{(z-z_1)^3} \\
&= \frac{1}{(z-z_1)^2}\frac{-z_1-z}{(z-z_1)} \\
\phi'(z_2) &= \frac{-z_1-z_2}{(z_2-z_1)^3} = \frac{4}{(2\sqrt{3})^3} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$
\int_0^{2\pi} \frac{1}{(2+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}
$$

4.2.4 Integral con singularidad en el eje real

Consideremos la situación en que la función $f(x)$ tiene un polo sobre el eje real. En tal caso hace falta usar un contorno como el mostrado en la Fig. 4.5.

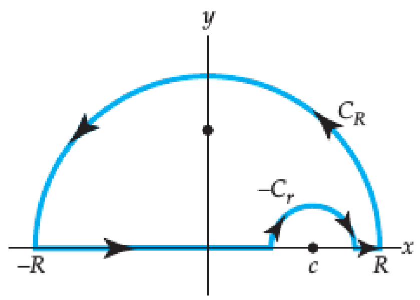


Figure 4.5:

La situación es similar a los casos anteriores con el agregado de un arco evitando la singularidad sobre el eje real y el contorno L está particionado. Luego el contorno C tiene la siguiente partición

$$
C = L_I + (-C_r) + L_D + C_R\,.
$$

Notemos que el contorno C_r está recorrido en sentido negativo (horario). El signo en el contorno C_r es necesario para ser consistente con la circulación.

Para completar los elementos necesarios para resolver este tipo de integrales, enunciemos el siguiente resultado:

Integral de una función con un polo sobre el eje real: Supongamos que f tiene un polo simple en $z = c$ sobre el eje real. Si C_r es un contorno definido por $z = c + re^{i\theta}$, con $0 \leq \theta \leq \pi$ (esto, es con sentido positivo), entonces

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)dz = \pi i B_1$$

con B_1 el residuo en $z = c$.

Veamos: Ver figura 4.6

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} f(z)dz &= \int_{C_r} \left[\frac{B_1}{z-c} + g(z) \right] dz \\
&= \int_{C_r} \left[\frac{B_1}{(c + re^{i\theta}) - c} + g(z) \right] dz \qquad dz = ire^{i\theta} d\theta \\
&= B_1 \int_0^{\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta + \int_0^{\pi} g(z(\theta)) ire^{i\theta} d\theta \\
&= iB_1 \int_0^{\pi} d\theta + \int_0^{\pi} g(c + re^{i\theta}) ire^{i\theta} d\theta
\end{aligned}$$

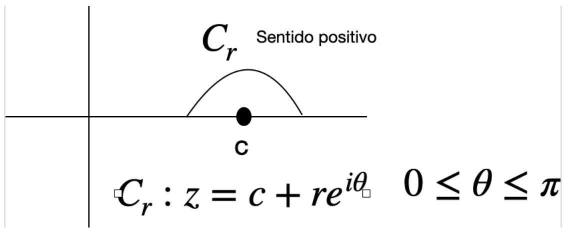


Figure 4.6:

Acotemos la segunda integral:

$$\lim_{r \to 0} \left| \int_0^{\pi} g(z) ire^{i\theta} d\theta \right| < \lim_{r \to 0} M \pi r = 0 \qquad |g(z)| < M$$

Luego,

$$\lim_{r \to 0} \int_{C_r} f(z)dz = \lim_{r \to 0} \int_{C_r} \left[\frac{B_1}{z-c} + g(z) \right] dz = i\pi B_1$$

Ejemplo: Calcular el valor principal de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 - 2x + 2)} dx$$

Consideremos la integral

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z(z^2 - 2z + 2)} dz$$

con C elegida de modo de evitar los polos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$ de $f(z)$, según se muestra en la Fig. 4.7.

Luego, debe ser

$$\int_C = \int_{C_R} + \int_{-R}^{-r} + \int_{-C_r} + \int_r^R = 2\pi i B_2$$

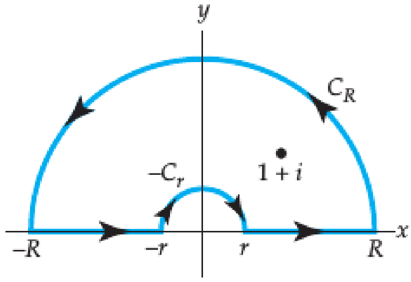


Figure 4.7:

con

$$B_2 = \frac{-e^{-1+i}}{4}(1+i)$$

el residuo en z_2

La integral sobre $-C_r$ contribuye con el término

$$-\pi\, i B_1\,,$$

con $B_1 = \frac{1}{2}$.

Luego, tomando los límites $R \to \infty$ y $r \to 0$, resulta

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx - \pi\, i\, B_1 = 2\pi\, i\, B_2$$

$$\begin{aligned} PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2-2x+2)}dx &= 2\pi\, i\, B_2 + \pi\, i\, B_1 \\ &= 2\pi\, i \frac{(1+i)}{-4}e^{-1+i} + \pi\, i \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La parte imaginaria resulta

$$PV\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2-2x+2)}dx = -\frac{2\pi}{e}(\cos 1 - \sin 1) + \frac{\pi}{2}$$

4.2.5 Integrando con singularidad de corte rama

En el Apéndice A.8 se dan los detalles para calcular integrales cuyos integrandos presentan singularidades no aisladas. Por ejemplo, integrales que involucran la función x^{-a}, presentan un corte en el semieje real positivo, si definimos $z^{-a} = e^{-a\ln z}$ con $\arg z \in (0, 2\pi)$.

Appendix A

Material Complementario

Este apéndice contiene información que complementa o contextualiza conceptos para una mejor comprensión de los temas desarrollados en los capítulos anteriores.
Los temas contenidos en este apéndice no entran en la evaluación del curso.

A.1 Principio del Máximo

Sea f analítica en un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$ y sea C cualquier círculo positivamente orientado alrededor de z_0 contenido en el entorno, esto es, $|z - z_0| = \rho$, con $\rho < \varepsilon$. Sea C parametrizada por $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$. Luego, la integral de Cauchy se reduce a,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\,d\theta$$

Si f es analítica dentro y sobre un círculo dado, su valor en el centro del círculo es la media aritmética (2π es la longitud del arco) de sus valores en el círculo.

Ahora, nos interesa demostrar que $|f(z)| > |f(z_0)|$*:* Para ello, usamos la integral de arriba, para construir la desigualdad

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,d\theta$$

que junto con la *hipótesis* $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para $|z - z_0| < \epsilon$, se llega a que vale la igualdad, esto es, $|f(z)| = |f(z_0)|$. Pero ocurre, que si el módulo de una función analítica es constante en algún dominio, implica que la función es constante en ese dominio. Por lo que la hipótesis $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ es falsa y en su lugar debemos concluir, *para f analítica y no constante en un entorno de un punto z_0, existe al menos un punto z en ese entorno que verifica*

$$|f(z)| > |f(z_0)|$$

Una consecuencia de este resultado es el siguiente *principio de módulo máximo.*

Teorema: Si f es analítica y no constante en un dominio, entonces $|f(z)|$ no alcanza un valor máximo en ese dominio. Esto es, *no existe* un punto z_0 en el dominio tal que

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

para todos los puntos z en él.

Finalmente estamos en condiciones de enunciar el principio del máximo: Si una función $f(z)$ es continua en una región R cerrada y acotada, y $f(z)$ es analítica y no constante en el interior de R, el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en la frontera de R y nunca en el interior.

A.2 Teorema de Liouville

Cuando f es analítica dentro y sobre un círculo C, $|z - z_0| = R$, tomado con orientación positiva, tenemos

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz$$

Denominando M_R al máximo de $|f(z)|$ en el círculo C se tiene

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{n!\, M_R}{R^n}$$

con $n = 1, 2, \cdots$, denominada *desigualdad de Cauchy*.

A partir de esto puede demostrarse que no existen funciones enteras, salvo las constantes, que sean acotadas para todo z, como enunciamos en el teorema de Liouville.

A.3 Propiedades de funciones a partir de un entorno

Sea

$$P(w_1, \cdots, w_n)$$

un polinomio en la n variables w_k, y sean f_k, n funciones analíticas de z en un dominio D que contiene un intervalo $a < x < b$ del eje real. Si sobre ese intervalo las funciones f_n satisfacen la identidad

$$P(f_1(x), \cdots, f_n(x)) = 0\,,$$

entonces

$$P(f_1(z), \cdots, f_n(z)) = 0$$

en todo el dominio D.

Ejemplo: Sea

$$P(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2 - 1\,,$$

y

$$f_1 = \sin z$$
$$f_2 = \cos z$$

Luego, sobre el eje real,

$$P(f_1(x), f_2(x)) = \sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0\,,$$

entonces

$$\sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0$$

de lo cual obtenemos la identidad

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

en todo el plano z.

A.4 Teorema de Rouché

Sean f y g funciones analíticas sobre un arco cerrado simple C y en su interior. Si

$$|f(z)| > |g(z)|$$

en todo punto z de C, las funciones

$$f(z) \quad \text{y} \quad f(z) + g(z)$$

tienen el *mismo número de ceros*, contando sus multiplicidades, en el interior de C.

Actividad 14: Calcular el número de ceros z con $z \leq 1$ de la función

$$h(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1\,.$$

Rta.: Escribamos

$$h(z) = f(z) + g(z)$$

con

$$f(z) = -4z^3$$
$$g(z) = z^7 + z - 1$$

Para z en el círculo C: $|z| = 1$ tenemos

$$|f| = 4$$
$$|g| \leq |z|^7 + |z| + |1| = 3$$

Luego, con esta descomposición de $h(z)$, las funciones f y g satisfacen las condiciones del teorema

$$|f| > |g|\,,$$

luego, f y h tienen el mismo número de ceros en el interior de C.

Como f tiene tres ceros dentro de C, ocurrirá lo mismo con con $h = f+g = z^7 - 4z^3 + z - 1$, entonces,

$$h(z) = z^7 - 4z^3 + z - 1$$

tiene tres raíces en $z \leq 1$.

Pensar: para qué puede servir esta información?

A.5 Relación $\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$

En este apéndice mostramos la propiedad

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz\,.$$

Sea

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,z'(t)\,dt$$

con $a \leq t \leq b$, $z_1 = z(t=a)$ y $z_2 = z(t=b)$.

Luego,

$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_{z_2}^{z_1} f(z)\, dz = \int_b^a f(z(\tau))\, \frac{dz(\tau)}{d\tau}\, d\tau$$

con $b \geq \tau \geq a$, $z_2 = z(\tau = b)$ y $z_1 = z(\tau = a)$.

Sea $\tau = -t$,

$$\int_{-C} f(z)\, dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\, \frac{dz(-t)}{d(-t)}\, d(-t) = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))\, \frac{dz(-t)}{dt}\, dt$$

Notando que $\frac{dz(-t)}{dt} = -z'(-t)$ (ver demostración más abajo) resulta,

$$\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_{-b}^{-a} f(z(-t))\, z'(-t)\, dt$$

Dado que la integral de una función compleja a variable real verifica $\int_{-b}^{-a} g(-t)dt = \int_a^b g(\tau)d\tau$ (ver demostración más abajo) tenemos

$$\int_{-C} f(z)\, dz = -\int_a^b f(z(\tau))\, z'(\tau)\, d\tau = -\int_C f(z)\, dz$$

Veamos que $\frac{dz(-t)}{dt} = -z'(-t)$. Sea $u = -t$,

$$\frac{dz(-t)}{dt} = \frac{dz(u)}{dt} = \frac{dz(u)}{du}\frac{du}{dt} = z'(u)(-1) = -z'(-t)$$

Veamos que $\int_{-b}^{-a} g(-t)dt = \int_a^b g(\tau)d\tau$. Sea $t = -\tau$

$$\int_{-b}^{-a} g(-t)dt = \int_{-b}^{-a} [u(-t) + iv(-t)]dt = \int_b^a [u(\tau) + iv(\tau)]d(-\tau) = \int_a^b g(\tau)d\tau$$

A.6 Principio del argumento

Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y en su interior, salvo quizás en polos interiores a C. Supongamos también que f no tiene ceros en C. La imagen Γ de C bajo la transformación $w = f(z)$ es otro arco cerrado en el plano w, ver Fig. A.1. Como f no tiene ceros sobre C, el arco Γ no pasa por el origen del plano w.

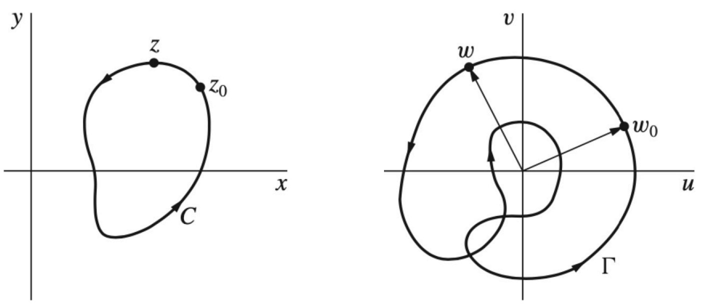


Figure A.1:

Sea w_0 un punto de Γ y ϕ_0 un valor del $\arg w_0$. Recorriendo la curva Γ hasta volver a w_0, resulta que

$$\arg w_0 = \phi_1\,,$$

con $\phi_1 - \phi_0$ un múltiplo (positivo o negativo) de 2π. Dado que $w = f(z)$, entonces

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0 \,,$$

con $\Delta_C \arg f(z)$ denotando la variación del argumento de $f(z)$ cuando z recorre una vuelta el contorno C. En la Fig. A.1 ocurre que que

$$\frac{\phi_1 - \phi_0}{2\pi} = 0 \,,$$

porque hay una contribución $+1$ (contorno exterior) y otra -1 (contorno interior). *Como regla general:* el valor de

$$\Delta_C \arg f(z) = 0$$

cuando Γ no encierra el origen.

Principio del argumento: Sea C un arco cerrado simple orientado positivamente y f una función analítica sobre C y en su interior, salvo quizás en polos interiores a C. Si además f no tiene ceros sobre C, entonces:

$$\frac{\Delta_C \arg f(z)}{2\pi} = N - P$$

con N y P el número total de ceros y polos de f dentro de C, respectivamente. Donde un cero de orden m_0 y un polo de orden m_p es contado m_0 y m_p veces, respectivamente.

A.7 Nociones sobre integrales impropias

Recordemos algunas definiciones del análisis real.

Integral impropia de $[0, \infty)$: En el análisis real, se define la integral impropia de una función continua sobre el intervalo infinito $x \geq 0$ como,

$$\int_0^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x)\, dx$$

cuando el límite existe, se dice que la integral impropia $\int_0^\infty f(x)dx$ *converge* y que su valor es tal límite.

Integral impropia de $(-\infty, \infty)$: En el análisis real, se define la integral impropia de una función continua para todo x como,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{R_1 \to \infty} \int_{-R_1}^0 f(x)\, dx + \lim_{R_2 \to \infty} \int_0^{R_2} f(x)\, dx \qquad \text{(A.1)}$$

cuando ambos límites existen, se dice que la integral impropia $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ *converge* y que su valor es la suma de los dos límites.

Valor principal de Cauchy (PV): Otro valor asociado a la integral $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ es definido por el siguiente límite,

$$PV \int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^R f(x)\, dx$$

siempre y cuando el límite exista y se lo denomina *valor principal.*

Observaciones:

- Si la integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$
converge, esto es, cada límite en Ec. (A.1) converge, el valor obtenido coincide con el del valor principal.

- Para
$$f(x) = x\,,$$
el valor principal es cero, mientras que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ no converge.

- Sea $f(x)$ **par**, y sea que el valor principal de Cauchy existe, entonces, existe la integral indefinidad y son iguales,
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$
Además,
$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(PV \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right)$$

A.8 Integración a lo largo de un corte

Usaremos el teorema de los residuos para el caso en que la promoción de la variable real a compleja hace aparecer un corte en el integrando. Este es, por ejemplo el caso para x^{-a} con $x > 0$ y $0 < a < 1$.

Ejemplo: Calcular la integral
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx\,,$$
con $0 < a < 1$.

La función
$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1}$$
con z compejo tiene un polo en $z = -1$. Además, la función compleja z^{-a}, definida por (una de las posibles realizaciones),
$$z^{-a} = e^{-a \log \mathrm{z}}\,,$$
tiene un corte en el semieje real positivo si definimos el argumento entre $(0, 2\pi)$.

Cuando hagamos el análisis de convergencia de las integrales de contorno encontraremos que debe verificar $0 < a < 1$.

Anteriormente hemos realizado un ejercicio calculando la integral con un contorno que atravesaba un corte. La estrategia fue integrar por arcos tomando diferentes realizaciones de modo que el corte quedara fuera del dominio de integración. Aquí usaremos la misma estrategia con la diferencia que existen dos contornos, un círculo interior y otro exterior conectados entre sí, lo que explica el sentido de circulación de cada uno de ellos, como se muestra en la figura izquierda en A.2. Notemos que la elección de las partes del contorno está guiado por el objetivo de evitar el corte y el punto rama en $z = 0$.

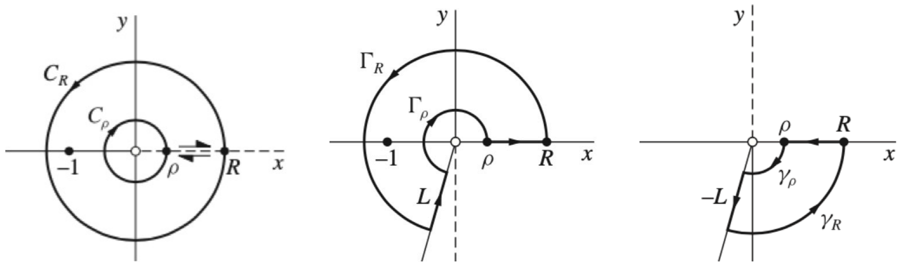


Figure A.2:

Ahora procederemos a realizar dos integrales, en dos contornos complementarios. Ellos son los mostrados en el medio y a la derecha en la figura A.2. Luego, las contribuciones en L y $-L$ se compensarán entre sí, mientras que los contornos $\Gamma_R + \gamma_R$ generarán C_R y similarmente para C_ρ.

Como primera realización

$$f_1(z)$$

se toma el corte en el eje imaginario negativo y se integra en el contorno mostrado en la figura del medio de Fig. A.2. El contorno encierra el polo de $z = -1$ por lo que la integral total deberá ser

$$2\pi\, i\, B_1\,,$$

con $B_1 = \phi(-1)$ el residuo en donde

$$\phi(z) = z^{-a} = e^{-a\log z}\,,$$

con $|z| > 0$ y

$$-\frac{\pi}{2} < arg(z) < \frac{3\pi}{2}\,.$$

Entonces,

$$B_1 = e^{-ia\pi}\,.$$

Escribiendo el resultado de esta primera integración tenemos

$$\int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln r + i0)}}{r+1}\,dr + \int_{\Gamma_R} f_1(z)\,dz + \int_L f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma_\rho} f_1(z)\,dz = 2\pi i e^{-ia\pi}$$

Como segunda realización tomamos

$$f_2(z)$$

de modo que tiene el corte en el semieje imaginario positivo, y el contorno como se muestra en la figura derecha en A.2. Esto es, el dominio de $f_2(z)$ es $|z| > 0$ y

$$\frac{\pi}{2} < arg(z) < \frac{5\pi}{2}\,.$$

Como no encierra polos, la integral sobre todo el contorno es nula,

$$-\int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln r + i2\pi)}}{r+1}\,dr + \int_{\gamma_\rho} f_2(z)\,dz - \int_L f_2(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f_2(z)\,dz = 0$$

el signo en la primera integral es debido al cambio

$$\int_R^\rho = -\int_\rho^R\,.$$

Sumando miembro a miembro las últimas dos ecuaciones resulta,

$$\int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln \mathrm{r}+\mathrm{i}0)}}{r+1}\,dr - \int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln \mathrm{r}+\mathrm{i}2\pi)}}{r+1}\,dr + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i e^{-ia\pi}$$

con

$$\begin{aligned}\int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln \mathrm{r}+\mathrm{i}0)}}{r+1}\,dr - \int_\rho^R \frac{e^{-a(\ln \mathrm{r}+\mathrm{i}2\pi)}}{r+1}\,dr &= (1-e^{-i2a\pi})\int_\rho^R \frac{e^{-a\ln \mathrm{r}}}{r+1}\,dr \\ &= (1-e^{-i2a\pi})\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr\end{aligned}$$

Debemos tomar los límites $R \to \infty$ y $\rho \to 0$ para completar los cálculos. Para ello vamos a acotar las integrales,

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leq \frac{R^{-a}}{R-1}2\pi R = \frac{2\pi}{(1-1/R)}\frac{1}{R^a}$$

con $a > 0$ para que tienda a cero cuando $R \to \infty$.

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz\right| \leq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho}\rho^{1-a}\,,$$

si $a > 1$ esto tiende a infinito cuando $\rho \to 0$, mientras que si $a < 1$ tiende a cero cuando $\rho \to 0$:

$$\begin{aligned} a > 1: &\quad \frac{1}{1-\rho}\rho^{1-a} = \frac{1}{\rho^{|1-a|}(1-\rho)} \to \infty \\ a < 1: &\quad \frac{1}{1-\rho}\rho^{1-a} = \frac{\rho^{|1-a|}}{(1-\rho)} \to 0 \end{aligned}$$

Luego, se verifica que ambas integrales tienden a cero si $0 < a < 1$ cuando $R \to \infty$ y $\rho \to 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\lim_{\rho\to 0}(1-e^{-i2a\pi})\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr &= 2\pi i e^{-ia\pi} \\ \int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr &= \frac{2\pi i e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2a\pi}}\end{aligned}$$

con $0 < a < 1$

Donde,

$$\frac{2\pi i e^{-ia\pi}}{1-e^{-i2a\pi}} = \frac{2\pi i}{e^{ia\pi}-e^{-ia\pi}} = \frac{2\pi i}{2i\sin a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Finalmente,

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$