

MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA FÍSICA II (F1810)  
3<sup>er</sup> año Lic. Física. FCEIA. UNR.  
1er Semestre 2024

MÓDULO I:  
ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

Docentes:  
Federico Torresi  
Alejandro Mezio  
Rodolfo M. Id Betan(Rolo)

*Reportar errores o comentarios a: [idbetan@fceia.unr.edu.ar](mailto:idbetan@fceia.unr.edu.ar)*

August 9, 2024

# Contents

<b>1</b>	<b>Ecuaciones en derivadas parciales: cuerda vibrante</b>	<b>2</b>
1.1	Introducción . . . . .	2
1.2	Soluciones de Bernoulli y D'Alembert . . . . .	2
1.3	Estudio de la cuerda vibrante . . . . .	4
1.3.1	Dinámica: ecuación de movimiento . . . . .	4
1.3.2	Cinemática: solución . . . . .	5
1.3.3	Determinación de los coeficientes $b_n$ . . . . .	8
1.4	Sobre la ortogonalidad de las autofunciones . . . . .	9
1.5	Aplicación: Separación de variables en $3D$ . . . . .	9
1.5.1	Solución en coordenadas cartesianas: onda plana en $3D$ . . . . .	10
1.5.2	Solución en coordenadas esféricas: Armónicos esféricos . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Ecuaciones en derivadas parciales: calor. Funciones armónicas</b>	<b>16</b>
2.1	Ecuación del calor . . . . .	16
2.2	Solución unidimensional de la ecuación del calor . . . . .	18
2.3	Ecuación de Laplace . . . . .	20
2.4	Aplicación: problema de Dirichlet . . . . .	21
2.5	Integral de Poisson . . . . .	23
2.6	Propiedades de la ecuación de Laplace . . . . .	25

# Chapter 1

## Ecuaciones en derivadas parciales: cuerda vibrante

**Modificado:** 2023.12.11

**Fuente:** G. F. Simmons. Ecuaciones Diferenciales. 2da Edición. McGraw-Hill. Madrid (1993). Secciones 39 y 40.

**Contenido:** Soluciones de Bernoulli y D'Alembert a la ecuación de la cuerda vibrante y deducción de la ecuación de onda unidimensional. Análisis dimensional. Resolución por separación de variables. Autovalores y autovectores. Ortogonalidad de autovectores. Separación de variables en 3D, armónicos esféricos.

**Dedicación:** 1.5 clase.

### 1.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos la solución de la cuerda vibrante mediante serie de Fourier y veremos cómo se obtienen los coeficientes de la serie. En el siguiente capítulo haremos lo propio con la solución de la ecuación de transferencia de calor unidimensional. Ambas ecuaciones dependen de dos variables (en el problema unidimensional), coordenada y tiempo. En la siguiente sección adelantamos la solución que calcularemos para la cuerda y damos la expresión a tiempo cero para la solución de la ecuación del calor.

### 1.2 Soluciones de Bernoulli y D'Alembert

De la teoría de vibración de una cuerda se tiene la siguiente ecuación diferencial, denominada *ecuación de ondas unidimensional*,

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

con  $a > 0$ . El análisis dimensional da para  $a$  unidades de velocidad. Veamos:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] &= \frac{m}{s^2} \\ \left[ a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] &= [a^2] \frac{1}{m} \end{aligned}$$

luego,

$$[a^2] = \frac{m^2}{s^2} \Rightarrow [a] = \frac{m}{s}$$

El objetivo consiste en hallar  $y(x, t)$  para ciertas condiciones de contorno e iniciales (puntos fijos, forma inicial de la cuerda, etc.). Por ejemplo, en la figura 1.1 se da como condición inicial la forma

$$f(x) = y(x, 0),$$

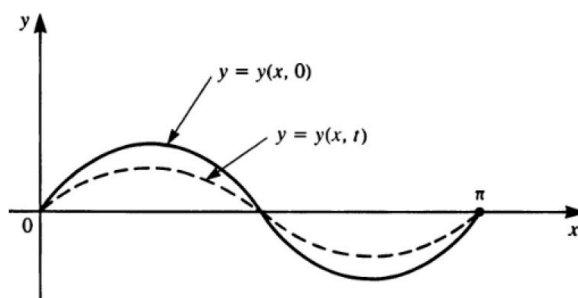


Figure 1.1:

**Solución de Bernoulli (1773):** Daniel Bernoulli planteó la siguiente solución,

$$y(x, t) = b_1 \sin x \cos at + b_2 \sin 2x \cos 2at + \dots$$

Luego, la solución de Bernoulli debe verificar  $y(x, 0)$ ,

$$y(x, 0) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

**Solución de D'Alembert (1747)-Euler(1748):** La solución de D'Alembert y Euler tiene la siguiente forma (onda viajeras),

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)]$$

donde  $f(x)$  es la forma de la cuerda en  $t = 0$  y con la suposición que  $f(x)$  está definida fuera del intervalo  $[0, \pi]$  de modo que sea impar y de período  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \\ f(x + 2\pi) &= f(x) \end{aligned}$$

Luego, comparando Bernoulli con D'Alembert-Euler resulta

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \dots$$

con la implicancia que una función arbitraria (impar)  $f(x)$  puede desarrollarse en serie de senos *cualquiera* sea  $f(x)$ !!.

Por otro lado, la conducción del calor da una forma más general para  $f(x)$  con senos y cosenos, introducida por Fourier (1807),

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

con  $f(x)$  una *función arbitraria*. Fourier también dio la forma de calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ .

## 1.3 Estudio de la cuerda vibrante

En esta sección deduciremos la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de una cuerda, llamada *cuerda vibrante*, al tiempo que introduciremos la técnica de separación de variables y cálculo de autovalores y autovectores para resolver problemas con condiciones de contorno más las condiciones iniciales.

### 1.3.1 Dinámica: ecuación de movimiento

Consideremos nuestra peculiar cuerda flexible de longitud  $\pi$  como se muestra en la figura 1.2. Supongamos que la tensión es  $T = T(x)$  y la densidad lineal  $\mu$  es constante,

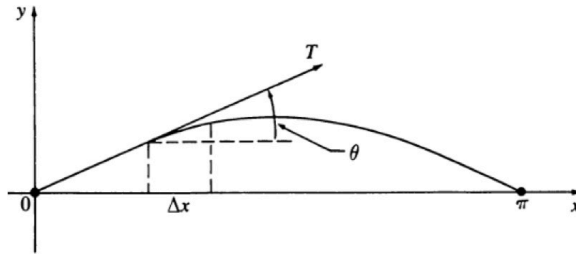


Figure 1.2:

Inicialmente la cuerda está tensa con cierta forma descrita por la función  $f(x)$  conocida, de modo que

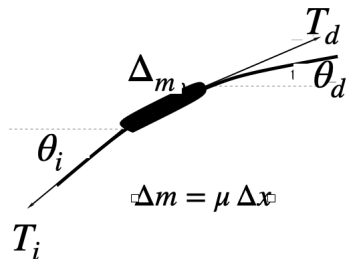
$$y(x, t = 0) = f(x).$$

Consideremos que luego se la libera describiendo un movimiento en el plano  $xy$ , el cual vamos a deducir a partir de un estudio dinámico para obtener una ecuación de movimiento y luego la resolveremos.

**Ecuación de movimiento:** Vamos a deducir la ley que debe satisfacer el desplazamiento de los elementos de la cuerda partir de la segunda ley de Newton, aplicado a un elemento de la cuerda  $\Delta m$  de longitud  $\Delta x$ ,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}.$$

En la componente  $y$  tendremos,



$$-T_i \sin \theta_i + T_d \sin \theta_d - \Delta m g = \Delta m \frac{\Delta v_y}{\Delta t}$$

con  $i(d)$  para indicar lado izquierdo(derecho) de  $\Delta x$ .

Despreciando  $\Delta m g$ , aproximando el seno con tangente, asumiendo  $T$  constante y escribiendo  $\Delta m = \mu \Delta x$ , donde  $\mu$  es la densidad lineal de masa, resulta

$$T (\text{tg } \theta_d - \text{tg } \theta_i) = \mu \Delta x \frac{\Delta}{\Delta t} \left( \frac{\Delta y}{\Delta t} \right)$$

Aproximando la tangente con diferencias finitas,

$$T \left( \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x_d} - \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x_i} \right) = \mu \Delta x \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$$

$$\frac{T}{\mu} \frac{\left( \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x_d} - \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{x_i} \right)}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 y}{\Delta t^2}$$

$$\frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

donde hemos usado  $x_d = x_i + \Delta x$  y pasado al límite  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Lo que resulta en la siguiente ecuación de movimiento llamada **ecuación de ondas unidimensional**

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

con  $a$  en término de propiedades intrínscas del sistema,

$$a = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

**Actividad 1:** Deducir las dimensiones de la constante  $a$  ( $m/s$ ) y comparar con la ecuación 1.1.

**Actividad 2:** Deducir la ecuación de ondas para una cuerda de longitud  $L$ .

### 1.3.2 Cinemática: solución

Buscamos soluciones con las siguientes condiciones iniciales ( $t = 0$ ) y de contorno ( $x = 0, \pi$ ),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} &= 0 \\ y(x, 0) &= f(x) \\ y(0, t) &= 0 \\ y(\pi, t) &= 0 \end{aligned}$$

Dada la forma de la ecuación diferencial, se propone la siguiente factorización para la solución  $y(x, t)$ , llamada **separación de variables**

$$y(x, t) = u(x) v(t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial se consigue desacoplar las variables  $x$  y  $t$ ,

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v''(t)}{v(t)} = -\lambda$$

con  $\lambda > 0$  constante.

**Actividad 3:** Analizar las soluciones para  $\lambda < 0$  y  $\lambda = 0$ .

**Actividad 4:** Deducir las dimensiones de  $\lambda$  ( $1/m^2$ ).

**Rta.:** Del análisis dimensional de la separación anterior resulta,

$$\begin{aligned}\left[\frac{u''(x)}{u(x)}\right] &= \frac{1}{m^2} \\ \left[\frac{1}{a^2} \frac{v''(t)}{v(t)}\right] &= \frac{1}{[a^2]} \frac{1}{s^2} = \frac{1}{m^2} \\ \Rightarrow [\lambda] &= \frac{1}{m^2}\end{aligned}$$

De este modo se obtienen dos *ecuaciones independientes*, una para  $u(x)$  y otra para  $v(t)$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda u(x) &= 0 \\ \frac{d^2v}{dt^2} + \lambda a^2 v(t) &= 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones escritas como ecuaciones de autovalores resulta

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u(x) \quad (1.2)$$

$$-\frac{d^2v}{dt^2} = \lambda a^2 v(t) \quad (1.3)$$

donde  $\lambda$  y  $u$  son autovalores y autovectores, respectivamente de la parte espacial; mientras  $\lambda a^2$  y  $v$  lo son para la ecuación temporal.

**Actividad 5:** Verificar la consistencia de unidades de las dos ecuaciones de arriba.

**Observación:** Si bien el movimiento espacial, dado por  $u(x)$ , resulta desacoplado del movimiento temporal, gobernado por  $v(t)$ , ambos movimientos están conectados a través del parámetro  $\lambda$ . Veremos que este vínculo es el que aparece en la ecuación de Bernoulli  $y(x, t) = b_1 \sin x \cos at + b_2 \sin 2x \cos 2at + \dots$ .

**Solución para  $u(x)$**

Las funciones  $u(x)$  que satisfacen la ecuación diferencial se halla construyendo la ecuación secular proponiendo  $u(x) = e^{ikx}$ . Lo que resulta en  $k^2 = \lambda$  y

$$u(x) = c \sin \sqrt{\lambda}x + c' \cos \sqrt{\lambda}x$$

**Actividad 6:** Verificar que los argumentos del seno y coseno sean adimensionales.

Usando la condición inicial  $u(0) = 0$  resulta,

$$u(x) = c \sin \sqrt{\lambda}x$$

mientras que usando la condición de contorno  $u(\pi) = 0$  resulta,

$$\sqrt{\lambda} = n$$

esto es,  $\lambda = n^2$ , con  $n = 1, 2, \dots$ .

**Actividad 7:** Mostrar que las unidades de  $[n] = 1/m$  con  $m$  longitud.

**Autovalores y autovectores:** Los valores

$$\lambda = 1, 4, 9, \dots$$

constituyen los **autovalores** del problema, mientras que las funciones

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots,$$

constituyen las **autofunciones** del problema. Para un dado  $n$ , la autofunción tiene  $n - 1$  ceros en  $(0, \pi)$  (esto es, sin contar los ceros de los extremos).

**Actividad 8:** Analizar esta última afirmación.

Luego, las soluciones para  $u$ ,

$$\begin{aligned}u'' + \lambda u &= 0 \\u(0) &= 0 \\u(\pi) &= 0\end{aligned}$$

son

$$u_n(x) = \sin nx$$

**Actividad 9:** Analizar que implicancia tiene agregar una constante multiplicativa a la solución.

**Solución para  $v(t)$**

Con este conocimiento, podemos deducir que las soluciones de la ecuación,

$$v'' + \lambda a^2 v = 0$$

son

$$v(t) = c \sin nat + c' \cos nat$$

La condición inicial

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

implica

$$v'(0) = 0,$$

luego

$$v_n(t) = \cos nat$$

Reconstruyendo  $y(x, t)$  resulta

$$y_n(x, t) = \sin nx \cos nat$$

con  $n = 1, 2, \dots$ .

La siguiente combinación lineal también es solución de la ecuación de movimiento,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \cos nat$$

Notar que hemos recuperado la solución de Bernoulli.



**Actividad 10:** Deducir la solución correspondiente  $y(x, t)$  para una cuerda de longitud  $L$ .

**Observación:** Para hallar el movimiento de la cuerda falta aún determinar los coeficientes  $b_n$ .

### 1.3.3 Determinación de los coeficientes $b_n$

Durante la deducción de la solución a la ecuación de onda hemos usado tres de las cuatro condiciones, resta usar la condición

$$y(x, 0) = f(x),$$

la cual permitirá determinar los coeficiente  $b_n$ .

Partimos de

$$y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = f(x)$$

y multiplicamos por

$$\sin n'x \quad \text{con} \quad n' \neq n$$

e integramos en el dominio de la cuerda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_0^{\pi} \sin n'x \sin nx \, dx = \int_0^{\pi} \sin n'x f(x) \, dx$$

donde hemos intercambiado suma e integral.

Conocemos de tabla, que para  $n' \neq n$

$$\int_0^{\pi} \sin n'x \sin nx \, dx = 0$$

Luego, la sumatoria se reduce a un solo término,

$$\begin{aligned} b_{n'} \int_0^{\pi} \sin n'x \sin n'x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin n'x f(x) \, dx \\ b_{n'} \frac{\pi}{2} &= \int_0^{\pi} \sin n'x f(x) \, dx \end{aligned}$$

donde hemos usado  $\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2}$ .

Entonces, cada coeficiente  $b_n$ , llamados *coeficientes de Fourier* (recordar la solución propuesta por Fourier introducida en la sección anterior) resultan de integrar  $f(x)$  (conocido) con  $\sin nx$ ,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

lo cual resuelve completamente el problema de la cuerda vibrante.

**Observación sobre la validez del desarrollo de  $f(x)$ :** Supongamos que  $f(x)$ , definida en  $[0, \pi]$ , es continua y se anula en los extremos. Supongamos que la derivada de  $f(x)$  es continua, con la posible excepción de un número finito de discontinuidades de salto, donde existen derivadas laterales finitas pero distintas. Bajo estas hipótesis el desarrollo

$$f(x) = \sum b_n \sin nx,$$

con  $b_n$  los coeficientes de Fourier, converge en todo punto al valor de la función en él.

## 1.4 Sobre la ortogonalidad de las autofunciones

En esta sección mostramos la ortogonalidad de las autofunciones para  $m \neq n$  en forma abstracta, esto es, sin usar las funciones trigonométricas. Supongamos que las funciones están definidas en el intervalo  $[a, b]$ , con condiciones de contorno  $u(a) = u(b) = 0$ .

Comencemos con la ecuación de autovalores para dos autovalores diferentes,

$$\begin{aligned} -u_m'' &= \lambda_m u_m \\ -u_n'' &= \lambda_n u_n, \end{aligned}$$

con  $\lambda_m = m^2$  y  $\lambda_n = n^2$ .

Reescribimos las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_m'' + m^2 u_m &= 0 \\ u_n'' + n^2 u_n &= 0, \end{aligned}$$

y las multiplicamos por  $u_n$  a la primera y por  $u_m$  a la segunda. Luego las restamos,

$$u_n u_m'' - u_m u_n'' + (m^2 - n^2) u_m u_n = 0$$

Reescribimos los términos en derivadas segunda en la forma

$$(u_n u_m' - u_m u_n')' + (m^2 - n^2) u_m u_n = 0$$

donde se cancelan los términos de la forma  $u_n' u_m'$ .

Integrando en  $[a, b]$ , resulta

$$\begin{aligned} (u_n u_m' - u_m u_n') \Big|_a^b + (m^2 - n^2) \int_a^b u_m u_n dx &= 0 \\ (m^2 - n^2) \int_a^b u_m u_n dx &= 0 \end{aligned}$$

donde hemos usado las condiciones de contorno  $u(a) = u(b) = 0$ .

Luego, si  $m \neq n$  debe ser

$$\int_a^b u_m u_n dx = 0$$

lo que demuestra la ortogonalidad de las autofunciones en forma abstracta.

## 1.5 Aplicación: Separación de variables en 3D

Consideremos la ecuación de onda de una partícula libre en 3D,

$$-\nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}) = k^2 \psi(\vec{r}), \quad (1.4)$$

esta expresión se corresponde con la parte espacial de la ecuación de onda (1.2), donde hemos reemplazado el autovalor  $\lambda > 0$  por la constante desconocida  $k^2$ , manifiestamente positiva. Al final del cálculo vamos a ver que es el cuadrado del vector  $\vec{k}$  número de onda,  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \vec{k}^2$ . El operador derivada  $-\frac{d^2}{dx^2}$  fue reemplazado por su versión en 3D  $\nabla_{\vec{r}}^2$ .

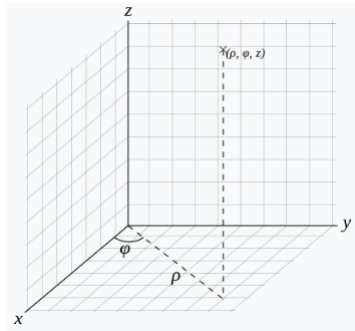
Al operador diferencial  $\nabla_{\vec{r}}^2$  se lo llama laplaciano. Tiene la siguiente forma según el sistema de coordenadas,

- Coordenadas cartesianas  $\bar{r} = (x, y, z)$

$$\nabla_{\bar{r}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

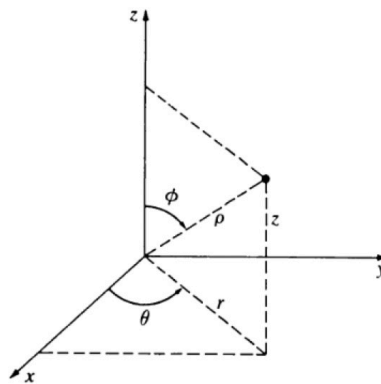
- Coordenadas cilíndricas  $\bar{r} = (\rho, \varphi, z)$ . Conveniente para problemas con simetría cilíndrica.

$$\nabla_{\bar{r}}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$



- Coordenadas esféricas (polares)  $\bar{r} = (\rho, \theta, \phi)$ . Conveniente para problemas con simetría esférica.

$$\nabla_{\bar{r}}^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$



**Actividad:** Obtener las expresiones de los laplacianos en coordenadas cilíndricas y esféricas a partir del laplaciano en coordenadas cartesianas.

### 1.5.1 Solución en coordenadas cartesianas: onda plana en 3D

Para resolver la ecuación (1.4) en coordenadas cartesianas proponemos la siguiente función,

$$\psi(\bar{r}) = f(x)F(y, z) \tag{1.5}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
& - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x)F(y, z) =_1 k^2 f(x)F(y, z) \\
& -f_{xx}F(y, z) - \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x)F(y, z) =_2 k^2 f(x)F(y, z) \\
& \frac{f_{xx}F(y, z)}{f(x)F(y, z)} - \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x)F(y, z)}{f(x)F(y, z)} =_3 k^2 \\
& \qquad \qquad \qquad -\frac{f_{xx}}{f(x)} =_4 \frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F(y, z)}{F(y, z)} + k^2 = c_x
\end{aligned}$$

con  $c_x$  constante.

Separando las ecuaciones tenemos

$$\begin{aligned}
-\frac{f_{xx}}{f(x)} &= c_x \\
-f_{xx} &= c_x f(x)
\end{aligned}$$

cuya solución es  $f(x) = e^{i\sqrt{c_x}x}$ . La ecuación remante la escribimos con

$$F(y, z) = g(y)h(z), \tag{1.6}$$

luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F(y, z)}{F(y, z)} + k^2 &= _1 c_x \\
\frac{(g_{yy}h(z) + g(y)h_{zz})}{g(y)h(z)} + k^2 &= _2 c_x \\
\frac{g_{yy}}{g(y)} + \frac{h_{zz}}{h(z)} + k^2 &= _3 c_x \\
-\frac{g_{yy}}{g(y)} =_4 \frac{h_{zz}}{h(z)} + k^2 - c_x &= c_y
\end{aligned}$$

con  $c_y = cte$ .

Luego,

$$\begin{aligned}
-\frac{g_{yy}}{g(y)} &= c_y \\
-g_{yy} &= c_y g(y)
\end{aligned}$$

cuya solución es  $g(y) = e^{i\sqrt{c_y}y}$ . Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{h_{zz}}{h(z)} + k^2 - c_x &= c_y \\
-\frac{h_{zz}}{h(z)} &= k^2 - c_x - c_y = c_z
\end{aligned}$$

con  $c_z = cte$ .

Entonces,

$$\begin{aligned} -\frac{h_{zz}}{h(z)} &= c_z \\ -h_{zz} &= c_z h(z) \end{aligned}$$

cuya solución es  $h(z) = e^{i\sqrt{c_z}z}$ , y,

$$\begin{aligned} k^2 - c_x - c_y &= c_z \\ k^2 &= c_x + c_y + c_z \end{aligned}$$

Dados que las soluciones son de la forma  $e^{i\sqrt{c}x}$ , implica  $[\sqrt{c}] = \frac{1}{cm}$ , y  $e^{i\sqrt{c}x}$  es una onda plana unidimensional, podemos asociar  $\sqrt{c_x} = k_x$  con el número de onda en la coordenada  $x$ , y en forma similar las otras constantes, luego,

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= e^{ik_x x} e^{ik_y y} e^{ik_z z} = e^{i\vec{k}\vec{r}} \\ \vec{k} &= (k_x, k_y, k_z) \end{aligned}$$

con  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$  el autovalor y  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$  el autovector del laplaciano  $\nabla_{\vec{r}}^2$ , con  $k_x, k_y, k_z \in \mathcal{R}^+$ .

### 1.5.2 Solución en coordenadas esféricas: armónicos esféricos - EN PROCESO

El operador Laplaciano  $\nabla^2$  en coordenadas esféricas tiene la siguiente expresión,

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Escribamos la parte angular en forma compacta como,

$$\mathbf{L}^2(\theta, \phi) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Luego,

$$-\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{L}^2(\theta, \phi)}{r^2} \right] \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r})$$

Buscamos soluciones de la forma separable en las coordenadas radial y angulares,

$$\psi(\vec{r}) = R(r)f(\theta, \phi),$$

y reemplazamos en la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\mathbf{L}^2(\theta, \phi)}{r^2} \right] R(r) f(\theta, \phi) =_1 \varepsilon R(r) f(\theta, \phi) \\
& - \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) \right] f(\theta, \phi) - [\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)] \frac{R(r)}{r^2} =_2 \varepsilon R(r) f(\theta, \phi) \\
& - \frac{[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) R(r)]}{R(r)} - \frac{[\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)]}{f(\theta, \phi)} \frac{1}{r^2} =_3 \varepsilon \\
& - r^2 \frac{[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) R(r)]}{R(r)} - \frac{[\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)]}{f(\theta, \phi)} =_4 \varepsilon r^2 \\
& - \frac{[\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)]}{f(\theta, \phi)} =_5 \varepsilon r^2 + \frac{[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) R(r)]}{R(r)} = cte
\end{aligned}$$

Resultando en dos ecuaciones desacopladas,

$$\begin{aligned}
& - \frac{[\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)]}{f(\theta, \phi)} = cte \\
& \frac{1}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r) + \varepsilon r^2 = cte
\end{aligned}$$

Veamos la parte angular,

$$\begin{aligned}
& - \frac{[\mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi)]}{f(\theta, \phi)} =_1 cte \\
& - \mathbf{L}^2(\theta, \phi) f(\theta, \phi) =_2 cte f(\theta, \phi) \\
& - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] f(\theta, \phi) =_3 cte f(\theta, \phi)
\end{aligned}$$

y ensayemos una solución en separación de variables

$$f(\theta, \phi) = Y(\theta)g(\phi)$$

resultando

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Y(\theta)g(\phi) =_1 cteY(\theta)g(\phi) \\
& - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta)g(\phi) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} Y(\theta)g(\phi) =_2 cteY(\theta)g(\phi) \\
& - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right] g(\phi) - \left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right] \frac{Y(\theta)}{\sin^2 \theta} =_3 cteY(\theta)g(\phi) \\
& - \frac{\left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right]}{Y(\theta)} - \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right]}{g(\phi)} \frac{1}{\sin^2 \theta} =_4 cte \\
& - \frac{\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right]}{Y(\theta)} - \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right]}{g(\phi)} =_5 cte \sin^2 \theta \\
& - \frac{\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right]}{Y(\theta)} - \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right]}{g(\phi)} - cte \sin^2 \theta =_6 0 \\
& - \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right]}{g(\phi)} =_7 \frac{\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right]}{Y(\theta)} + cte \sin^2 \theta = cte'
\end{aligned}$$

Lo que define otras dos ecuaciones de autovalores

$$\begin{aligned}
& - \frac{\left[ \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} g(\phi) \right]}{g(\phi)} = cte' \\
& \frac{\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y(\theta) \right]}{Y(\theta)} + cte \sin^2 \theta = cte'
\end{aligned}$$

La solución  $g(\phi)$ , con  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , resulta

$$-\frac{d^2}{d\phi^2} g(\phi) = cte' g(\phi) \Rightarrow g(\phi) = e^{i\sqrt{cte'}\phi}$$

Notemos que  $cte'$  hace las veces de autovalor.

La función  $g$  debe ser periódica,  $g(0) = g(2\pi)$ . Luego,

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi\sqrt{cte'}) &= 1 \\
\sin(2\pi\sqrt{cte'}) &= 0,
\end{aligned}$$

lo que da para  $cte'$ ,

$$\sqrt{cte'} = m \Rightarrow cte' = m^2,$$

con  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Una vez determinado  $cte'$  podemos volver a la ecuación para  $Y(\theta)$ ,

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) Y(\theta) + cte \sin^2 \theta Y(\theta) = cte' Y(\theta) = m^2 Y(\theta)$$

con  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Haciendo el cambio de variable

$$\cos \theta = x,$$

y renombrando la función,

$$Y(\theta) = P(x),$$

se obtiene la siguiente ecuación diferencial singular,

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{P(x)}{dx} \right] + \left[ cte - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] P(x) = 0.$$

Una de las posibles soluciones es finita, y luego físicamente aceptable, si

$$cte = l(l+1),$$

con  $l = 0, 1, 2, \dots$  y  $|m| \leq l$ , esto es

$$m = -l, l+1, \dots, 0, \dots, l.$$

Estas funciones se llaman polinomios asociados de Legendre  $P_l^m(x)$ . Cuando  $m = 0$ , las soluciones físicamente aceptables se llaman polinomios de Legendre  $P_l(x)$ , los cuales permiten determinar los polinomios asociados de Legendre para  $m \neq 0$ ,

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x).$$

Usando los valores de las constantes  $cte = l(l+1)$  y  $cte' = m$ , podemos plantear la ecuación para  $R(r)$ ,

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) R(r) + \varepsilon r^2 =_1 l(l+1)$$

$$\frac{r}{u(r)} [ru''(r)] + \varepsilon r^2 =_2 l(l+1)$$

$$r^2 u''(r) + \varepsilon r^2 u(r) =_3 l(l+1)u(r)$$

$$-u''(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} u(r) =_4 \varepsilon u(r)$$

Resultando en una última ecuación de autovalores, cuyas soluciones son las funciones esféricas de Bessel.



# Chapter 2

## Ecuaciones en derivadas parciales: calor. Funciones armónicas

**Modificado:** 2023.12.12

**Fuente:** G. F. Simmons. Ecuaciones Diferenciales. 2da Edición. McGraw-Hill. Madrid (1993). Secciones 41 y 42.

**Contenido:** Deducción de la ecuación unidimensional del calor. Definición de la ecuación de Laplace y laplaciano. Definición de soluciones armónicas. Resolución de la ecuación del calor unidimensional. Aplicación: solución estacionaria de la ecuación del calor en dos dimensiones (Problema de Dirichlet). Solución al problema de Dirichlet en términos de la integral de Poisson. Teoría del potencial. Propiedad del valor medio de las funciones armónicas. Laplaciano tridimensional en coordenadas cilíndrica y polares.

**Dedicación:** 1.5 clase.

En este capítulo vamos a introducir la ecuación que rige la cinemática de la temperatura, denominada ecuación de calor, a partir de un análisis energético. Deduciremos la ecuación para el caso unidimensional y luego la generalizaremos a tres dimensiones. Finalmente, introduciremos la ecuación de Laplace, cuyo estudio constituye un área por sí misma, denominada *teoría del potencial*.

### 2.1 Ecuación del calor

En esta primera sección obtendremos la ecuación diferencial que debe satisfacer la temperatura como función del espacio (unidimensional) y el tiempo. Luego, los parámetros involucrados son temperatura, distancia y tiempo:

$$T, x, t$$

Las siguientes hipótesis son utilizadas para construir la relación funcional entre los parámetros del problema:

1. El calor  $Q$  fluye en la dirección de temperatura decreciente.

$$T_2 \xrightarrow{Q} T_1 < T_2$$

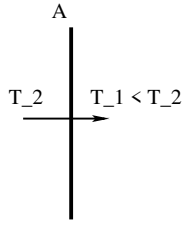


Figure 2.1:

2. El ritmo al que fluye el calor es proporcional al área  $A$  y al gradiente de la temperatura  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ , en la dirección perpendicular a  $A$ . Ver Fig. 2.1.

Esto es,

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

siendo la constante de proporcionalidad  $\kappa$  la *conductividad térmica* definida positiva (por eso el signo negativo), con unidades  $[\kappa] = \frac{W}{mK}$  (usando  $K$  para grados Kelvin).

**Actividad 1:** verificar las unidades.

**Actividad 2:** qué cambiaría si la unidad de temperatura fuera grados centígrados?.

3. La cantidad de calor ganado/perdido es proporcional a la masa y al cambio de temperatura, esto es,

$$\Delta Q = cm\Delta T$$

con  $c$  el *calor específico* a presión constante de la sustancia, con unidades  $[c] = \frac{J}{gK}$ .

**Actividad 3:** porqué el calor específico que se usa es el de presión constante?, qué pasaría si se usa el de volumen constante.

4. El balance energético vinculará las propiedades citadas en 1-3 y proveerá la ecuación diferencial.

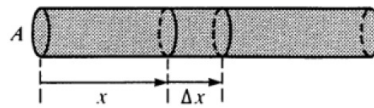


Figure 2.2:

**Deducción de la ecuación:** Consideremos el cambio del calor en la sección entre  $x$  y  $x + \Delta x$  en la varilla de la Fig. 2.2.

Sea  $\rho$  la densidad volumétrica, de modo que la masa en la porción de varilla resulta  $\Delta m = A\Delta x\rho$ . Sea  $\Delta T$  el cambio de temperatura en  $x$  en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Luego, la cantidad de calor almacenado en este tiempo resulta

$$\Delta Q = cA\rho\Delta x\Delta T,$$

de modo que la razón a la cual el calor es almacenado es

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = cA\rho\Delta x \frac{\Delta T}{\Delta t}.$$

La razón del flujo de calor por la cara en  $x$  viene dada por  $-\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}|_x$ , mientras que en la cara  $x + \Delta x$  será  $\kappa A \frac{\Delta T}{\Delta x}|_{x+\Delta x}$ . Luego, el cambio de calor total con el tiempo resulta

$$\kappa A \left( \frac{\Delta T}{\Delta x}|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta T}{\Delta x}|_x \right).$$

Igualando las dos expresiones tenemos

$$\begin{aligned} \kappa A \left( \frac{\Delta T}{\Delta x}|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta T}{\Delta x}|_x \right) &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ &= cA\rho\Delta x \frac{\Delta T}{\Delta t} \end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\kappa}{c\rho} \frac{\frac{\Delta T}{\Delta x}|_{x+\Delta x} - \frac{\Delta T}{\Delta x}|_x}{\Delta x} = \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

En el límite escribimos, lo que se denomina **ecuación del calor**,

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

la cual es una ecuación para  $T(x, t)$  con

$$a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$$

**Actividad 4:** determinar la unidad de  $a^2$ . **Rta.:**  $[a^2] = \text{cm}^2/\text{s}$ .

**Actividad 5:** determinar las unidades de cada término de la ecuación de calor. **Rta.:** La unidad es la misma para ambos miembros:  $K/\text{s}$ .

**Actividad 6:** Calcular el valor de  $a^2$  para el cobre. **Rta.:**  $a^2(\text{Cu}) = 1,10 \text{ cm}^2/\text{s}$ . Donde hemos usado un valor medio de  $\kappa$ :  $\kappa = 372,1 - 385,2 \text{ W}/(\text{K m})$ ,  $\bar{\kappa} = 378,65 \text{ W}/(\text{K m})$ ,  $c = 0,385 \text{ J}/(\text{gK})$ , y  $\rho = 8,96 \text{ gr}/\text{cm}^3$ .

## 2.2 Solución unidimensional de la ecuación del calor

Retomamos el problema de la barra para hallar explícitamente su solución bajo las siguientes condiciones:

- La varilla tiene  $\pi$  (!!) unidades de longitud, ubicada entre  $[0, \pi]$
- La temperatura inicial a  $t = 0$  está dada por una función conocida  $f(x)$

$$T(x, 0) = f(x)$$

- Los extremos de la barra se mantienen a temperatura nula en todo momento,

$$T(0, t) = T(\pi, t) = 0$$

con  $t \geq 0$ .

Dada la estructura de la ecuación de onda, proponemos la siguiente factorización,

$$T(x, t) = u(x)v(t),$$

esto es, **separación de variables**.

Reemplazando en

$$a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t},$$

resulta

$$\frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{v'(t)}{v(t)} = -\lambda$$

con  $\lambda > 0$ .

Luego,

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0 \\ v' + \lambda a^2 v &= 0 \end{aligned}$$

con las condiciones  $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$  reemplazadas por  $u(0) = u(\pi) = 0$ .

Por el aprendizaje del capítulo 1 sabemos que  $\lambda = n^2$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , y

$$u_n(x) = \sin nx$$

Luego, la ecuación para  $v$  resulta

$$v' + (na)^2 v = 0$$

cuyas soluciones son de la forma,

$$v_n(t) = e^{-n^2 a^2 t}$$

Componiendo  $T = uv$  resulta,

$$T_n(x, t) = e^{-n^2 a^2 t} \sin nx$$

son soluciones de la ecuación de calor que satisfacen las condiciones  $T(0, t) = T(\pi, t) = 0$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , así como combinaciones lineales de ellas.

Luego, proponemos como solución general la siguiente serie con el requerimiento que verifique la condición inicial  $T(x, 0) = f(x)$ ,

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2 a^2 t} \sin nx$$

con

$$T(x, t = 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

**Actividad 7:** por qué la serie no arranca desde cero?

De modo que sólo resta hallar los coeficientes  $b_n$ , pero esto fue hecho en la sección anterior

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx$$

**Actividad 8:** Repetir las cuentas suponiendo que las condiciones de borde son

$$T(0, t) = T(L, t) = 0.$$

**Rta.:** Deberían obtener

$$\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$$

y

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) f(x) dx.$$

**Actividad 9:** Qué dimensión tiene  $n$ ?. Cómo se compara con la dimensión de  $n$  para la barra de longitud  $\pi$ ?.

## 2.3 Ecuación de Laplace

La versión tridimensional de la ecuación del calor en coordenadas cartesianas  $r = (x, y, z)$  resulta

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Para el caso particular del régimen estacionario,  $T = cte$  y luego  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , lo cual define la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

denominada **ecuación de Laplace**.

**Definición de Laplaciano:** El operador diferencial en la ecuación de Laplace suele notárselo de alguna de las siguientes formas,

- $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$

y se lo llama laplaciano.

**Expresiones del Laplaciano en 3D:** El operador laplaciano es expresado en coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$  o polares  $(\rho, \theta, \phi)$  (ver Fig. 2.3) para tratar problemas con simetría cilíndrica o esférica, respectivamente.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Estas expresiones pueden obtenerse partiendo del Laplaciano en coordenadas cartesianas y haciendo las transformaciones a coordenadas cilíndricas y esféricas (Fig. 2.3).

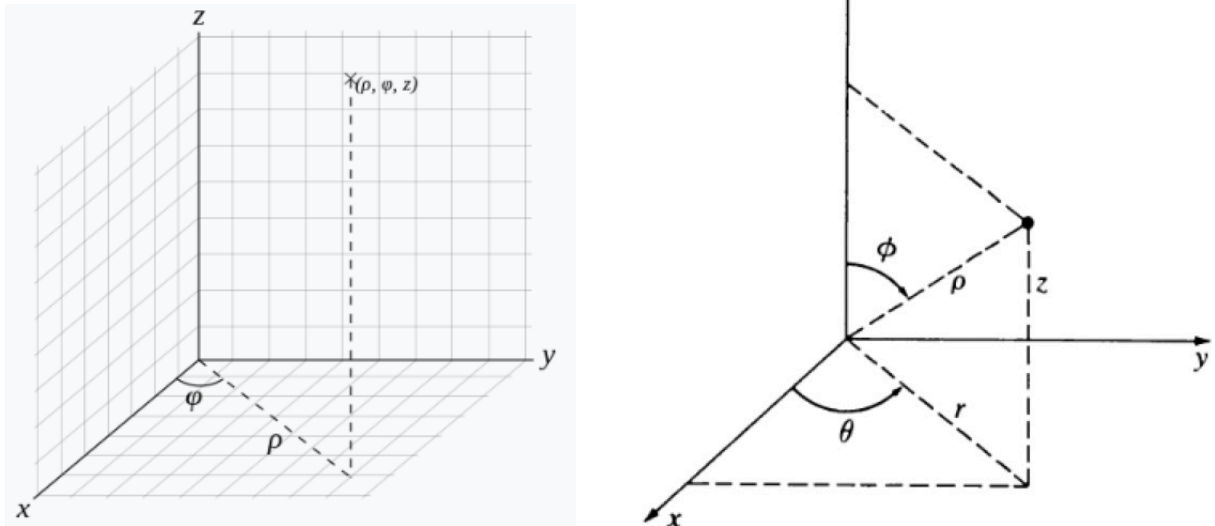


Figure 2.3:

## 2.4 Aplicación: problema de Dirichlet

Consideremos en esta sección la solución de la ecuación de Laplace bidimensional con simetría radial. Esto es, hallaremos las *funciones armónicas* en dos dimensiones para el problema de Dirichlet. Para ello haremos uso de alguna de las técnicas que aprenderemos en el álgebra del análisis complejo en el módulo siguiente.

**Definición del problema de Dirichlet:** dada un región  $R$  (dominio abierto) en el plano, limitada por una curva cerrada simple  $C$ , y dada una función  $f(P)$  definida y continua en los puntos  $P$  de  $C$ , se pide hallar una función  $w$ , continua en  $R$  y en  $C$ , que verifique la ecuación de Laplace en  $R$  y coincida con  $f(P)$  en  $C$ .

**Veamos..**

Consideremos que  $C$  es el círculo  $|z| = 1$  centrado en el origen, donde  $z = x + iy$ , con  $(x, y)$  las coordenadas cartesianas e  $i$  la unidad compleja. Luego, la región  $R$  es el interior de la circunferencia unidad. Dada la simetría del problema es conveniente usar la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0$$

Sea  $w(r, \theta)$  una función continua en  $R$  y  $C$  y que satisface la ecuación de Laplace para  $0 \leq r < 1$ . Además  $w(r = 1, \theta)$  es continua y de período  $2\pi$  en el dominio  $[-\pi, \pi]$ , esto es,

$$w(1, -\pi) = w(1, \pi),$$

tal que

$$w(1, \theta) = f(\theta),$$

con  $f(\theta)$  conocido.

Si, en particular  $w$  fuera la temperatura, el problema de Dirichlet aquí tratado, daría  $T(r, \theta)$  estacionaria, esto es, independiente del tiempo, de una placa circular cuando la temperatura en el contorno es prefijada por la ley  $f(\theta)$ . Por ejemplo, si  $T_1$  es la temperatura en el semi-hemisferio inferior y  $T_2 (\neq T_1)$  en el superior, con  $T_1$  y  $T_2$  constantes, después de un transitorio, la placa tendrá un patrón de temperatura dado por  $T(r, \theta)$  que resulta de resolver el problema de Dirichlet.

**Actividad 10:** Rehacer los cálculos siguientes suponiendo el dominio  $[0, 2\pi]$ , con la condición de continuidad  $w(1, 0) = w(1, 2\pi)$ .

**Solución:** siguiendo con la estrategia de las secciones anteriores, buscamos soluciones  $w(r, \theta)$  que sean separables,

$$w(r, \theta) = u(r)v(\theta)$$

Reemplazando en la versión polar de la ecuación de Laplace, resulta

$$u''(r)v(\theta) + \frac{1}{r}u'(r)v(\theta) + \frac{1}{r^2}u(r)v''(\theta) = 0$$

Reacomodando los términos convenientemente, de modo que las variables  $r$  y  $\theta$  queden juntas, resulta

$$\frac{r^2u''(r) + ru'(r)}{u(r)} = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \lambda$$

con  $\lambda$  constante indeterminada.

Luego,

$$\begin{aligned} v'' + \lambda v &= 0 \\ r^2u''(r) + ru'(r) - \lambda u(r) &= 0 \end{aligned}$$

Por las secciones anteriores conocemos que  $\lambda > 0$  y

$$v(\theta) = a \cos \sqrt{\lambda}\theta + b \sin \sqrt{\lambda}\theta$$

Dado  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  y la condición de continuidad (periodicidad), debido a la simetría del problema  $w(r, -\pi) = w(r, \pi)$ , resulta

$$\begin{aligned} v(-\pi) &= v(\pi) \\ a \cos(-\sqrt{\lambda}\pi) + b \sin(-\sqrt{\lambda}\pi) &= a \cos(\sqrt{\lambda}\pi) + b \sin(\sqrt{\lambda}\pi) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}\pi) &= \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0 \end{aligned}$$

lo que resulta en  $\sqrt{\lambda} = n$ , con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Luego,

$$v_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

donde  $v_n(\theta)$  verifica ser continua y periódica en  $2\pi$ . Notemos que ahora  $n = 0$  es una solución posible. Si usamos  $[\theta] = rad$ , entonces  $[n] = 1$ .

**Actividad 11:** (i) cuál sería la unidad de  $n$  si  $[\theta] = \text{°}$ ? (ii) cómo serían los autovalores si  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ?

La ecuación para  $u$  se reduce a,

$$r^2u''(r) + ru'(r) - n^2u(r) = 0$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Esta ecuación se llama ecuación de Euler equidimensional y tiene por soluciones,

$$\begin{aligned} u_0 &= A + B \ln r & n &= 0 \\ u_n &= Ar^n + Br^{-n} & n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

con  $A$  y  $B$  constantes.

Para que  $w(0, t)$  sea continua, debe serlo  $u(r)$  para  $r = 0$ , luego  $B = 0$ ,

$$u_n(r) = r^n$$

con  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Juntando las soluciones de  $v$  y  $u$  tenemos,

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{a_0}{2} \\ w_1 &= r(a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta) \\ w_2 &= r^2(a_2 \cos 2\theta + b_2 \sin 2\theta) \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde hemos reemplazado  $a_0$  por  $\frac{a_0}{2}$  para ser consistente con la convención usada para definir los coeficientes en la serie de Fourier.

**Actividad 12:** Suponer  $w_0 = a_0$ , con  $a_0$  el coeficiente de Fourier  $a_n$  definido en el dominio  $[-\pi, \pi]$  para  $n = 0$  y ver con que se encuentran.

Luego, asumiendo la convergencia de la serie, escribimos para la solución del problema de Dirichlet,

$$w(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

con  $a_n$  y  $b_n$  coeficientes de Fourier, los cuales resultan de la condición en el borde del disco

$$f(\theta) = w(1, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

Esto es,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \end{aligned}$$

**Actividad 13:** Deducir los coeficientes de Fourier premultiplicando por las funciones trigonométricas adecuadas.

## 2.5 Integral de Poisson

Podemos dar una expresión más compacta de la solución  $w(r, \theta)$  para el problema de Dirichlet que no implique calcular un número ingente de integrales que aparecen en los coeficientes de la serie. Esta expresión se obtiene usando el álgebra del análisis complejo y se denomina *integral de Poisson*.



Para ello, comenzamos reemplazando los coeficientes de Fourier en la serie,

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \cos n\theta' d\theta' \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \sin n\theta' d\theta' \sin n\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') (\cos n\theta' \cos n\theta + \sin n\theta' \sin n\theta) d\theta' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') d\theta' + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \cos n(\theta' - \theta) d\theta' \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta' - \theta) \right] d\theta'
 \end{aligned}$$

Tratemos el corchete en la variable compleja,

$$[\dots] = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta' - \theta) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right)$$

donde hemos usado

$$z^n = r^n [\cos n(\theta' - \theta) + i \sin n(\theta' - \theta)].$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 [\dots] &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{1-z} \right) = \operatorname{Re} \left[ \frac{1+z}{2(1-z)} \right] \\
 &= \operatorname{Re} \left[ \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2} \right] \\
 &= \frac{1-|z|^2}{2|1-z|^2} \\
 &= \frac{1-r^2}{2(1-2r \cos(\theta' - \theta) + r^2)}
 \end{aligned}$$

la serie ha sido completada con el término  $n = 0$  y hemos usado la suma de la serie geométrica.

Reemplazando en la integral, resulta

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(\theta' - \theta) \right] d\theta' \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') \frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta' - \theta) + r^2} d\theta'
 \end{aligned}$$

Esta forma de escribir la solución al problema de Dirichlet se denomina **integral de Poisson**.

La integral de Poisson es la expresión de la función armónica  $w(r, \theta)$  en toda la región  $R$  en término de la función dada  $f(\theta')$  en la frontera  $C$  y de la función

$$\frac{1-r^2}{1-2r \cos(\theta' - \theta) + r^2}.$$

**Observación:** El valor de la función  $w(r, \theta)$  en  $r = 0$  resulta ser el promedio del valor definido en la frontera,

$$w(r = 0, \theta) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') d\theta'}{2\pi},$$

donde  $\theta$  en  $w(0, \theta)$  carece de significado para  $r = 0$  y  $2\pi$  es la longitud del arco donde se promedia  $f(\theta')$ .

## 2.6 Propiedades de la ecuación de Laplace

El estudio de la ecuación de Laplace constituye la rama de las matemáticas denominada *teoría del potencial*. En secciones anteriores hemos introducido la notación  $\nabla^2$  para el operador Laplaciano

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

y hemos definido la *ecuación de Laplace* como

$$\nabla^2 U = 0$$

Hemos visto que la ecuación de Laplace aparece en el régimen estacionario de la ecuación del calor. Esta misma ecuación también aparece en el estudio del efecto que produce una distribución de masa sobre otra y similarmente en una distribución de carga. Consideremos como ejemplo el caso gravitatorio. Sean  $m_1, m_2, \dots, m_n$  y  $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$  las masas y sus posiciones, respectivamente. El potencial en  $\bar{r} = (x, y, z)$  es,

$$U = \sum_{i=1}^n \frac{Gm_i}{|\bar{r} - \bar{r}_i|}$$

Tomando las derivadas parciales, se encuentra

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

esto es, el potencial gravitatorio satisface la ecuación de Laplace. Nótese que la ecuación a la que se llega no depende ni de las masas de las partículas, ni de sus posiciones.

**Actividad 14:** Deducir la ecuación anterior.

Luego, las funciones  $U$  también son funciones *armónicas*. En el análisis complejo usaremos el concepto *armónico* para indicar una de las propiedades de funciones analíticas  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Allí mostramos que tanto  $u$  como  $v$  son armónicas, esto es, satisfacen la ecuación de Laplace. La ecuación de Laplace tiene tantas aplicaciones que su estudio constituye una rama del análisis denominada **teoría del potencial**.

**Propiedad del valor medio:** Las soluciones armónicas tienen la propiedad que su valor en el centro de su dominio coincide con el promedio de sus valores sobre su superficie.

Por ejemplo, para el Laplaciano *unidimensional* tenemos,

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \Rightarrow U(x) = mx + b. \quad (2.1)$$

La solución armónica  $U(x)$  satisface

$$U(\bar{x}) = \frac{U(x_1) + U(x_2)}{2},$$

con  $\bar{x} = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2}$  el punto medio del intervalo  $[x_1, x_2]$ .

**Actividad 15:** Deducir la ecuación anterior.

Para el Laplaciano en *dos dimensiones* hemos encontrado, al resolver el problema de Dirichlet, en la sección anterior,

$$w(r = 0, \theta) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta') d\theta'}{2\pi}$$

donde  $f(\theta')$  es el valor de la función el contorno, mientras  $2\pi$  es la longitud del contorno.

**Interpretación física del Laplaciano:** En forma algo más general, la magnitud

$$\nabla^2 U$$

puede interpretarse como una medida cualitativa del *apartamiento* entre (i) el valor de  $U$  promediado en la superficie y (ii) el valor de  $U$  en el centro. De este modo, si  $\nabla^2 U = 0$ , ambos valores (i) y (ii) coinciden, como mostramos en los dos ejemplos anteriores.

Para asignarle una interpretación a los casos en que  $\nabla^2 U \neq 0$ , consideremos que  $U$  representa la temperatura  $T(x, t)$ . Consideremos la situación  $\nabla^2 T > 0$  en cierto punto  $x_0$  al tiempo  $t$ . Dado que  $\nabla^2 T$  representa la diferencia entre el promedio en un entorno de  $x_0$  y el valor de  $T$  en  $x_0$ , tenemos

$$\int T dS - T(x_0) > 0 \Rightarrow \int T dS > T(x_0),$$

esto es, la temperatura en  $x_0$  es menor que en su entorno (pues el promedio de esos valores resulta ser mayor que el valor en  $x_0$ ). Esto implica que el calor fluirá *hacia*  $x_0$ , luego

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x_0} > 0$$

Esta conclusión es consistente con la ecuación de calor

$$a^2 \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t},$$

y el haber supuesto  $\nabla^2 T > 0$ .