Métodos Matemáticos de la Física II (F1810)
3er año Lic. Física.
1er Semestre 2023

Docentes:
Federico Torresi
Alejandro Mezio
Rodolfo (Rolo) M. Id Betan
Por favor, reportar errores o comentarios a:
idbetan@fceia.unr.edu.ar

May 1, 2023

Contents

Part I

Ecuaciones en derivadas parciales

Part II

Análisis Complejo

Part III

Análisis funcional

Part IV

Espacios

Chapter 10

Espacios

Modificado: 2023.05.01

Contenido sección Espacios normados: Definición de norma y espacio normado. Desigualdad de Cauchy-Schwarz. Convergencia de sucesiones y series en espacios normados. Conjuntos abierto y cerrado. Punto límite de un conjunto. Clausura de un conjunto. Concepto de conjunto denso. Sucesión de Cauchy. Definición de espacio completo. Definición de espacio de Banach. Funciones de cuadrado integrable. Definición del espacio L_2. Integral de Lebesgue.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 4.
Dedicación: una (1) clase.

Contenido sección operador integral: Operador integral, núcleo integral y operador integral en L_2. Transformación de una ecuación diferencial en una integral.
Material Complementario: Puntos fijos de una transformación y contracción. Ecuaciones integrales y su aplicación al problema de Sturm-Liuville.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 5.
Dedicación: media (0.5) clase.

Contenido sección Espacio de Hilbert: Espacios con producto interno. Desigualdad de Schwartz. Definición de norma y ángulo. Ortogonalidad. Base ortogonal. Espacio de Hilbert. Ortonormalización de Gram-Schmidt. Expansión ortogonal. Coeficientes de Fourier generalizados. Mejor aproximación. Relación de Parseval. Teorema de Riesz-Fischer. Descomposición ortogonal. Teorema de Riez para funcionales en Hilbert. Convergencia débil.
Material complementario: Funcionales en espacio de Hilbert. Convergencia débil.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 7.
Dedicación: una (1) clase.

10.1 Espacios normados

En la resolución de problemas por métodos aproximados, nos interesa cuantificar cuan cerca la solución aproximada se encuentra de la exacta. Cuando la solución forma parte de un espacio vectorial, esta información viene dada por cierta definición de longitud, que llamamos norma, equivalente al módulo en los espacios de números real y complejo.

10.1.1 Espacio vectorial con norma

Definición de espacio normado: Un espacio normado es un espacio vectorial V con una dada norma.

Definición de norma: Una norma sobre un espacio vectorial V es una regla que, dada cualquier $x \in V$, asigna un número real $||x||$, tal que

- $||x|| > 0$ si $x \neq 0$, y $||0|| = 0$
- $||ax|| = |a|\,||x||$ para cualquier $x \in V$ y cualquier escalar a
- $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ para cualquier $x, y \in V$

Ejemplos:

- $\mathfrak{R}^n$ es un espacio normado real con

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

- $\mathfrak{R}^n$ con

$$||x|| = \max |x_i|\,,$$

  es un espacio normado real diferente al anterior.

- $\mathfrak{C}^n$ es un espacio normado complejo con

$$||z|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}\,.$$

- El espacio de las funciones continuas $C[a,b]$ es un espacio normado con

$$||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}\,.$$

  Donde f podría bien ser funciones complejas. La norma se la denomina **en media** o de **cuadrado integrable**.

- El espacio de las funciones continuas $C[a,b]$ con

$$||f|| = \sup\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}\,,$$

  es un espacio normado[1]. Esta norma suele llamársela **norma uniforme**.

Observación: Como en el caso de vectores, aún cuando los dos últimos espacios normados $C[a,b]$ tienen los mismos elementos, ellos son considerados espacios diferentes. Esto es, la definición de norma afecta a la convergencia, podría ser que una sucesión converja en una norma pero no en otra (ver el ejemplo de la siguiente sección)

[1]El supremo de un conjunto de números representa a su valor máximo en el sentido que el máximo podría no pertenecer al conjunto. Por ejemplo, $\sup(0,1) = 1$, $\sup(1 - e^{-x^2}) = 1$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz para vectores: Para cualesquiera números complejo $z_1, \cdots, z_n$, $w_1, \cdots, w_n$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} z_i \bar{w}_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales: Para cualesquiera funciones f y g tal que las integrales existan, se verifica,

$$\left|\int_a^b f(t)\bar{g}(t)\, dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2\right)$$

Lema que demuestra la primera condición de norma para $f \in C$: Si f es una función continua y $\int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$, entonces $f(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$

10.1.2 Convergencia

El objeto final de los espacios normados es tratar el problema de las aproximaciones a las soluciones de diferente tipos de ecuaciones. Esto es, mediante algún procedimiento uno obtiene iterativamente soluciones que espera que tiendan a la solución exacta. Luego, se necesita de un procedimiento para analizar cuan buena es la aproximación. En espacios normados, uno considera que dos elementos están cerca cuando la norma de su diferencia es pequeña.

Definición de convergencia: Sea $X, x_1, x_2, \cdots \in N$, con N un espacio normado. Se dice que $x_n \to X$ cuando $n \to \infty$ si, dado $\epsilon > 0$, existe M tal que $||x_n - X|| < \epsilon$ para todo $n > M$.

Definición alternativa: Sea $X, x_1, x_2, \cdots \in N$, con N un espacio normado. Se dice $x_n \to X$ cuando $n \to \infty$ si $||x_n - X|| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Propiedades: Las propiedades usuales de los límites son también válidas en espacios normados, por ejemplo,

- La suma de dos sucesiones convergentes, converge a la suma de sus límites.
- Cualquier sub-sucesión de una sucesión convergente, converge al mismo límite.
- Un múltiplo constante de una sucesión convergente, converge al múltiplo del límite de la sucesión.

Definición de convergencia de series: Sea $X, x_1, x_2, \cdots \in N$, con N un espacio normado. Se dice que la serie $x_1 + x_2 + \cdots$ converge a X, y se escribe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X$, si la sucesión $(s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i)$ converge a X. Se dice que X es la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Propiedades: Las propiedades usuales de las series son también válidas en espacios normados, por ejemplo, la suma de dos series convergentes, converge a la suma de sus sumas.

Ejemplos:

- En el espacio $C[a,b]$, con la norma $||f|| = \sup\{|f(t)| : a \leq t \leq b\}$, se dice que una sucesión de funciones f_n converge a la función F si

$$\sup\{|f_n(t) - F(t)| : a \leq t \leq b\} \to 0\,.$$

  Esta es la forma usual de definir la *convergencia uniforme*.

- *Convergencia en media:* En el espacio $C[a,b]$, con la norma $||f|| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, se dice que una sucesión de funciones f_n converge a la función F si

$$||f_n - F||^2 = \int_a^b |f_n(t) - F(t)|^2 dt \to 0\,.$$

Ejemplo de convergencia con diferentes normas: Sea $f_n(x) = e^{-nx}$, con $n = 1, 2, \cdots$. Luego, $f_n \in C[0,1]$. Para cada $x \in [0,1]$, cuando $n \to \infty$ resulta,

$$f_n(x) \to F(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Si consideramos la norma en media, resulta $f_n \to F$,

$$||f_n - F||^2 = \int_0^1 |f_n(x) - F(x)|^2 dx = \int_0^1 |f_n(x)|^2 dx = \left.\frac{e^{-2nx}}{-2n}\right|_0^1 = \frac{1 - e^{-2n}}{n}$$

lo cual tiende a cero cuando $n \to \infty$, pero F no es continua, luego $F \notin C[0,1]$.

Si, en cambio, consideramos la función

$$F_0(x) = 0$$

para cada $x \in [0,1]$, la sucesión f_n converge en la norma en media a F_0, con $F_0 \in C[0,1]$.

Por otro lado, f_n no converge en la norma uniforme, siendo que $\sup(|f_n(x) - F_0(x)|) = \sup(|f_n(0) - F_0(0)|) = 1$ para todo n, y luego la norma no va a cero cuando $n \to \infty$. Esto da un ejemplo, donde una sucesión converge en un espacio con cierta norma y no con otra.

10.1.3 Conjuntos abierto y cerrado

Conjunto abierto: Un subconjunto S de un espacio normado se dice abierto si para cada $x \in S$ existe un $\delta > 0$ tal que $y \in S$ siempre que $||x - y|| < \delta$. Esto es, cada punto de S puede ser rodeado por una esfera de puntos todos de S. Por ejemplo, en $\mathcal{R}^n$, la esfera $S = \{x \in \mathcal{R}^n : ||x - a|| < 1\}$, con a fijo, es un subconjunto abierto. Ver Fig. 10.1.

Punto límite de S: Si S es un sub-conjunto de un espacio normado, decimos que x es un punto límite de S (no necesariamente $x \in S$), si existe una sucesión (y_n) de elementos de S tal que $y_n \to x$, y para cada n, $y_n \neq x$.

Ej.: La función discontinua $F(x)$ es un punto límite de la sucesión $f_n(x) = exp(-nx)$.

Conjunto cerrado: Un subconjunto S de un espacio normado se dice que es cerrado si contiene todos sus puntos límites.

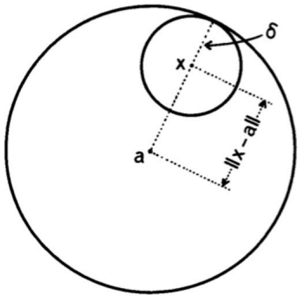


Figure 10.1:

Sobre la completación de un conjunto: para cualquier conjunto S en un espacio normado, la **clausura** de S es la unión de S con el conjunto de todos los puntos límites de S. Se denota la clausura de S como $\bar{S}$.

Propiedades de la clausura:

- S está contenido de $\bar{S}$.
- Si S es cerrado, entonces $S = \bar{S}$
- Para cualquier conjunto S, $\bar{S}$ es cerrado.
- Si $S \subset T$, entonces $\bar{S} \subset \bar{T}$.
- $\bar{S}$ es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a S.

Conjunto denso: Sean S y T subconjuntos de un espacio normado, con $S \subset T$. S es denso en T si para cada $t \in T$ y cada $\epsilon > 0$ existe un $s \in S$ con $||s - t|| < \epsilon$. Esto es, para cada elemento en $t \in T$, existen elementos en S de modo que uno puede estar tan cerca de t como quiera.

Comentarios:

- Podría ser que los elementos de S estén densamente distribuidos entre los elementos de T, como por ejemplo ocurre entre los racionales (S) y los reales (T).
- Cada conjunto S es denso en su clausura $\bar{S}$. Además $\bar{S}$ es el conjunto más grande en el cual S es denso.

10.1.4 Espacio de Banach

En esta sección introducimos una definición de convergencia alternativa que no hace uso del límite de la sucesión, también introducimos la noción de espacio completo.

Definición de sucesión de Cauchy: Una sucesión de Cauchy de elementos de un espacio normado es una sucesión (x_n) tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un número N tal que $||x_n - x_m|| < \epsilon$ para todo $n, m > N$.

Ejemplo: Sea $g_n(x) = \tanh(nx)$, con $n = 1, 2, \cdots$.

$$|\tanh mx - \tanh nx| = \left|\frac{\sinh(m-n)x}{\cosh mx \cosh nx}\right| \leq \left|\frac{\sinh mx}{\cosh mx \cosh nx}\right|$$
$$\leq \operatorname{sech} nx$$

donde hemos usado $|\tanh mx| < 1$ y $m > n$.

Entonces,

$$||g_m - g_n||^2 \leq \int_{-1}^{1} \operatorname{sech}^2 nx \, dx = \frac{2 \tanh n}{n} \to 0$$

cuando $n \to \infty$, donde hemos usado la norma en media. Esto muestra que $g_n(x) = \tanh(nx)$ es una suseción de Cauchy.

Notemos, por otro lado que $g_n(x) \in C[-1,1]$ y que converge, con la norma en media, a la función $sig(x) \notin C[-1,1]$. Luego, la sucesión de funciones $g_n(x)$ no converge en el espacio $C[-1,1]$ con la norma en media. Esto implica, que ser una sucesión de Cauchy no implica la convergencia en el espacio normado. Pero si vale la inversa que enunciamos en el siguiente teorema.

Teorema sobre las sucesiones convergentes: Cada sucesión convergente en un espacio normado es una sucesión de Cauchy.

Definición de espacio completo: Un espacio normado es completo si cada sucesión de Cauchy es convergente, e incompleto si no.
Ejemplo: $C[a,b]$ con la norma en media no es completo, porque la sucesión $g_n(x) \in C[-1,1]$ es de Cauchy, pero la sucesión g_n no converge en $C[-1,1]$.

Espacio de Banach: Un espacio normado completo es denominado un espacio de Banach.

Ejemplos: (el libro los presenta como teoremas)

- Los espacios normados $\mathcal{R}^n$ y $\mathcal{C}^n$, con la norma $(\sum |x_i|^2)^{1/2}$ son completos.
- El espacio $C[a,b]$ con la norma $||f|| = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$ es completo.

10.1.5 Espacio L_2

Hemos visto que $C[a,b]$ con la norma en media no es completo (recordar por ejemplo, $g_n(x) = tanh(nx)$), pero es posible agregarle al espacio incompleto los elementos 'faltantes', definiendo de este modo un nuevo espacio el cual resulta completo e incluye al espacio original. Esto es enunciado en el siguiente teorema.

Teorema sobre la completación de un espacio no completo: Para cualquier espacio normado N existe un espacio completo Ω de modo que N es un subespacio denso de Ω. El espacio Ω es denominado la completación de N.

Definición del espacio L_2: El espacio $L_2[a,b]$ denota la completación de $C[a,b]$ con la norma de la integral del cuadrado (o en media). De este modo L_2 contiene todas las funciones que son el límite de funciones continuas en el sentido de convergencia en media. Por ejemplo, el límite de $g_n(x) = \tanh(nx)$, esto es, la función $sig(x) \in L_2[-1,1]$.

Observación: por ser L_2 la completación de C con la norma en media, C es denso en L_2.

Definición de función cuadrado integrable: Cada función f para la cual $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$ existe es denominada función de cuadrado integrable en $[a,b]$.

Observaciones:

- L_2 puede contener ciertas funciones con discontinuidad infinita, siempre que la discontinuidad sea los suficientemente suave de modo que el cuadrado de la función sea integrable. Por ejemplo, $x^{-1/3} \in L_2[a,b]$, pero $x^{-2/3} \notin L_2[a,b]$. Pues, $\int_a^b |x^{-1/3}|^2 dx = x^{1/3}\Big|_a^b < \infty$, mientras $\int_a^b |x^{-2/3}|^2 dx = x^{-1/3}\Big|_a^b \not< \infty$ (si contiene el origen).
- Cada función f de cuadrado integrable pertenece a L_2.
- L_2 también contiene funciones que no son integrables según la definición de integral de Riemann (que la hemos estado usando hasta el momento) pero que sí lo son usando otra definición de integral. Esta integral es la integral de Lebesgue y la introducimos en la siguiente sección.
  Un ejemplo de estas funciones es $D(x) = 1$ para x racional y $D(x) = 0$ para x irracional.

Sobre los problemas de L_2: Al verificarse que el conjunto de las funciones de cuadrados integrables sea un espacio normado surge un problema con la condición $||f|| = 0$. Dado que existen muchas funciones no nulas que dan la norma del cuadrado cero, no se verifica la condición que la norma cero implica $f = 0$, pues cualquier función que sea nula excepto en un número finito de puntos dará, $\int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0$. La forma de resolver esta inconsistencia es utilizar clases de equivalencia.

Clase de equivalencia de funciones: dos funciones f y g se dicen equivalentes si

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\,dx = 0\,,$$

esto es equivalente a decir que f y g son *iguales en casi todo punto.*

De este modo, las funciones se dividen en clase de equivalencia, de modo que cada clase está formada por todas las funciones equivalentes a una dada función. Así la clase de las funciones nulas son las equivalente a la función $f = 0$.

Definición rebosada del espacio L_2: El espacio $L_2[a,b]$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia. Donde el elemento cero del espacio es la clase de funciones cuya integral del cuadrado es cero,

$$\int_a^b |f(x) - 0|^2\,dx = \int_a^b |f(x)|^2\,dx = 0\,,$$

con $L_2[a,b]$ un espacio de Banach.

Definición de L_2 en el dominio infinito: Se define $L_2(-\infty,\infty)$ al espacio de funciones tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx \quad \text{converge}\,.$$

$L_2(-\infty,\infty)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||f|| = (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx)^{1/2}\,.$$

10.1.6 Integral de Lebesgue

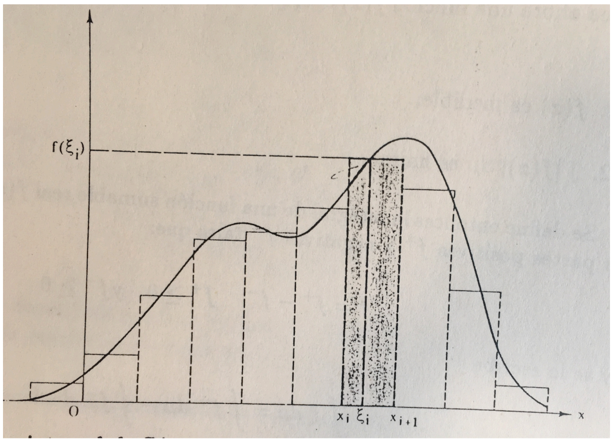
El objetivo de esta sección es introducir la *integral de Lebesgue*, la cual es más simple y general que la usual integral de Riemann. Podría ocurrir, por ejemplo, que ciertas funciones no estén definidas usando la integral de Riemman pero sí usando la integral de Lebesgue. Por otro lado, podría suceder que el límite de una sucesión de funciones integrables no sea integrable con la definición de integral de Riemann, esto es,

$$\lim_{k\to\infty}\left[\int f_k(x)dx\right] \neq \int f(x)dx\,,$$

donde cada valor del corchete está bien definido pero el de la derecha no existe.

Integral de Riemann: Recordemos que la integral de Riemann se define como el límite de sumas de una partición de la abscisa.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$



Resulta que el límite no existe más que si $f(x)$ es bastante regular, por ejemplo, con un número finito de discontinuidades.

Para tratar funciones más generales, por ejemplo, la función de Dirichlet $D(x)$,

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathcal{Q} \\ 0 & x\in\mathcal{I} \end{cases}$$

(con $\mathcal{Q}$ significando los números racionales e $\mathcal{I}$ los irracionales), y para obtener funciones límites que también sean integrales; se introduce la integral de Lebesgue.

Integral de Lebesgue: La integral de Lebesgue reemplaza la partición en las abscisa por una partición en la ordenada, como se muestra en la figura 10.2.

Luego, la integral se define multiplicando la medida de la preimagen E_i de $\varphi_i = f(x_i)$ con el valor de $f(x)$ en la partición i,

$$\int_a^b f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\mu(E_i)$$

Para $x\in\mathcal{R}$ la medida es

$$\mu(x_a,x_b) = x_b - x_a$$

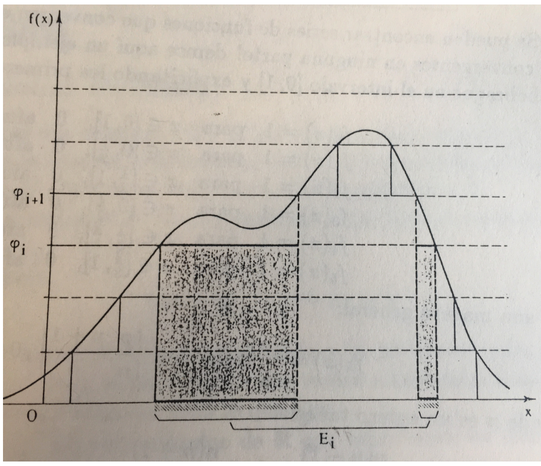


Figure 10.2:

con $x_b > x_a$ y, si E es la unión de $E_1, E_2, \cdots, E_k$ intervalos disjuntos, $\mu(E) = \sum_{j=1}^{k} E_j$.

Observación: Cuando la función $f(x)$ es integrable según la definición de Riemann, coincide con la integral de Lebesgue.

Algunas propiedades: Listamos aquí algunas de las propiedades de la integral de Lebesgue.

- **Teorema de Lebesgue:** si una serie de funciones $f_k(x)$, con x real, converge puntualmente a $f(x)$ cuando k tiende a infinito, y si existe una función $g(x)$ positiva tal $|f_k(x)| \leq g(x)$ para todo k, entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \int f_k(x)dx = \int \lim_{k\to\infty} f_k(x)dx = \int f(x)dx$$

  Esta propiedad permite demostrar fácilmente la completitud del espacio L_2.

- **Teorema de Fubini-Lebesgue:** Sea $f(x, y)$ una función de x e y. Su integral con respecto a la medida de Lebesgue en $\mathcal{R}^2$ se escribirá $\int f(x, y)dxdy$. Si $f(x, y) \geq 0$, se tendrá siempre

$$\int f(x, y)dxdy = \int dx \int f(x, y)dy = \int dy \int f(x, y)dx$$

  Esta propiedad nos permite reducir integrales múltiples en integrales simples, de modo, que la integral no depende de la elección hecha como primera variable.

10.2 Operador Integral

En esta sección introducimos la noción de operador integral en el espacio normado L_2. Como material complementario se introduce la noción de puntos fijos de una transformación.

Contenido sección operador integral: Operador integral, núcleo integral y operador integral en L_2. Transformación de una ecuación diferencial en una integral.
Material Complementario: Puntos fijos de una transformación y contracción. Ecuaciones integrales y su aplicación al problema de Sturm-Liuville.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 5.
Dedicación: media (0.5) clase.

Definición de operador y núcleo integral: Sea $C[a, b]$ un espacio real o complejo de las funciones continuas. Para cada función dada $K : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ o $K : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{C}$, se puede definir la transformación $T : C[a, b] \to C[a, b]$,

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$$

para toda $f \in C[a, b]$. El operador T es denominado *operador integral lineal* sobre $C[a, b]$, mientras K es denominado *núcleo.*

Definición de operador integral en L_2:

- Si K es continua y $f \in L_2[a, b]$, entonces, $Tf = \int_a^b K(x, y)f(y)dy$ es una función de L_2.
- Aún cuando K no es continua, pero satisface $\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy < \infty$, resulta que $Tf \in L_2$.

Veamos en detalle el segundo caso, pues permite deducir una cota para la función resultante Tf. Dado que

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dxdy < \infty \, ,$$

entonces también vale

$$\begin{aligned}
\infty > \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \, ||f||^2 dxdy &= \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \int_a^b |f(y')|^2 dy' dxdy \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b |K(x, y)|^2 dy \int_a^b |f(y')|^2 dy' \right] dx \\
&\geq \int_a^b \left| \int_a^b K(x, y)f(y)dy \right|^2 dx
\end{aligned}$$

Luego, $\int_a^b \left| \int_a^b K(x, y)f(y)dy \right|^2 dx < \infty$, por lo que Tf es de cuadrado integrable.

Cota para Tf: de la desigualdad anterior puede extraerse la siguiente relación,

$$||Tf||^2 \leq \int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \, ||f||^2 dxdy$$

donde hemos escrito $||Tf||^2 = \int_a^b \left| \int_a^b K(x, y)f(y)dy \right|^2 dx$.

10.2.1 Transformación de una ecuación diferencial en una integral

Tomemos como ejemplo la, así llamada, ecuación de Sturm-Liuville, y convirtámosla en una ecuación integral (específicamente, de punto fijo, ver material complementario) con un operador integral.

$$u''(x) + \lambda f(x)u(x) = 0$$

con condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$.

La ecuación diferencial puede ser escrita de la siguiente forma

$$-u''(x) = F(x)$$

con $F(x) = \lambda f(x)u(x)$.

Usando como solución la función de Green (notar las condiciones de contorno homogéneas),

$$-g''(x, y) = \delta(x - y)$$

podemos escribir las soluciones como

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)F(y)dy \\ &= \int_0^1 g(x, y)\lambda f(y)u(y)dy \\ &= \lambda \int_0^1 K(x, y)u(y)dy \end{aligned}$$

con $K(x, y) = g(x, y)f(y)$.

De este modo hemos transformado la ecuación diferencial en un problema (de punto fijo, ver material complementario) que puede resolverse en forma iterativa

$$u = Tu$$

con T un operador integral con núcleo $K(x, y)$. Para que la sucesión converja el núcleo debe verificar ciertas condiciones que son introducidas en la sección de Material Complementario bajo el título Ecuaciones Integrales. Allí también se da un ejemplo práctico).

10.2.2 Material Complementario

Definición de punto fijo: Las soluciones x a la ecuación

$$x = Tx$$

son denominadas puntos fijos de la transformación T, con x un elemento del espacio normado.

El interés en ecuaciones de la forma $x = Tx$ radica en el hecho que muchas ecuaciones de la Física Matemática pueden reescribirse de modo que tengan esta estructura. Lo práctico de esta formulación es que, mediante un procedimiento iterativo, se podría hallar las soluciones de interés. Esto es, comenzando con una solución aproximada x_0, resultará que $Tx_0 \neq x_0$ pero podría ser que $x_1 = Tx_0$ sea una mejor aproximación a la solución exacta x que x_0. Si el razonamiento fuera correcto, sucesivas aplicaciones de T, esto es, $Tx_1 = x_2$, $Tx_2 = x_3, \cdots$, llevaría a que x_n (con $x_n = Tx_{n-1}$ y n suficientemente grande), estaría más 'cerca' de x. Las soluciones x_n generan una sucesión que se espera converja a la solución exacta x.

Ejemplo que converge: $x = Tx$ con $T = cos$, y $x \in [0, \pi/2]$.

Ejemplo que no converge: $x = Tx$ con $T = tg$, y $x \in [\pi, 3\pi/2]$.

Para garantizar la convergencia del proceso iterativo introducimos algunas definiciones y enunciamos el teorema de la contracción.

Definición de contracción: Una transformación $T : X \to X$, con X un subconjunto de un espacio normado N, es denominada una transformación de contracción si existe $0 < a < 1$ tal que,

$$||Tx - Ty|| \leq a||x - y||$$

para todo $x, y \in X$.

El siguiente caso muestra la sutileza en la definición. Sea $T : \mathcal{R}^+ \to \mathcal{R}^+$, con $Tx = f(x) = x + e^{-x}$. Luego,

$$||Tx - Ty|| = |f(x) - f(y)| = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}|x - y| = |f'(\xi)||x - y|$$

con $\xi > 0$. El coeficiente $a = |f'(\xi)| < 1$ pero, debido a que $f'(\xi) = 1 - e^{-\xi}$ puede aproximarse a 1 tanto como uno quiera, por lo que no satisface la condición de contracción. (notar que si fuera una constante tan cerca como un quiera no habría problema, pero en este ejemplo no es una constante!).

El siguiente teorema garantiza que la sucesión x_n generada a partir de T^n converja a un elemento del espacio donde T fue definido.

Teorema de la contracción: si $T : X \to X$ es una contracción de un subconjunto cerrado X de un espacio de Banach (espacio normado completo), entonces existe exactamente un $x \in X$ tal que $Tx = x$. Para cada $x_0 \in X$, la sucesión (x_n) definida por $x_{n+1} = Tx_n$ converge a x.

Demostración del teorema de contracción: Desarrollemos la demostración porque nos da una forma práctica de computar la solución. Vamos a ver que (i) sucesión (x_n) definida por la contracción es de Cauchy (no perder de vista que el espacio es completo!), (ii) el límite de la sucesión es un punto fijo y (iii) que la solución es única.

(i) Veamos que es una sucesión de Cauchy: Sea $m > n$, entonces

$$||x_m - x_n|| \leq ||x_m - x_{m-1}|| + ||x_{m-1} - x_{m-2}|| + \cdots + ||x_{n+1} - x_n||$$

donde hemos usado la desigualdad triangular. Veamos como acotar cada uno de los términos de la derecha.

$$\begin{aligned}
||x_{k+1} - x_k|| &= ||Tx_k - Tx_{k-1}|| \\
&\leq a^1||x_k - x_{k-1}|| = ||Tx_{k-1} - Tx_{k-2}|| \\
&\leq a^2||x_{k-1} - x_{k-2}|| = ||Tx_{k-2} - Tx_{k-3}|| \\
&\vdots \\
&\leq a^i||x_{k-(i+1)} - x_{k-i}|| \\
&\vdots \\
&\leq a^k||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$

Luego, en el desarrollo de $||x_m - x_n||$, acotamos cada sumando con la desigualdad $||x_{k+1} - x_k|| \leq a^k ||x_1 - x_0||$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
||x_m - x_n|| &\leq ||x_m - x_{m-1}|| + ||x_{m-1} - x_{m-2}|| + \cdots + ||x_{n+1} - x_n|| \\
&\leq \left(a^{m-1} + a^{m-2} + \cdots + a^n\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq a^n \left(a^{m-n-1} + a^{m-n-2} + \cdots + 1\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq a^n \frac{1 - a^{m-n-1}}{1-a} ||x_1 - x_0|| = \left(\frac{a^n}{1-a} - \frac{a^{m-1}}{1-a}\right) ||x_1 - x_0|| \\
&\leq \frac{a^n}{1-a} ||x_1 - x_0||
\end{aligned}$$

donde hemos usado $a^k + a^{k-1} + \cdots + 1 = (1 - a^k)/(1-a)$.

Luego, $||x_m - x_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que muestra que (x_n) es una sucesión de Cauchy.

Debido a que el espacio es completo, la sucesión (x_n) es convergente. Llamando $\bar{x}$ al límite, resta mostrar que $T\bar{x} = \bar{x}$ y que $\bar{x}$ es único.

(ii) Veamos que el límite es un punto fijo: Esto es, que $\bar{x}$ verifica $T\bar{x} = \bar{x}$.

$$\begin{aligned}
||T\bar{x} - \bar{x}|| &= ||T\bar{x} - Tx_n + Tx_n - \bar{x}|| \\
&\leq ||T\bar{x} - Tx_n|| + ||Tx_n - \bar{x}|| \\
&\leq ||T\bar{x} - Tx_n|| + ||x_{n+1} - \bar{x}|| \\
&\leq a||\bar{x} - x_n|| + ||\bar{x} - x_{n+1}||
\end{aligned}$$

cuando $n \to \infty$ ambos término tienden a cero, luego $||T\bar{x} - \bar{x}||$ tiende a cero, y $T\bar{x} - \bar{x} = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

(iii) Veamos que el límite es único: supongamos que $T\bar{x} = \bar{x}$ y $T\bar{y} = \bar{y}$. Entonces

$$||\bar{x} - \bar{y}|| = ||T\bar{x} - T\bar{y}|| \leq a||\bar{x} - \bar{y}||\,,$$

lo cual es una contradicción, a menos que $||\bar{x} - \bar{y}|| = 0$, luego $\bar{x} = \bar{y}$.

Transformación de una ecuación diferencial en una integral

La tecnología para hallar soluciones utilizando el teorema de punto fijo no puede utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales en forma directa, porque el operador diferencial no es una contracción. Pero convirtiendo la ecuación diferencial en una integral resulta en un problema que es resoluble por el teorema de punto fijo. Primero mostramos un ejemplo donde un operador diferencial no define una contracción.

Sea

$$f(x) = 1$$

para todo x y sea

$$g(x) = 1 + \frac{\sin n^2 x}{n}\,.$$

La cantidad

$$||Df - Dg|| = ||n \cos n^2 x||$$

con D el operador derivada, puede hacerse tan grande como uno desee. Mientras

$$||f-g|| = \left|\left|\frac{\sin n^2x}{n}\right|\right|$$

puede ser tan pequeño como queramos, tomando n suficientemente grande. Luego, el operador D no define una contracción, pues no existe $0 < a < 1$ que satisfaga $||Df - Dg|| \leq a||f - g||$ para todo f y g en el espacio normado C.

Ecuaciones integrales

Estamos interesados en ecuaciones integrales de la forma,

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = f(x)$$

Introduzcamos algunas definiciones y condiciones para que la solución de punto fijo converja.

Definición de condición de Lipschitz: Una función $F(x)$ se dice que satisface la condición de Lipschitz si existe una constante k tal que

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$$

para todo x_1, x_2.

Observación: Si F es diferenciable y $|F'(x)| \leq k$ para todo x, entonces F satisface la condición de Lipschitz. El recíproco no es cierto, esto es, una función que satisface la condición de Lipschitz, no necesariamente F es diferenciable.

En lo que sigue listamos las condiciones para las cuales la ecuación $u(x)-\lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = f(x)$ tiene solución en el espacio L_2.

Teorema sobre la existencia de solución de la ecuación integral: La siguiente ecuación integral

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy = h(x)$$

tiene una solución única $u \in L_2[a, b]$, si

- $h \in L_2[a, b]$
- K satisface una condición de Lipschitz con respecto a su tercer argumento,

  $$|K(x, y, z_1) - K(x, y, z_2)| \leq N(x, y)|z_1 - z_2|$$

  para todo z_1, z_2, donde N es de cuadrado integrable con

  $$\int_a^b dx \int_a^b dy|N(x, y)|^2 = P^2$$

- $K(x, y, 0)$ es continua para $x, y \in [a, b]$
- $|\lambda| < \frac{1}{P}$

Aplicación: Sturm-Liuville (SL)

Apliquemos la transformación y condiciones aprendida más arriba un problema específico.

Del análisis de secciones anteriores de la ecuación de Sturm-Liuville, con condiciones de borde $u(0) = u(1) = 0$, tenemos,

$$\begin{aligned} u''(x) + \lambda f(x)u(x) = 0 \\ -g''(x,y) = \delta(x-y) \\ u(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y)u(y)dy \\ K(x,y) = g(x,y)f(y) \end{aligned}$$

Para escribirlo en la forma

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,y,u(y))dy = h(x)$$

notamos que

$$h(x) = 0 \in L_2$$

$$K(x,y,u(y)) = g(x,y)f(y)u(y) \Rightarrow K(x,y,z) = g(x,y)f(y)z$$

donde $K(x,y,z)$ debe verificar

$$|K(x,y,z_1) - K(x,y,z_2)| \leq N(x,y)|z_1 - z_2|$$

de modo que $N(x,y) = |g(x,y)f(y)|$.

El teorema afirma que existe una solución única si $\lambda < P^{-1}$, donde

$$P = \left(\int_a^b dx \int_a^b dy |N(x,y)|^2 \right)^{1/2}$$

Pero la ecuación siempre tiene la solución trivial por solución, lo que implica que la solución

$$u(x) = 0$$

es la única solución si $\lambda < P^{-1}$.

Por lo expuesto, se infiere que no existen autovalores, esto es, valores de lambda para los cuales la ecuación $u''(x) + \lambda f(x)u(x) = 0$ tenga solución no trivial cuando $\lambda < P^{-1}$. Luego, todos los autovalores satisfacen

$$\lambda \geq \left| \int_a^b dx \int_a^b dy |g(x,y)f(y)|^2 \right|^{-1/2}$$

lo que da una cota o estimación útil para la determinación de los autovalores.

En el siguiente ejemplo mostraremos cómo utilizar esta condición para la ecuación $u''(x) + \lambda u(x) = 0$.

Aplicación: Para poder obtener un resultado numérico reduzcamos la ecuación de SL a una ecuación de autovales.

Sea $f(x) = 1$ en la ecuación de Sturm-Liuville, entonces

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0 \,.$$

Esta ecuación puede resolverse en forma analítica. Sus autovalores son

$$\lambda = \pi^2, 4\pi^2, \cdots \,.$$

Ahora apliquemos las condiciones para el núcleo integral correspondiente a esta ecuación como método para estimar el primer autovalor.

Calculando la función de Green se encuentra,

$$g(x,y) = \begin{cases} x(1-y) & x \leq y \\ \\ y(1-x) & x \geq y \end{cases}$$

Luego, evaluando la integral

$$I = \int_a^b dx \int_a^b dy |g(x,y)f(y)|^2$$

con $f(y) = 1$, resulta $I = \frac{1}{90}$, lo que implica que λ debe verificar,

$$\lambda \geq 3\sqrt{10} = 9.4868 \,,$$

comparemos este número con el primer autovalor $\pi^2 = 9.86960$!!.

10.3 Espacio de Hilbert

En esta sección se define producto interno, el cual constituye una versión abstracta del producto escalar entre vectores para espacios vectoriales. El producto escalar permite definir una versión generalizada de ángulo y en particular, ángulo recto u ortogonalidad. Esta nueva propiedad complementa a los espacios normados donde sólo teníamos definida una longitud pero no ángulos. También se definen funcionales en espacios normado y de Hilbert y la noción de convergencia débil.

Contenido sección Espacio de Hilbert: Espacios con producto interno. Desigualdad de Schwartz. Definición de norma y ángulo. Ortogonalidad. Base ortogonal. Espacio de Hilbert. Ortonormalización de Gram-Schmidt. Expansión ortogonal. Coeficientes de Fourier generalizados. Mejor aproximación. Relación de Parseval. Teorema de Riesz-Fischer. Descomposición ortogonal. Teorema de Riez para funcionales en Hilbert. Convergencia débil.
Material complementario: Funcionales en espacio de Hilbert. Convergencia débil.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 7.
Dedicación: una (1) clase.

10.3.1 Espacios con producto interno

Definición de espacio producto interno: Un espacio producto interno (real o complejo) es un espacio vectorial V con un producto interno especificado. Producto interno es una regla que, dados $x, y \in V$ especifica un número (x, y) (real o complejo), denominado producto interno de x e y, tal que

- i) (x, x) es real y positivo para todo $x \neq 0$, y $(0, 0) = 0$
- ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ para todo $x, y \in V$
- iii) $(ax, y) = a(x, y)$ para cualquier escalar a y $x, y \in V$.
- iv) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ para todo $x, y, z \in V$

De (ii) y (iii) resulta,

$$(x, ay) = \overline{(ay, x)} = \bar{a}\,\overline{(y, x)} = \bar{a}(x, y)$$

Ejemplos: Los siguientes son ejemplos de espacios producto interno

- El espacio real n-dimensinal $\mathcal{R}^n$ con

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- El espacio complejo n-dimensinal $\mathcal{C}^n$ con

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$$

- El espacio formado por todas las sucesiones de números (x_i) tal que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ converge con
$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i \,.$$
Este espacio es denominado **espacio $\boldsymbol{l_2}$**.
Observación: usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se demuestra que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ converge.

- El **espacio $\boldsymbol{L_2[a, b]}$** con
$$(f, g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx \,.$$
Observación: en Mecánica Cuántica se toma el conjugado de la primera función en el par (f, g) en lugar de en la segunda.

Teorema: Desigualdad de Schwartz:

- i) Para cualquier x, y en un espacio producto interno se verifica
$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$$

- ii) La igualdad
$$|(x, y)|^2 = (x, x)(y, y) \,,$$
vale si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

Material complementario: Demostración del teorema anterior:
Demostración de (i): Para cualquier escalar c resulta,

$$\begin{aligned} 0 \leq (x - cy, x - cy) &= (x - cy, x) + (x - cy, -cy) \\ &= (x, x) + (-cy, x) + (x, -cy) + (-cy, -cy) \\ &= (x, x) - c(y, x) - \bar{c}(x, y) + |c|^2(y, y) \\ &= (x, x) - c(y, x) - \bar{c}\,\overline{(y, x)} + |c|^2(y, y) \\ &= (x, x) - 2Re[c(y, x)] + |c|^2(y, y) \end{aligned}$$

luego,
$$0 \leq (x, x) - 2Re[c(y, x)] + |c|^2(y, y) \,.$$

Para $(y,y) \neq 0$, sea $c = \frac{(x,y)}{(y,y)}$

$$0 \leq (x,x) - 2Re[c(y,x)] + |c|^2(y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2Re\left[\frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x)\right] + \left|\frac{(x,y)}{(y,y)}\right|^2 (y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2Re\left[\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\right] + \left|\frac{(x,y)}{(y,y)}\right|^2 (y,y)$$

$$\leq (x,x) - 2\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$

$$\leq (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}$$

donde hemos usado que el corchete y (y,y) son magnitudes reales.

Luego,

$$0 \leq (x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \Rightarrow |(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$$

Demostración de (ii): (Vuelta) Si x e y son linealmente dependientes, entonces $x = cy$ (suponiendo $y \neq 0$) para algún escalar c. Entonces

$$|(x,y)|^2 = |(cy,y)|^2 = |c|^2\,|(y,y)|^2$$

$$= c\bar{c}\,(y,y)^2 = c\bar{c}\,(y,y)(y,y)$$

$$= (cy,cy)(y,y) = (x,x)(y,y)$$

Luego, $|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y)$. donde hemos usado que (y,y) es real.

(Ida) Sea $|(x,y)|^2 = (x,x)(y,y)$ y veamos que son linealmente dependientes buscando coeficientes no nulos que den $\alpha x + \beta y = 0$. Para cualquier α, β, tenemos (repitiendo el desarrollo anterior)

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = |\alpha|^2(x,x) + 2Re[\alpha\bar{\beta}(x,y)] + |\beta|^2(y,y)$$

$$= |\alpha|^2(x,x) + 2|\alpha|\,|\beta|\,|(x,y)|\,\cos\delta + |\beta|^2\,(y,y)$$

donde δ depende de las fases de α, β y (x,y). Elegimos las fases de α, β tal que $\delta = \pi$. Entonces

$$(\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \left(|\alpha|\,\sqrt{(x,x)} - |\beta|\,\sqrt{(y,y)}\right)^2$$

Sea que elegimos las magnitudes de α y β de modo la ecuación de arriba se anule, esto muestra que $\alpha x + \beta y = 0$ con α y β no nulos.

Corolario de la desigualdad de Schwartz: Para cualquier x, y es un espacio producto interno, se verifica

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leq \sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)}$$

Definición de norma: En cualquier espacio producto interno se define la norma por

$$||x|| = \sqrt{(x,x)}$$

Observación Por la definición de norma de arriba, resulta que cualquier espacio producto interno puede hacerse espacio normado.

Desigualdad de Schwarz en término de la norma:

$$|(x,y)| \leq ||x|| \, ||y||$$

Definición de ángulo: De la desigualdad anterior resulta

$$-1 \leq \frac{(x,y)}{||x|| \, ||y||} \leq 1$$

luego, definimos un ángulo entre elementos de un espacio producto interno por

$$\theta = \cos^{-1} \frac{(x,y)}{||x|| \, ||y||}$$

Definición de ortogonalidad ($\perp$): dos vectores x, y en un espacio producto interno se dicen ortogonales si

$$(x,y) = 0$$

y escribimos $x \perp y$.

Ejemplos:

- En $\mathcal{C}^2$ con

  $$(x,y) = x\bar{y}\,,$$

  los vectores $x = (1, i)$ e $y = (1, -i)$ son ortogonales.
  Actividad: visualizarlo en cartesianas y hacer la cuenta explícita.

- En $C[0, \pi]$ con

  $$(f,g) = \int_0^\pi f(x)\bar{g}(x)dx$$

  las funciones $\sin mx$ y $\sin nx$ son ortogonales para cualesquiera entero positivos con $m \neq n$.
  Observación: no le ven un colorcito a distribución (regulares).

- En cualquier espacio, el vector zero es ortogonal a cada vector.

Proposición: Pitágoras. Si $x \perp y$, entonces

$$\begin{aligned}(x+y, x+y) &= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \\ &= (x,x) + (y,y)\end{aligned}$$

Luego,

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Lema: Continuidad del producto interno.

- Si $x_n \to x$, entonces
$$(x_n, y) \to (x, y)$$
para cualquier y.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$ entonces,
$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n, y) = (u, y)$$
para cualquier y.

10.3.2 Bases ortogonales

En esta sección extendemos la noción de base a espacios de dimensión infinita y aprenderemos a generar una sucesión ortogonal a partir de una sucesión arbitraria (ortonormalización de Gram-Schmidt).

Conjunto ortogonal: un conjunto de vectores $\{x_i\}$ en un espacio producto interno es llamado un conjunto ortogonal si,

- i) $(x_i, x_j) = 0$ siempre que $i \neq j$
- ii) para cada i, $x_i \neq 0$, esto es, el vector nulo es excluído.

Observación: El vector nulo es excluído de la definición de conjunto ortogonal, de modo que para espacios finitos, un conjunto ortogonal sea linealmente independiente (dado que cualquier conjunto que contiene el vector cero podría ser linealmente dependiente.). De modo que enunciamos la siguiente proposición.

Proposición para conjuntos finitos: Mostremos que un conjunto ortogonal finito es linealmente independiente. Sea $\{x_1, \cdots, x_n\}$ un conjunto ortogonal, y sea $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$, entonces para cada j tenemos,

$$(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i, x_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} c_i (x_i, x_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{i,j} (x_j, x_j) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_j (x_j, x_j) = 0$$

$$c_j ||x_j||^2 = 0$$

luego, dado que $x_j \neq 0$ para cada j, resulta $c_j = 0$ para cada j. Lo que muestra que *un conjunto ortogonal finito es linealmente independiente.*

Definición de base ortogonal: Una base ortogonal para un espacio producto interno S es un conjunto ortogonal (e_n) tal que para cualquier $x \in S$ existen escalares c_n tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

Observación 1 de 2: Nuestra definición de base usa un conjunto contable. Definiciones alternativas permiten conjuntos no contables.

Observación 2 de 2: No todo espacio tiene una base. Un espacio puede ser, en cierto sentido, tan grande que ningún conjunto contable puede generar todo el espacio a través de sus infinitas combinaciones lineales.

Definición de espacio de Hilbert: Un espacio producto interno completo con una base es llamado un espacio de Hilbert.

Ejemplos:

- $\mathcal{R}^n$ y $\mathcal{C}^n$ son espacios de Hilbert: los espacios $\mathcal{R}^n$ y $\mathcal{C}^n$ con espacios producto interno y son completos. Los versores forman una base ortogonal, tanto para $\mathcal{R}^n$ como para $\mathcal{C}^n$.
- $C[0,\pi]$ con $(f,g) = \int_0^\pi f(x)\bar{g}(x)dx$ y base $\sin nx$, no es un espacio de Hilbert: $C[0,\pi]$ tiene una base ortogonal, pero el espacio no es completo (recordar que su completación dio origen a L_2)
- $L_2[a,b]$ con $(f,g) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx$ es completo. Las funciones $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ forman una base (lo cual veremos luego de definir el teorema sobre las bases de conjuntos densos). Luego, $L_2[a,b]$ es es un espacio de Hilbert.

Sobre la funcionalidad de las bases: en los espacios de dimensiones finitas las bases fueron útiles porque en lugar de operar con los vectores uno opera o manipula las componentes (lo que en álgebra lineal llamamos vector coordenadas) que son una colección de números reales o complejos. En espacios de dimensión infinita también manipular las coordenadas resulta computacionalmente más práctico que manipular los elementos del espacio. El siguiente teorema da una forma práctica de constuir una base ortonormal a partir de un conjunto infinito de vectores.

Teorema: Ortonormalización de Gram-Schmidt. Dada cualquier sucesión (f_n) de elementos de un espacio producto interno, existe una sucesión ortogonal (g_n) tal que cada combinación lineal finita de f_n es una combinación lineal de g_n y vice versa.

Ej.: Por ejemplo, a partir de los monomios $f_n(x) = x^n$, que no son ortogonales, podemos generar un conjunto infinito de funciones que forma una base ortogonal, y luego, eventualmente, ortonormal.

Construcción de la base:

- *Construcción de una sucesión linealmente independiente:* Construyamos primero una nueva sucesión (F_n) a partir de (f_n) eliminando el vector nulo cada vez que aparezca en (f_n), y también quitando cualquier f_n que sea una combinación lineal de los elementos precedentes de la sucesión. Entonces (F_n) es una sub sucesión de (f_n) , y cualquier subconjunto finito de (F_n) es linealmente independiente,.

- *Construcción de la base ortonormal. Proceso de Gram-Schmidt:* Siguiendo, construímos (g_n) a partir de (F_n) paso a paso.
  - Tomemos
  $$g_1 = F_1$$
  - Tomemos $g_2 = F_2 + cg_1$, con c tal que $(g_2, g_1) = 0$:
  $$0 = (g_2, g_1) = (F_2, g_1) + (cg_1, g_1) \Rightarrow c = -\frac{(F_2, g_1)}{(g_1, g_1)}$$
  Luego,
  $$g_2 = F_2 - \frac{(F_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$
  - Tomemos $g_3 = F_3 + dg_2 + eg_1$ con d, e determinados a partir de $(g_3, g_2) = (g_3, g_1) = 0$.
  $$0 = (g_3, g_2) = (F_3, g_2) + d(g_2, g_2) + e(g_1, g_2) \Rightarrow d = -\frac{(F_3, g_2)}{(g_2, g_2)}$$
  $$0 = (g_3, g_1) = (F_3, g_1) + d(g_2, g_1) + e(g_1, g_1) \Rightarrow e = -\frac{(F_3, g_1)}{(g_1, g_1)}$$
  Luego,
  $$g_3 = F_3 - \frac{(F_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 - \frac{(F_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$$
  $\vdots$

Ya tenemos la sistemática:

- $g_1 = F_1$
- $g_2 = F_2 - \frac{(F_2, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$
- $g_3 = F_3 - \frac{(F_3, g_2)}{(g_2, g_2)} g_2 - \frac{(F_3, g_1)}{(g_1, g_1)} g_1$

  $\vdots$

10.3.3 Expansión ortogonal

En esta sección aprendemos a representar vectores de espacios de Hilbert en término de una base infinita.

Teorema: sea (e_n) una base ortogonal para un espacio producto interno. Para cualquier x en el espacio, vale
$$x = \sum_n^{\infty} c_n e_n$$
donde c_n se obtienen de proyectar x sobre e_m:
$$(x, e_m) = (\sum_n c_n e_n, e_m) = \sum_n c_n (e_n, e_m)$$
$$= \sum_n c_n \delta_{n,m} (e_m, e_m) = c_m (e_m, e_m) \Rightarrow c_m = \frac{(x, e_m)}{(e_m, e_m)}$$
Luego, los coeficientes c_n quedan unívocamente determinados por: $c_n = (x, e_n)/||e_n||^2$.

Definición de coeficientes de Fourier generalizados: Sea (e_n) un conjunto ortogonal en un espacio producto interno V. Para cualquier $x \in V$ los números

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2}$$

son denominados coeficientes de Fourier generalizados.

Teorema: Mejor aproximación. Sea $\{e_1, \cdots, e_N\}$ un conjunto ortogonal en un espacio producto interno. Para cualquier x, los números c_n que minimizan

$$||x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n||$$

son

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2}$$

Veamos... Sea

$$c_n = \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} + d_n$$

y mostremos que la mejor aproximación implica $d_n = 0$.

$$||x - \sum_{n=1}^{N} c_n e_n||^2 = \left(x - \sum_n \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} e_n - \sum_n d_n e_n, x - \sum_n \frac{(x, e_n)}{||e_n||^2} e_n - \sum_n d_n e_n \right)$$

$$= ||x||^2 - \sum_n \frac{|(x, e_n)|^2}{||e_n||^2} + \sum_n |d_n|^2 ||e_n||^2$$

El término de la derecha es mínimo cuando $d_n = 0$ para todo n.

Teorema: sobre bases de conjuntos densos. Sea S un subconjunto denso de un espacio producto interno V. Si (e_n) es una base de S, entonces (e_n) también es base para V.

Veamos que L_2 es un espacio de Hilbert:

- El conjunto $C_0^\infty[a, b]$ de funciones suaves que se anulan en a y b es denso en $C[a, b]$ con la norma de L_2.
- Dado que $C[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$ implica que $C_0^\infty[a, b]$ es denso en $L_2[a, b]$.
- Cada función suave que se anula en a y b puede ser expandida por las funciones $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$. La serie converge uniformemente.
- Dado que convergencia uniforme implica convergencia en media, significa que las funciones $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ forman una base para $C_0^\infty[a, b]$.
- Por el teorema anterior, tenemos que $\sin \frac{n\pi(x-a)}{(b-a)}$ también es base para $L_2[a, b]$, y luego $L_2[a, b]$ es completo y tiene una base, por lo que es un espacio de Hilbert.

Teorema: Desigualdad de Bessel. Si (e_n) es un conjunto ortonormal, esto es, $||e_n|| = 1$, en un espacio producto interno, entonces para cualquier x en el espacio se verifica,

$$\sum_{n}^{\infty} |c_n|^2 \leq ||x||^2$$

con $c_n = (x, e_n)$.

Observación 1 de 2: Este teorema afirma que la serie $\sum_n^\infty |c_n|^2$ converge.

Observación 2 de 2: Los coeficientes de la expansión se anulan más rápido que $n^{-1/2}$, lo cual se concluye de la demostración de la desigualdad de Bessel.

Teorema: Relación de Parseval. Sea (e_n) un conjunto ortonormal en un espacio producto interno. (e_n) es una base si y sólo si para cada x en el espacio se verifica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = ||x||^2$$

con $c_n = (x, e_n)$.

Teorema: Riesz-Fischer. Sea (e_n) una base ortonormal para un espacio (real o complejo) de Hilbert H de dimensión infinita. Si (c_n) es una sucesión de números tal que $\sum_n |c_n|^2$ converge, entonces existe un $x \in H$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

y $c_n = (x, e_n)$.

Observación: El teorema anterior sugiere que todos los espacios de Hilbert de dimensión infinita son el mismo, esto es, H **es isomorfo con** l_2. Luego, existe una relación uno a uno entre l_2 y cualquier espacio de Hilbert H, en este sentido, sólo existe un espacio de Hilbert.

10.3.4 Descomposición ortogonal

En esta sección se introducen los conceptos para la interpretación geométrica en la teoría de espacio de Hilbert.

Definición de complemento ortogonal: Sea X cualquier subconjunto de un espacio de Hilbert H. Decimos que $x \perp X$ si $x \perp \xi$ para todo $\xi \in X$. El complemento ortogonal de X es el conjunto $X^\perp = \{x \in H : x \perp X\}$.

Teorema: El complemento ortogonal es de Hilbert: $X^\perp$ es un supespacio del espacio de Hilbert H, para cualquier subconjunto X de H. Esto es, $X^\perp$ es un subespacio vectorial y es completo y tiene base.

Teorema: Proyección ortogonal. Si E es un subespacio de un espacio de Hilbert H, entonces cada $x \in H$ puede ser unívocamente escrito como $x = y + z$ con $y \in E$ y $z \in E^\perp$. El vector y es llamado proyección de x sobre E.

Corolario: si E es un subespacio de un espacio de Hilbert H, y (e_n) y (f_n) son bases para E y $E^{\perp}$ respectivamente, entonces (e_n) y (f_n) juntas forman una base para H.

Suma directa: cada elemento de H puede ser escrito unívocamente como la suma de un elemento de E y un elemento de $E^{\perp}$,

$$H = E \oplus E^{\perp}$$

Se dice que H es la suma directa de E y $E^{\perp}$.

Observación: Para fijar ideas, consideremos la descomposición de una función $f(x)$, con $f(a) = f(b) = 0$ en su parte par e impar. Luego, podemos considerar que los senos es la base para la parte impar y los cosenos base del la parte par. Esto es, E hace las veces del espacio de las funciones impares y los senos de (e_n), mientras $E^{\perp}$ representaría al espacio de las funciones pares y los consenos de la serie de Fourier correspondería a los (f_n). Los coeficientes de Fourier c_n son las proyecciones de f sobre cada elemento de la base.

Corolario: Mejor aproximación. Sea E un supespacio de un espacio de Hilbert H. Resulta que, dado $x \in H$ existe exáctamente un vector en E más cerca a x que cualquier otro vector. Este vector es la proyección de x sobre E.

10.3.5 Funcionales y convergencia débil en espacio de Hilbert

Teorema de Riez para funcionales en Hilbert: Para cada funcional lineal continuo f sobre un espacio de Hilbert H, existe un único $u \in H$ tal que

$$f(x) = (x, u)$$

para todo $x \in H$, con $(.,.)$ el producto interno definido en H.

Observación: En un espacio real el funcional $x \to (u, x)$ (notar la inversión de los elementos dentro del producto interno) es tambien lineal y continuo, dado que el producto interno es simétrico. Pero en un espacio complejo este funcional no es lineal, dano que $(u, ax) = \bar{a}(u, x)$. Los funcionales con esta propiedad son denominados **funcionales antilineales**.

Definición de convergencia: Si $X, x_1, x_2, \cdots$ pertenecen a un espacio de Hilbert H, se dice que $x_n \to X$ débilmente cuando $n \to \infty$ si

$$(x_n, y) \to (X, y)$$

para todo $y \in H$.
Ejemplo: Sea (e_n) un conjunto ortonormal infinito en un espacio producto interno. Por el teorema de la desigualdad de Bessel ($\sum_n |c_n|^2 \leq ||x||^2$, con $c_n = (x, e_n)$) la suma

$$\sum_n |(y, e_n)|^2 \quad \text{converge}$$

luego,

$$(y, e_n) \to 0$$

para cada y. Pero $||e_n|| = 1$, por lo que

$$e_n \nrightarrow 0\,.$$

Esto es, la sucesión de elementos e_n no converge, mientras que sí converge (a cero) débilmente.

10.4 Material Complementario

10.4.1 Funcionales en espacios normados y de Hilbert

Los funcionales son los operadores más simples en el espacio de Hilbert y son la base para la teoría de operadores autoadjuntos que introduciremos en el siguiente capítulo.

Definición de funcional en espacio normado: Un funcional sobre un espacio normado es un mapeo desde el espacio a los números reales o complejos. Un funcional lineal f es un funcional que satisface $f(ax+by) = af(x)+bf(y)$, con a y b cualquier número (real o complejo) y x e y cualesquiera elementos del espacio normado.

Ejemplo: Para cualquier $\boldsymbol{v} \in \mathcal{R}^3$ fijo, podemos definir un funcional $f_\nu : \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^3$, el cual es lineal.

Teorema. Continuidad de funcionales lineales: Si un funcional lineal es continuo en cada punto, entonces es uniformemente continuo[2]. Luego, un funcional lineal es o discontinuo en todo lugar o uniformemente continuo en todo lugar, por lo que llamaremos a un funcional lineal uniformemente continuo simplemente 'continuo'.

Ejemplo 1 de 2: En el espacio $C[-1,1]$ con la norma del supremo, el funcional

$$\Delta_1 : \phi \to \phi(0)$$

es continuo.

Ejemplo 2 de 2: En el espacio $C[-1,1]$ con la norma en media el funcional

$$\Delta_2 : \phi \to \phi(0)$$

es un funcional diferente a Δ_1, porque está definido en un espacio normado diferente, y es un funcional discontinuo.

Sobre los ejemplos 1 y 2: Veamos porqué Δ_1 es continuo y Δ_2 es discontinuo. Sean $\phi, \psi \in C[-1,1]$

- tenemos
  $$|\Delta_1(\phi) - \Delta_1(\psi)| = |\phi(0) - \psi(0)| \leq ||\phi - \psi||$$
  de modo que se satisface la definición de uniformemente continuo con $\delta = \varepsilon$.
  Observación: Este funcional se parece a la delta definida en las distribuciones, pero es diferente, pues está definido en un espacio diferente y la definición de continuidad es diferente.

- La sucesión de funciones
  $$f_n(x) = n^{\frac{1}{8}} e^{-nx^2}$$
  es convergente, con $||f_n|| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Pero Δ_2 mapea f_n en $n^{1/8}$,
  $$\Delta_2(f_n) = f_n(0) = n^{\frac{1}{8}} ,$$
  la cual es una sucesión divergente, luego, Δ_2 no es continua. Si lo fuera, entonces el teorema sobre mapeos continuos de sucesiones convergentes[3] sería violado.

---

[2]Un funcional es uniformemente continuo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiendo de ε, tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ siempre que $||x - y|| < \delta$

[3]Sea $T : X \to M$ continuo en $x \in X$, donde $X \subset N$, y M y N son espacios normados. Si (x_n) es una sucesión en X con $x_n \to x$ en N, entonces $Tx_n \to Tx$ en M.

Definición de funcionales acotados: Un funcional f es acotado si existe un número A tal que

$$|f(x)| \leq A||x||$$

para todo x en el espacio.

Teorema. Funcionales lineales acotados: Un funcional lineal es continuo si y sólo si es acotado.

Definición de funcionales en espacio de Hilbert: En el espacio de Hilbert existe la siguiente clase importante de funcionales: para cada u en el espacio existe un funcional x

$$x \to (x, u)\,.$$

Proposición: Si u es cualquier miembro fijo de un espacio de Hilbert H, el funcional $f : x \to (x, u)$ es lineal y continuo.

Observación: En un espacio real el funcional $x \to (u, x)$ es tambien lineal y continuo, dado que el producto interno es simétrico. Pero en un espacio complejo este funcional no es lineal, dano que $(u, ax) = \bar{a}(u, x)$. Los funcionales con esta propiedad son denominados **funcionales antilineales**.

Teorema. Representación the Riesz: Para cada funcional lineal continuo f sobre un espacio de Hilbert H, existe un único $u \in H$ tal que

$$f(x) = (x, u)$$

para todo $x \in H$.

10.4.2 Convergencia débil

Definición de convergencia débil: Una sucesión (x_n) en un espacio de Hilbert H converge débilmente si para cada $y \in H$ la sucesión de númertos (x_n, y) converge.

Ejemplo: Veamos un ejemplo donde una sucesión no converge en la forma usual, denominada **convergencia fuerte**, pero sí en la débil. Sea (e_n) un conjunto ortonormal infinito en un espacio producto interno. Por el teorema de la desigualdad de Bessel ($\sum_n |c_n|^2 \leq ||x||^2$, con $c_n = (x, e_n)$) la suma

$$\sum_n |(y, e_n)|^2 \quad \text{converge}$$

luego,

$$(y, e_n) \to 0$$

para cada y. Pero $||e_n|| = 1$, por lo que

$$e_n \nrightarrow 0\,.$$

Observación: La definición anterior de convergencia no involucra la idea de un elemento límite, pero éste podría existir. Veamos la siguiente defnción.

Definición de convergencia débil de x_n a X: Si $X, x_1, x_2, \cdots$ pertenecen a un espacio de Hilbert H, se dice que $x_n \to X$ débilmente cuando $n \to \infty$ si

$$(x_n, y) \to (X, y)$$

para todo $y \in H$.

Observación muy importante: de las dos definiciones de convergencia débil dadas pareciera concebible que una suseción converja débilbente pero que no converja (débilmente) a ningún elemento de H, pero no es el caso. Se puede demostrar (auque la demostración es muy sutil y altamente técnica) que cada sucesión débilmente convergente tiene un límite débil (lo enunciamos en un teorema más abajo).

Proposicón: Cada sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert es acotada (se usa para demostrar el teorema que sigue).

Teorema: Si (x_n) es una sucesión débilmente convergente en un espacio de Hilbert H, entonces existe $X \in H$ tal que $x_n \to X$ débilmente.

Propiedades de la convergencia débil:

- Si $x_n \to X$ e $y_n \to Y$, ambas débilmente, entonces

$$ax_n + by_n \to aX + bY$$

débilmente para cualesquiera escalares a y b.

- Los límites débiles son únicos, esto es, si $x_n \to X_1$ y $x_n \to X_2$ ambas débilmente, entonces

$$X_1 = X_2\,.$$

Proposición: Si $x_n \to X$ fuertemente, entonces $x_n \to X$ débilmente.

Teorema: Cada sucesión acotada en un espacio de Hilbert tiene una sucesión débilmente convergente.

Chapter 11

Operadores

En las primeras tres secciones de este capítulo se dan los elementos matemáticos sobre operadores para poder definir bases en el espacio de Hilbert. En la última sección se introduce los autovectores de un operador y la respresentación espectral en término de proyectores. Todos estos conceptos tendrán una realización específica cuando estudiemos Mecánica Cuántica.

Modificado: 2023.05.01

Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulos 8 y 9.

Contenido: Operadores en espacios normados. Norma de operadores. Espacio de Banach de operadores. Operadores en espacio de Hilbert. Operadores adjuntos y operadores autoadjuntos o hermitianos. Operadores unitarios. Operadores compactos. Proyectores. Teorema espectral.

Dedicación: una (1) clase.

11.1 Operadores en espacios normados

Introducimos la noción de continuidad para operadores en forma equivalente a la introducida para funcionales. Esta noción de continuidad en los operadores aparecerá en el contexto de operadores acotados.

Teorema. Continuidad de un operador lineal: Si un operador $A : N \to M$ es continuo en cada punto $x \in N$, entonces el operador es uniformemente continuo en N.[1]

Introduzcamos los elementos necesarios para definir la norma de un operador. Estos conceptos también serán usados en la siguiente sección para operadores en un espacio de Hilbert.

Definición de operador acotado: Sea A un operador de $N \to M$, con N, M espacios normados. El operador A es acotado si existe un número m tal que

$$||Ax|| \leq m||x||$$

para todo $x \in N$.

[1]Un operador A es uniformemente continuo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, dependiendo de ε, tal que $||Ax - Ay|| < \varepsilon$ siempre que $||x - y|| < \delta$

Observación: Para un operador lineal, continuidad y acotado son equivalentes.

Teorema: Un operador lineal es acotado si y sólo si mapea cada conjunto acotado en un conjunto acotado[2].

Definición de norma de un operador acotado: Si A es acotado se define su norma como

$$||A|| = sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||} : x \in N, x \neq 0\right\}.$$

Luego,

$$||Ax|| \leq ||A||\, ||x||\,.$$

Ejemplo: Consideremos un operador integral sobre $L_2[a,b]$. Si el núcleo integral K es de Lipschitz, entonces K es un operador acotado. Del análisis que hicimos allí tenemos que para el operador

$$T : f \to \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

resulta

$$||T|| \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\right)^{1/2}$$

Observación: Con una definición de norma para operadores estamos en condiciones de definir espacios normados de operadores.

Definición de espacio normado de operadores: Si N, M son espacios normados, el conjunto de todos los operadores lineales acotados $N \to M$ es un espacio normado con las operaciones de suma $(A+B)x = Ax + Bx$, producto con escalar $(cA)x = c(Ax)$ y norma $||A|| = sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||} : x \in N, x \neq 0\right\}$. Este espacio es denotado como

$$B(N,M)\,.$$

Observación: Ahora estamos en condiciones de definir sucesiones infinitas y series de operadores, donde su convergencia es interpretada en término de norma de operadores: $A_n \to A$ significa

$$||A_n - A|| \to 0\,.$$

Definición de espacio de Banach (completo) de operadores: El espacio $B(N,M)$ de operadores lineales acotados $N \to M$ es un espacio de Banach si el espacio M es de Banach.

Observación: Estamos interesados en construir series de potencia de operadores, para ello debemos definir producto de operadores.

[2]En un espacio normado, un conjunto acotado es un conjunto tal que todos sus puntos están a una distancia finita de cualquier punto dado.

Definición de producto de operadores: Si $A, B \in B(N,N)$, entonces el operador AB definido como

$$(AB)x = A(Bx)$$

para todo $x \in N$ es acotado y lineal, y satisface

$$||AB|| \leq ||A||\,||B||\,.$$

Propiedades:

- $(AB)C = A(BC)$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $A(B+C) = AB + AC$

Definición del operador indentidad: La indentidad $I_N : N \to N$ es el operador que mapea cada vector de N en sí mismo. Usualmente lo notamos I en lugar de I_N.

Teorema. Una serie absolutamente convergente[3] en un espacio de Banach es convergente.

Proposición: Series absolutamente convergentes de operadores lineales acotados de un espacio de Banach pueden ser reacomodadas y multiplicadas término a término (como en el análisis usual).

Observación: Los teoremas que siguen dan un criterio para la convergencia de series de potencia de operadores en término de convergencia de una serie asociada a números.

Teorema. Series de potencia de operadores: Sea $A \in B(N,N)$, y sea (c_n) una sucesión de números. Si la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n ||A||^n$$

converge absolutamente, entonces la serie de operadores

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$$

converge absolutamente a un elemento de $B(N,N)$.

Definición de inversa: Un operador $A : N \to M$ es invertible si para cada $x \in M$ existe uno y sólo un $y \in N$ tal que $Ay = x$. El mapeo

$$x \to y$$

es llamado inversa de A, y lo denotamos como

$$y = A^{-1}x\,.$$

[3] Si $x_1, x_2, \cdots$ son elementos de un espacio normado, se dice que la serie $\sum_n x_n$ **converge absolutamente** si la serie de números $\sum_n ||x_n||$ converge

Teorema. Inversa del operador $I - A$: Sea A un operador lineal acotado $N \to N$ con N un espacio de Banach. Si $||A|| < 1$ entonces $I - A$ es invertible, con

$$(I - A)^{-1}$$

acotado, y

$$||(I - A)^{-1}|| \le \frac{1}{1 - ||A||}\,.$$

11.2 Operadores en espacio de Hilbert

Definición de operador adjunto: Si $A : H \to H$ es un operador lineal acotado en un espacio de Hilbert H, entonces existe un único operador $A^* : H \to H$ tal que

$$(x, A^* y) = (Ax, y)$$

para todo $x, y \in H$. El operador A^* es lineal y acotado, con $||A^*|| = ||A||$ y $(A^*)^* = A$, y se lo denomina adjunto de A.

Ejemplos:

- Sea $A : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ un operador que multiplica cada vector por una matriz real M de $n \times n$,
$$A(x) = Mx$$
. Sea M^* la matriz adjunta de M correspondiente al operador adjunto A^*, resulta que M^* es la matriz traspuesta de M.
Veamos...
$$\begin{aligned}(x, A^* y) = (Ax, y) = \sum_i (Ax)_i \bar{y}_i &= \sum_i \sum_j A_{ij} x_j \bar{y}_i \\ &= \sum_j \sum_i A_{ji} x_i \bar{y}_j = \sum_i x_i \sum_j A^T_{ij} \bar{y}_j \\ &= \sum_i x_i (\overline{A^T y})_i = (x, A^T y)\end{aligned}$$

- Sea $A : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}^n$ un operador que multiplica cada vector por una matriz compleja M de $n \times n$, $A(x) = Mx$. En este caso M^* es la traspuesta conjugada M.
Actividad: mostrarlo

- Sea $A : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$ un operador integral
$$(Af)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy\,,$$
con K una función continua. Luego,
$$\begin{aligned}(f, A^* g) &= (Af, g) \\ &= \int_a^b (Af)(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) f(y) dy\right] \overline{g(x)} dx \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b K(x, y) \overline{g(x)} dx\right] f(y) dy\end{aligned}$$

intercambiamos $x \leftrightarrow y$ tenemos

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \overline{\left[\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy\right]} f(x) dx \\
&= \int_a^b f(x) \overline{\left[\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy\right]} dx
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
(A^* g)(x) = \int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy \,,
$$

esto es, el adjunto del operador integral es un operador integral con un núcleo que se construye a partir del primero intercambiando las variables y conjugando.

Observación: Si el núcleo integral fuera real y simétrico, esto es si

$$
\overline{K(x,y)} = K(y,x)
$$

resultaría que A^* coincide con A. Veamos...

$$
\begin{aligned}
(f, A^* g) &= (Af, g) \\
&= \int_a^b (Af)(x) \overline{g(x)} dx \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y) f(y) dy\right] \overline{g(x)} dx \\
&= \int_a^b \left[\int_a^b K(x,y) \overline{g(x)} dx\right] f(y) dy \\
&= \int_a^b \overline{\left[\int_a^b \overline{K(y,x)} g(y) dy\right]} f(x) dx \\
&= \int_a^b f(x) \overline{\left[\int_a^b K(x,y) g(y) dy\right]} dx \\
&= (f, Ag)
\end{aligned}
$$

Definición de autoadjunto o hemitiano: Un operador lineal acotado es autoadjunto o hemitiano si

$$
A^* = A
$$

.

Observación: Si A es autoadjunto, entonces

$$
(u, Au) \quad \text{es real para cualquier } u \,.
$$

Veamos...

$$
(u, Au) = \overline{(Au, u)} = \overline{(u, Au)}
$$

Norma de un operador hermitiano: Si A es un operador acotado autoadjunto, entonces

$$
||A|| = sup\{|(x, Ax)| : ||x|| = 1\} \,.
$$

Sobre invertibilidad Sea A un operador autoadjunto sobre H y sea V el rango de A. Si V es denso en H, entonces $A : H \to V$ es invertible.

Definición de operador unitario: Un operador lineal acotado sobre un espacio de Hilbert H es llamado unitario si
$$A^* A = AA^* = I \,.$$
Notar que los operadores unitarios son invertibles

Norma de Ax con A unitario: Si A es unitario entonces
$$||Ax|| = ||x||$$
para todo $x \in H$, esto es A no cambia la longitud, luego corresponde a una rotación, esto es pude considerarse a un cambio de coordenadas que no cambia la longitud de los vectores.

Ejemplo: La siguiente exponencial del operador autoadjunto B es unitaria,
$$e^{iB} \,,$$
son los operadores que corresponden a rotaciones y traslaciones en Mecánica Cuántica.

Sobre los autovectores de operadores unitarios: Todos los autovectores de un operador unitario tienen módulo unidad, y autovectores de autovalores diferentes son ortogonales.

Teorema. Autovalores de operadores autoadjuntos: Si A es un operador autoadjunto de un espacio de Hilbert, entonces todos sus autovalores son reales, y autovectores de autovalores diferentes son ortogonales.

Veamos... Sea $Ax = \lambda_x x$:

- Sobre autovalor real,
$$(Ax, x) = (\lambda_x x, x) = \lambda_x (x, x)$$
$$(Ax, x) = (x, A^* x) = (x, Ax) = (x, \lambda_x x) = \bar{\lambda}_x (x, x) \,,$$
con $(x, x) \neq 0$. Luego, $\lambda_x = \bar{\lambda}_x \in \mathcal{R}$.

- Sobre ortogonalidad,
$$(Ay, x) = (\lambda_y y, x) = \lambda_y (y, x)$$
$$(Ay, x) = (y, A^* x) = (y, Ax) = (y, \lambda_x x) = \bar{\lambda}_x (y, x) = \lambda_x (y, x) \,,$$
restando miembro a miembro
$$0 = (\lambda_y - \lambda_x)(y, x)$$
si $\lambda_y \neq \lambda_x$, entonces $(y, x) = 0$.

Teorema. Autovalor acotado: Si A es un operador acotado y λ un autovalor de A, entonces
$$|\lambda| \leq ||A|| \,.$$

11.3 Operadores compactos

Antes de definir operadores compactos daremos las nociones de compacticidad y relativamente compacto en conjuntos, dado que es la propiedad que reemplaza la de acotado en espacios de dimensión infinita.

Espacio compacto: Un subconjunto S de un espacio normado B es compacto si cada sucesión infinita de elementos de S tiene una sub sucesión la cual converge a un elemento de S.

Ejemplo: Intervalo cerrado en $\mathcal{R}$. Existe un teorema del análisis clásico que afirma que cada sucesión infinita de números reales en un intervalo cerrado tiene una sub sucesión convergente.

Espacio relativamente compacto: Un subconjunto S de un espacio normado N es relativamente compacto si cada sucesión en S tiene una subsucesión que converge a un elemento de N. A diferencia de la compacticidad no pide que la sub sucesión converja en S sino en N, luego, la clausura de S es compacto.

Operador compacto: Un operador A sobre un espacio normado es **compacto** si mapea cada conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto.

Ejemplo: En un espacio de dimensión infinita, cada operador lineal acotado cuyo rango es finito es compacto; por ejemplo el operador integral T

$$Tu = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)u(y)dy \,,$$

mapea cada función en una combinación lineal de $\sin x$ y $\cos x$ (ver detalles el pág. 227 del libro), esto es, en un subespacio de $L_2[0,2\pi]$ de dos dimensiones, por lo tanto, T es compacto.

Ejemplo: Si $K(x,y)$ es continuo para $a \leq x,\ y \leq b$, y $f(y,z)$ es continua para $a \leq y \leq b$ y todo z, entonces el operador integral $T : C[a,b] \to C[a,b]$

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y,u(y))dy$$

es compacto.

Ejemplo: El operador lineal integral sobre $L_2[a,b]$ con núcleo K es compacto si la siguiente integral converge

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy \,.$$

Observación: Todas las definiciones y teoremas introducidos hasta el momento fueron necesarias para justificar que los autovectores de operadores autoadjuntos compactos sobre un espacio de Hilbert forman una base para el espacio. Recordar que en el capítulo anterior aprendimos sobre las propiedades de las bases pero no dio una forma de determinarla. El objetivo principal de este capítulo es tener una forma explícita de poder determinar una base. *Veamos...*

Teorema espectral: Sea A un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H. Entonces H tiene una base (e_n) consistente de autovectores ortonormales de A. Si H es de dimensión infinita, los autovalores $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y si

$$x = \sum_n c_n e_n$$

entonces

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n e_n \,.$$

Observación: El hecho que H tenga una base ortonormal que son autovectores de A es equivalente a lo siguiente: si tomamos una base ortonormal para cada autoespacio E_i de A, entonces la unión de todos estos conjuntos es una base ortonormal de H, esto es

$$H = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots .$$

Conjunto completo: Un conjunto completo en un espacio producto interno es un conjunto tal que el único vector ortogonal a todos los miembros del conjunto es el vector nulo.

Proposición: Un conjunto ortogonal de vectores en un espacio producto interno es **completo** si y sólo si es una base.

Teorema. Operadores que conmutan: Si A y B son operadores autoadjuntos compactos que conmutan, esto es $AB = BA$, entonces ambos tienen un conjunto ortonormal completo que son autovectores a ambos.

Notación: Suele usarse la siguiente expresión para notar operadores que conmuntan

$$[A, B] = 0\,,$$

donde a $[\cdot,\cdot]$ se le llama **conmutador** y significa

$$[A, B] = AB - BA\,.$$

11.4 Proyectores

Operador proyección: Sea S un subespacio del espacio de Hilbert H. El operador

$$P : H \to S$$

definido por

$$Px = y\,,$$

donde y es la proyección[4] de x sobre S, el operador P es denominado operador proyección sobre S, con S es el **rango** de P.

Propiedades: Un proyector P es lineal, acotado, autoadjunto, y satisface

$$P^2 = P\,.$$

Si $P \neq 0$, entonces,

$$||P|| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1\,.$$

con λ autovalor de P (ver teorema del material complemetario).

Proposición: Si P es un operador lineal autoadjunto acotado con $P^2 = P$, entonces P es una proyección.

[4]Si S es un subespacio de H, entonces para cualquier $x \in H$ existe un único $y \in S$, denominado proyección de x en S, y $z \perp S$ tal que $x = y + z$.

Espacios ortogonales: Dos subespacios S y T de un espacio de Hilbert son ortogonales si $(s,t) = 0$ para todo $s \in S$ y todo $t \in T$.

Proyectores ortogonales: Dos proyectores P y Q en un espacio de Hilbert H son ortogonales entre sí, si sus rangos son subespacios de Hilbert ortogonales.

Lemma: Si P y Q son proyectores ortogonales, entonces

$$PQ = 0\,.$$

Conjunto ortogonal de proyectores: Un conjunto $\{P_n\}$ de proyectores es llamado conjunto ortogonal de proyectores si (i) P_i es ortogonal a P_j para todo $i \neq j$, y (ii) $P_i \neq 0$ para cada i.

Ejemplo: Sea (e_n) una base ortonormal de H, y sea que para cada r, P_r es el proyector del subespacio unidimensional E_r expandido por e_r. Si $r \neq n$, los subespacios E_n y E_r son ortogonales, y los proyectores P_n y P_r son ortogonales. $\{P_n\}$ es un conjunto ortogonal de proyectores.

Teorema espectral en término de proyectores: Sea A un operador autoadjunto compacto sobre un espacio de Hilbert H, con autovectores ortogonales $e_1, e_2, \cdots$ y autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$. Sea P_r un proyector sobre el subespacio expandido por e_r. Entonces, para cada $x \in H$

$$x = \sum_r P_r x\,,$$

y

$$A = \sum_r \lambda_r P_r\,.$$

Observación: Si $A = \sum_r \lambda_r P_r$, entonces

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_r \lambda_r^n P_r \\ p(A) &= \sum_r p(\lambda_r) P_r \\ f(A) &= \sum_r f(\lambda_r) P_r \end{aligned}$$

com $p(x) = \sum_{s=1}^n a_s x^s$ y $f(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to 0$.

Notación: Si escribimos los autovectores en notación de bracket resulta

$$B|b_r\rangle = \lambda_r |b_r\rangle$$

. Luego, cada P_r puede escribirse como

$$P_r = |b_r\rangle\langle b_r|$$

de modo que

$$B = \sum_r \lambda_r |b_r\rangle\langle b_r|\,.$$

Un vector arbitrario en la base $\{|b_r\rangle\}$ se escribe como

$$|x\rangle = \sum_r c_r |b_r\rangle$$

con coeficientes generalizados de Fourier c_n dados por

$$c_r = \langle b_r|x\rangle\,.$$

La acción del operador unitario e^{iB} actuando sobre un elemento x, se escribiría como

$$e^{iB}|x\rangle = \sum_r c_r e^{i\lambda_r}|b_r\rangle\,.$$

Notemos que estas ecuaciones pueden obtenerse si uno escribe la identidad usando los proyectores,

$$I = \sum_r P_r = \sum_r |b_r\rangle\langle b_r|\,.$$

Veamos..

$$|x\rangle = I|x\rangle = \sum_r |b_r\rangle\langle b_r|x\rangle = \sum_r c_r|b_r\rangle$$

Para la funciones de operadores tendríamos

$$e^{iB}|x\rangle = e^{iB}I|x\rangle = e^{iB}\sum_r |b_r\rangle\langle b_r|x\rangle = \sum_r e^{iB}|b_r\rangle\langle b_r|x\rangle = \sum_r e^{i\lambda_r}|b_r\rangle\langle b_r|x\rangle = \sum_r c_r e^{i\lambda_r}|b_r\rangle$$

11.5 Material Complementario

11.5.1 Operadores compactos

Antes de definir operadores compactos daremos las nociones de compacticidad y relativamente compacto en conjuntos, dado que es la propiedad que reemplaza la de acotado en espacios de dimensión infinita.

Espacio compacto: Un subconjunto S de un espacio normado B es compacto si cada sucesión infinita de elementos de S tiene una sub sucesión la cual converge a un elemento de S.

Ej. de conj. compacto: Intervalo cerrado en $\mathcal{R}$. Existe un teorema del análisis clásico que afirma que cada sucesión infinita de números reales en un intervalo cerrado tiene una sub sucesión convergente.

Ej. de conj. no compacto: Intevalo abierto en $\mathcal{R}$. Por ejemplo, en $(0, 1)$ la sucesión $1/2$, $1/3, \cdots$ converge a 0. Luego, cada sub sucesión converge a cero y ninguna sub sucesión converge a un elemento de $(0, 1)$.

Espacio relativamente compacto: Un subconjunto S de un espacio normado N es relativamente compacto si cada sucesión en S tiene una subsucesión que converge a un elemento de N. A diferencia de la compacticidad no pide que la sub sucesión converja en S sino en N, luego, la clausura de S es compacto.

Operador compacto: Un operador A sobre un espacio normado es **compacto** si mapea cada conjunto acotado en un conjunto relativamente compacto

Observación: Para operadores lineales, compacticidad es más fuerte que acotado; cada operador compacto es acotado, pero no vale la inversa.

Cada operador lineal acotado en un espacio de dimensión finita es compacto. En un espacio de dimensión infinita, cada operador lineal acotado cuyo rango es finito es compacto; por ejemplo el operador integral T

$$Tu = \int_0^{2\pi} \cos(x-y)u(y)dy\,,$$

mapea cada función en una combinación lineal de $\sin x$ y $\cos x$ (ver detalles el pág. 227 del libro), esto es, en un subespacio de $L_2[0, 2\pi]$ de dos dimensiones, por lo tanto, T es compacto.

Ejemplo 1 de 2: Si $K(x, y)$ es continuo para $a \leq x,\ y \leq b$, y $f(y, z)$ es continua para $a \leq y \leq b$ y todo z, entonces el operador integral $T : C[a, b] \to C[a, b]$

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y,u(y))dy$$

es compacto.

Ejemplo 2 de 2: El operador identidad es acotado pero no compacto en un espacio de dimensión infinita.

Proposicón: Un operador lineal acotado de rango finito es compacto.

Teorema. Límite de operadores compactos: Sean $A, A_1, A_2, \cdots$ operadores $N \to M$, donde N es un espacio normado y M un espacio de Banach. Si A_i es compacto para todo i y $A_i \to A$ cuando $i \to \infty$, entonces A es compacto.

Definición de núcleo integral separable: El operador integral $A : L_2[a, b] \to L_2[a, b]$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

se dice que tiene núcleo separable si

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(x)q_i(y)\,,$$

con $p_i, q_i \in L_2[a, b]$ para $i = 1, \cdots, n$.

Lemma: Un operador con núcleo separable es compacto.

Teorema. Operador integral compacto: El operador lineal integral sobre $L_2[a, b]$ con núcleo K es compacto si la siguiente integral converge

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dxdy\,.$$

Teorema. Operadores completamente continuos: Si $x_n \to x$ débilmente y A es un operador lineal compacto, entonces

$$Ax_n \to Ax \quad \text{fuertemente}\,.$$

Tales operadores se denominan completamente continuos.

Observación: Todas las definiciones y teoremas introducidos hasta el momento fueron necesarias para justificar que los autovectores de operadores autoadjuntos compactos sobre un espacio de Hilbert forman una base para el espacio. Recordar que en el capítulo anterior aprendimos sobre las propiedades de las bases pero no dio una forma de determinarla. El objetivo principal de este capítulo es tener una forma explícita de poder determinar una base. *Veamos...*

Proposición: Si A es un operador acotado autoadjunto, entonces existe un número λ y una sucesión (x_n) con $||x_n|| = 1$ para todo n, tal que $Ax_n \to \lambda x_n \to 0$ cuando $n \to \infty$. El número λ es igual a $||A||$ o $-||A||$.

Teorema: Si A es un operador lineal autoadjunto compacto, entonces tiene un autovalor λ igual a $||A||$ o $-||A||$; existe un correspondiente autovector normalizado el cual maximiza $|(x, Ax)|$ con $||x|| = 1$, y el máximo valor de $|(x, Ax)|$ es $|\lambda|$.

Observación: Este teorema no sólo garantiza la existencia de un autovalor sino que también da un técnica para hallarlo. Por otro lado, repitiendo el procedimiento pueden obtenerse infinitos autovalores!.

Proposición: Si A es un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H, entonces A tiene un conjunto ortonormal de autovectores $e_1, e_2, \cdots$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$, y para cualquier $x \in H$

$$x = \sum_n c_n e_n + y$$

para escalares c_n, con $Ay = 0$. Si H es de dimensión infinita, entonces $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos: Sea A un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert H. Entonces H tiene una base (e_n) consistente de autovectores ortonormales de A. Si H es de dimensión infinita, los autovalores $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, y si

$$x = \sum_n c_n e_n$$

entonces

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n e_n\,.$$

Observación: El hecho que H tenga una base ortonormal que son autovectores de A es equivalente a lo siguiente: si tomamos una base ortonormal para cada autoespacio E_i de A, entonces la unión de todos estos conjuntos es una base ortonormal de H, esto es

$$H = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots\,.$$

Definición de conjunto completo: Un conjunto completo en un espacio producto interno es un conjunto tal que el único vector ortogonal a todos los miembros del conjunto es el vector nulo.

Observación: Un conjunto ortogonal completo es lo mismo que una base.

Proposición: Un conjunto ortogonal de vectores en un espacio producto interno es **completo** si y sólo si es una base.

Teorema. Operadores que conmutan: Si A y B son operadores autoadjuntos compactos que conmutan, esto es $AB = BA$, entonces ambos tienen un conjunto ortonormal completo que son autovectores a ambos.