Métodos Matemáticos de la Física II (F1810)
3er año Lic. Física.
1er Semestre 2023

Docentes:
Federico Torresi
Alejandro Mezio
Rodolfo (Rolo) M. Id Betan
Por favor, reportar errores o comentarios a:
idbetan@fceia.unr.edu.ar

April 6, 2023

Contents

Part I

Ecuaciones en derivadas parciales

Part II

Análisis Complejo

Part III

Análisis funcional

Chapter 7

Introducción a las funciones generalizadas. Distribuciones singulares

Modificado: 2023.04.06

Sobre Introducción a las funciones generalizadas: Se introduce el análisis funcional el cual le da un marco teórico riguroso a ciertos conceptos definidos en forma pragmática en otras áreas de la ciencia, como por ejemplo la delta de Dirac. En la primera sección damos los resultados de Dirac al introducir la función delta y luego veremos como cada concepto introducido por Dirac quedan enmarcados en el análisis funcional.
Contenido de Introducción a las funciones generalizadas: Función delta de Dirac y sus propiedades tal cual definidas por P. Dirac. Definición de soporte acotado (compacto). Definición de función test y convergencia. Definición de funcional lineal y continuo. Definición de distribuciones. Distribuciones regulares y singulares. Operaciones elementales. Cálculo diferencial. Sucesión, convergencia y teorema de diferenciación término a término.
Fuentes: (i) P. A. M. Dirac. The principles of Quantum Mechanics. Oxford. Clarendon Press. Fourth Edition (1958). Sec. 15. (ii) D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 1.
Dedicación: una (1) clase.

Sobre Distribuciones singulares: Mostramos cómo incorporar integrales divergentes y series divergentes en la estructura del análisis funcional, de modo que definen distribuciones con potencia negativas y suma de series en término de distribuciones.
Contenido: Distribuciones de la forma x^{-n}, con $n = 1, 2, \cdots$. Series divergentes. Expresiones de la delta en forma de serie e integral.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 1.
Dedicación: una (1) clase.

7.1 Delta de Dirac '*a lo Dirac*'

Durante el desarrollo de la Mecánica Cuántica Dirac se encontró con que tenía que tratar con vectores de longitud infinita, al tiempo que las magnitudes física calculadas con estos vectores eran finita.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}u(x) = Eu(x) \longrightarrow Hu(x) = Eu(x)$$

Autofunciones con norma finita:

$$Hu(x) = Eu(x) \longrightarrow u(x, E_n) \longrightarrow \int u^2(x, E_n)dx < \infty$$

con $n \in \mathcal{N}_0$.

Autofunciones con norma infinita

$$Hu(x) = Eu(x) \longrightarrow u(x, E) \longrightarrow \int u^2(x, E)dx = \infty$$

con $E \in \mathcal{R}^+$.

Para lidiar con esto introdujo la cantidad $\delta(x)$, dependiente del parámetro x, tal que $\delta(x)$ satisface las siguientes condiciones,

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$

- $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$

La magnitud $\delta(x)$, claramente, no es una función, por lo que lo definió como una *función impropia*. A pesar de no ser una función puede combinarse en formas apropiadas en ciertas expresiones siempre que no surjan inconsistencias obvias.

Por ejemplo, puede ser usada en el siguiente contexto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

con $f(x)$ cualquier función continua. También vale,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

El dominio de integración no necesita ser de $(-\infty, \infty)$ sino sólo en la región cercana al punto crítico donde la función $\delta(x)$ no es nula, esto es, en la vecindad del argumento nulo. Por ejemplo,

$$\int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)$$

En Mecánica Cuántica, la función impropia $\delta(x)$ aparece siempre en un integrando. Luego, el uso de $\delta(x)$ no afecta a la rigurosidad de la teoría y sólo opera como una forma conveniente de notación, simplificando de esta forma, expresiones incómodas o engorrosas.

Una forma alternativa de definir la función $\delta(x)$, que muestra bajo qué condiciones ésta surge es la siguiente. Sea $\epsilon'(x)$ el coeficiente diferencial de la función $\epsilon(x)$ definido por (reconocer la función escalón)

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Sean, $g_1 > 0$, y $g_2 > 0$, luego,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\epsilon'(x)dx &= \int_{-g_2}^{g_1} f(x)\epsilon'(x)dx \\
&= [f(x)\epsilon(x)]_{-g_2}^{g_1} - \int_{-g_2}^{g_1} f'(x)\epsilon(x)dx \\
&= f(g_1) - \int_0^{g_1} f'(x)dx \\
&= f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx
\end{aligned}$$

Haciendo abuso de notación, escribimos,

$$\epsilon'(x) = \delta(x)$$

De este modo, Dirac encontró que la función $\delta(x)$ aparece siempre que exista una discontinuidad.

Dirac encontró un número de ecuaciones que pueden escribirse en términos de la $\delta(x)$. Ellas constituyen, si se quiere, reglas para la manipulación algebraica de ecuaciones donde se entiende la equivalencia entre los miembros de la izquierda y derecha, por ejemplo

$$\delta(-x) = \delta(x)$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{a}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a}$$

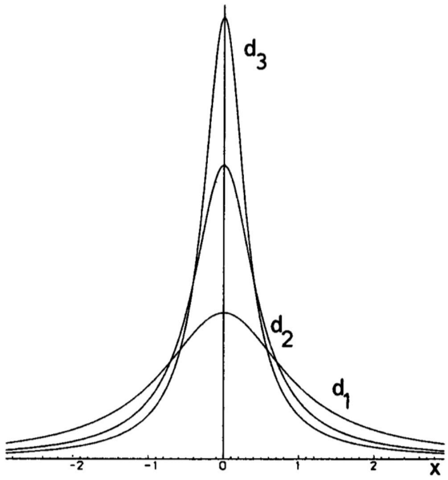
$$\int \delta(a-x)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

con $a > 0$.

Una realización posible de la delta es dada por el límite de la siguiente sucesión,

$$d_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} d_n(x)dx = 1$$



Esto significa,

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{n\to\infty} d_n(x)\right] dx = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = 0$$

  para $x \neq 0$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x) = \delta(x)$$

El objeto del análisis funcional es dar un marco riguroso a este tipo de funciones impropias, hoy denominadas funcionales.

7.2 Definiciones

El análisis de funciones generalizadas o distribuciones da una estructura para validar funciones más exóticas, denominadas funciones generalizadas, y da el marco teórico para el tratamiento de ecuaciones diferenciales con soluciones extendidas, esto es, soluciones de ecuaciones diferenciales de orden n que no son derivables n veces. Por otro lado veremos que la vida es más fácil en el mundo de las distribuciones.

Introduzcamos una serie de definiciones que darán el marco para definir distribuciones y sus operaciones.

Soporte y soporte acotado: El soporte de una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ es

$$sop(f) = \{x : f(x) \neq 0\} .$$

Se dice que una función tiene soporte acotado si existen a y b reales, tal que

$$sop(f) \subset [a, b] .$$

Función continuamente diferenciable y función suave: una función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ se dice n veces continuamente diferenciable si sus primeras n derivadas existen y son continuas. Si las derivadas de todos los órdenes de f existen y son continuas, entonces a f se la denomina **suave** o infinitamente diferenciable.

Función test: una función test es una función suave $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$ con soporte acotado.

Ejemplo:

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}} & a < x < b \\ 0 & x \le a,\ x \ge b \end{cases} \tag{7.1}$$

ver Fig. 7.1 ($a = -1$, $b = 2$).

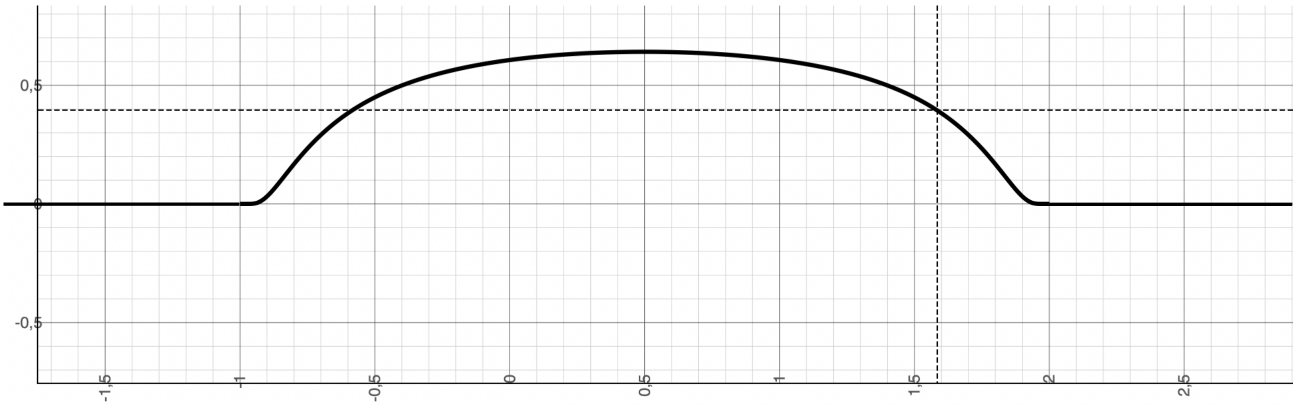


Figure 7.1:

Actividad: Graficar

- $f(x)$, con $f(x) = 0$ para $x \ge 0$, y $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, para $x < 0$. Chequear que es suave.
- $f(-x)$, con $f(x)$ definida arriba
- $f(x-1)$
- $f(-(x+1))$
- $g(x)$ con $g(x) = 0$ para $|x| \ge 1$, y $g(x) = e^{\frac{2}{(x^2-1)}}$, para $|x| < 1$.

Algunas propiedades de las funciones test:

- La suma de dos funciones test es una función test.
- El producto de una función test con cualquier número es una función test.
- El producto de una función test con una función suave es una función test.

Espacio de funciones test: el conjunto de todas las funciones test de lo denota por $\mathcal{D}$.

Funcional lineal: un funcional lineal sobre $\mathcal{D}$ es un mapeo $\boldsymbol{f} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, tal que

$$\boldsymbol{f}(a\phi + b\psi) = a\boldsymbol{f}(\phi) + b\boldsymbol{f}(\psi)$$

para todo $a, b \in \mathcal{C}$ y $\phi, \psi \in \mathcal{D}$.

Ejemplos:

- $\phi \mapsto \phi(0)$ (tiene color a delta de Dirac)
- $\phi \mapsto \int f(x)\phi(x)dx$, con f suficientemente bien comportada.

Convergencia en $\mathcal{D}$: si (ϕ_n) es una sucesión de funciones test y Φ es otra función test, decimos $\phi_n \to \Phi$ en $\mathcal{D}$ si

- existe un intervalo $[a, b]$ conteniendo los soportes $sop(\Phi)$ y $sop(\phi_n)$ para todo n,
- $\phi_n(x) \to \Phi(x)$ cuando $n \to \infty$, uniformemente[1] para $x \in [a, b]$, y
- para cada k, $\phi_n^{(k)} \to \Phi^{(k)}$ cuando $n \to \infty$, uniformemente para $x \in [a, b]$, con $\phi^{(k)}$ denotando la derivada k-ésima.

7.3 Distribuciones

Definición de funcional continuo: Un funcional **f** sobre $\mathcal{D}$ es continuo si mapea cada sucesión convergente en $\mathcal{D}$ en una sucesión convergente en $\mathcal{C}$, esto es, si

$$\boldsymbol{f}(\phi_n) \to \boldsymbol{f}(\Phi)$$

para cada $\phi_n \to \Phi$ en $\mathcal{D}$.

Definición de distribución: Un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{D}$ se denomina **distribución** o **función generalizada**.

Ejemplo: $\boldsymbol{\delta}$ es la distribución o función generalizada definida por

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \phi(0)$$

Donde uno interpreta que la acción de la distribución δ es evaluar la función test ϕ en cero. Esto es justamente la delta de Dirac. Queda pendiente dar las propiedades introducidas por Dirac.

Notar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es sólo una forma simbólica para representar el mapeo $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. En cuántica la usaremos en la forma

$$\langle \cdot | \cdot \rangle \, .$$

Esta notación se denomina **braket**, de modo que **bra** representa $\langle \cdot |$ y **ket** representa $| \cdot \rangle$.

[1] *Sobre convergencia uniforme:* se dice que $f_k(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ si, cualquiera sea $\varepsilon > 0$, existe un entero N, que puede depender de ε, tal que para $k \geq N$ se verifica, $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ para todo x.

7.3.1 Clasificación

Vamos a clasificar las distribudiones según pueden derivarse de funciones ordinarias o no.

- **Distribución regular:** para cada función f localmente integrable existe una distribución $\boldsymbol{f}$ definida por la siguiente integral

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

  con $\phi \in \mathcal{D}$. Luego, uno puede decir que la distribución $\boldsymbol{f}$ es *generada* por la función f.
  Ejemplo:

$$\langle \mathbf{1}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx$$

  con $f(x) = 1$.

- **Distribución singular:** Todas las otras distribuciones que no se definen a través de funciones localmente integrables son denominadas singulares.
  Ejemplo: Delta de Dirac

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \phi(0)$$

  Si escribimos

$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

  donde la integral es sólo en concepto de notación, como lo es $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ambas notaciones representan el mapeo $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

7.3.2 Operaciones

En esta sección vamos a definir algunas operaciones entre distribuciones. Como regla general, el producto no está definido pero muchas otras operaciones son análogas al cálculo usual, y por este motivo, suele llamarse a las distribuciones, *funciones generalizadas*.

Suma: si $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son distribuciones y a y b son números complejos, se define la distribución

$$a\boldsymbol{f} + b\boldsymbol{g}$$

como el funcional

$$\phi \mapsto a\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle + b\langle \boldsymbol{g}, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Producto (con una función suave): si $\boldsymbol{f}$ es una distribución y h una función suave $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$, se define el producto de $\boldsymbol{f}$ y h como la distribución

$$\boldsymbol{hf} : \phi \mapsto \langle \boldsymbol{f}, h\phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Comentario: si h no es suave[2], entonces $h\phi$ no es suave y $h\phi \notin \mathcal{D}$, por lo que la definición anterior no funciona. Luego, no podemos definir el producto de una distribución con una función que es discontinua o tiene derivadas discontinuas. Las distribuciones, en general, no pueden ser multiplicadas, que es lo que anticipamos al comienzo de la sección.

[2]recordar concepto de función suave dado antes

Igualdad: dos distribuciones $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son iguales en (a,b), si

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{g}, \phi \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$ tal que $sop(\phi) \subset (a,b)$.

Ejemplo: $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0}$ en $(0,\infty)$.

$$\langle \mathbf{0}, \phi \rangle = \int_0^\infty 0\phi(x)dx = 0$$
$$\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle = \int_0^\infty \delta(x)\phi(x)dx = 0$$

Uno podría decir que $\delta(x)$ tiene el valor cero para $x > 0$!.

Actividad: Repetir para $(-\infty, 0)$.

Traslación: para cada distribución $\boldsymbol{f}$ y cada real a, se define una nueva distribución $\boldsymbol{f}_{+a}$ como

$$\langle \boldsymbol{f}_{+a}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{f}, \phi(x-a) \rangle \,.$$

Se denomina a la distribución $\boldsymbol{f}_{+a}$ traslación de $\boldsymbol{f}$.

Ejemplo:

$$\langle \boldsymbol{\delta}_{+\boldsymbol{a}}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}(x), \phi(x-a) \rangle = \phi(-a)$$

Observación: si $\boldsymbol{f}$ es una distribución regular generada por la función f, entonces $\boldsymbol{f}_{+a}$ es generada por la función $f(x+a)$.

Actividad: mostrarlo realizando cambio de variables en la forma integral del funcional.

Cambio de variable: para cualquier distribución $\boldsymbol{f}$ y cualquier real $a \neq 0$, se define una nueva distribución $\boldsymbol{f}_{\cdot a}$ como

$$\langle \boldsymbol{f}_{\cdot a}, \phi \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{f}, \phi(x/a) \rangle}{|a|} \,.$$

Ejemplo:

$$\langle \boldsymbol{\delta}_{\cdot a}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{\delta}, \phi(x/a) \rangle / |a| = \phi(0)/|a|$$

Luego,

$$\boldsymbol{\delta}_{\cdot a} = \frac{\boldsymbol{\delta}(x)}{|a|}$$

con $a \neq 0$. Esta es una de las propiedades dadas por Dirac.

Observación: si $\boldsymbol{f}$ es una distribución regular generada por la función f, entonces $\boldsymbol{f}_{\cdot a}$ es generada por la función $f(ax)$.

7.4 Cálculo diferencial

Derivada: La derivada de una función generalizada $\boldsymbol{f}$ es la función generalizada $\boldsymbol{f}'$ definida por

$$\langle \boldsymbol{f}', \phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \phi' \rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{D}$.

Observación 1: Para el caso de distribuciones regulares, la función que genera el funcional $\boldsymbol{f}'$ es $f'(x)$, como puede verificar integrando por partes,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{f}', \phi\rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \phi'\rangle &= \int (-f(x))\phi'(x)dx \\ &= (-f)\phi|_{-\infty}^{\infty} - \int (-f'(x))\phi(x)dx \\ &= \int f'(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

Observación 2: Cada función generalizada es diferenciable, dada la bondad de las funciones test.

Observación 3: En particular, si $f(x)$ es una función localmente integrable la cual no es diferenciable, la distribución $\boldsymbol{f}'$ es llamada derivada generalizada de $f(x)$, por ejemplo, la función escalón admite una derivada generalizada y resulta ser la delta. Esto incorpora el resultado de Dirac de la definición alternativa de la delta mostrado en la primera sección.

Actividad 1: calcular la derivada generalizada de $f(x) = |x|$.
Sol.: $\boldsymbol{sgn}$, con $sgn(x) = -1(1)$ para $x < (>)0$, luego $\langle |\boldsymbol{x}|', \phi\rangle = \langle \boldsymbol{sgn}, \phi\rangle$.

Actividad 2: calcular la derivada generalizada de la función de Heaviside.
Sol.: $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{\delta}$.

Derivada de la suma:

$$\langle (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})', \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}', \phi\rangle + \langle \boldsymbol{g}', \phi\rangle$$

o

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f}' + \boldsymbol{g}'$$

Derivada del producto:

$$\langle (\boldsymbol{fg})', \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{fg}', \phi\rangle$$

o

$$(\boldsymbol{fg})' = \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g} + \boldsymbol{fg}'$$

donde al menos una de las distribuciones es definida por una función suave.

Veamos,

$$\begin{aligned}\langle (\boldsymbol{fg})', \phi\rangle &= -\langle \boldsymbol{fg}, \phi'\rangle = -\langle \boldsymbol{f}, g\phi'\rangle = -\langle \boldsymbol{f}, (g\phi)' - g'\phi\rangle \\ &= -\langle \boldsymbol{f}, (g\phi)'\rangle + \langle \boldsymbol{f}, g'\phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}', g\phi\rangle + \langle \boldsymbol{f}, g'\phi\rangle \\ &= \langle \boldsymbol{f}'\boldsymbol{g}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{fg}', \phi\rangle\end{aligned}$$

7.5 Convergencia

Definición: Una sucesión de distribuciones $(\boldsymbol{f}_n)$ se dice que converge si la sucesión de números $\langle \boldsymbol{f}_n, \phi\rangle$ es convergente para todo ϕ de $\mathcal{D}$.

Teorema sobre la existencia de 'límite': si $(\boldsymbol{f}_n)$ es una sucesión de distribuciones convergente, entonces existe una distribución $\boldsymbol{F}$ tal que

$$\langle \boldsymbol{f}_n, \phi \rangle \to \langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle$$

para todo ϕ de $\mathcal{D}$. Usamos la notación $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$ cuando $n \to \infty$.

Ejemplo: realización de la delta de Dirac como límite de las funciones vista en la primera sección.

$$\boldsymbol{d}_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)} \to \boldsymbol{\delta}(x)$$

con $\boldsymbol{d}_n(x)$ las distribuciones regulares generadas por $d_n(x)$ y $n \to \infty$.

Teorema de la diferenciación término a término: si $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots$ son distribuciones tal que $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\boldsymbol{f}'_n \to \boldsymbol{F}'\,.$$

Ejemplo. Derivada de la delta: aplicando el teorema anterior a $\boldsymbol{d}_n \to \boldsymbol{\delta}$, resulta la siguiente realización para la derivada de la delta,

$$d'_n(x) = -\frac{2}{\pi}\frac{n^3\,x}{(1+n^2x^2)^2} \to \delta'(x)$$

para $n \to \infty$.

Actividad: graficar $d'_n(x)$ para algunos n.

Luego,

$$\langle \boldsymbol{d}'_n, \phi \rangle \to \langle \boldsymbol{\delta}', \phi \rangle = -\phi'(0)$$

*Observación 1:*Notemos cuanto más simple han resultado algunas de las definiciones de este capítulo respecto a su contraparte del cálculo usual.

Observación 2: Notemos que la notación $\langle \boldsymbol{\delta}, \phi \rangle \to \int \delta(x)\phi(x)dx$, no tiene el significado usual de integral, pero de todos modos la usaremos como una notación alternativa a la notación $\langle \cdot, \phi \rangle \to$, donde $\cdot$ representa un funcional, sea regular o no.

Podemos apreciar la versatilidad de la notación integral si la usamos para operar formalmente, por ejemplo,

$$\langle \delta(x+a), \phi \rangle = \int \delta(x+a)\phi(x)dx = \int \delta(y)\phi(y-a)dy = \phi(0-a) = \phi(-a)$$

que hemos introducido anteriormente como operación de traslación para las distribuciones: $\boldsymbol{\delta}_{+\boldsymbol{a}}$.

Actividad: Aplicar la misma técnica al cambio de variable $\boldsymbol{\delta}(ax)$, con $a \in \mathcal{R}$. Contemplar por separado $a > 0$ y $a < 0$.
Rta.: Esto resulta ser el cambio de variable introducido anteriormente, por lo que podríamos escribir: $\boldsymbol{\delta}_{\cdot a} = \boldsymbol{\delta}(ax)$ como para el caso de distribuciones regulares.

Distribuciones singulares

Sobre Distribuciones singulares: Mostramos cómo incorporar integrales divergentes y series divergentes en la estructura del análisis funcional, de modo que definen distribuciones con potencia negativas y suma de series en término de distribuciones.
Contenido: Distribuciones de la forma x^{-n}, con $n = 1, 2, \cdots$. Series divergentes. Expresiones de la delta en forma de serie e integral.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 1.
Dedicación: una (1) clase.

7.6 Distribuciones singulares de la forma x^{-n}

La función

$$\ln|x|$$

es localmente integrable y tiene por integral indefinida la función continua

$$x\ln|x| - x\,;$$

la cual, a su vez define una distribución regular. Pero la derivada de $\ln|x|$ es

$$\frac{1}{x}$$

y ésta no es localmente integrable por lo que no genera una distribución regular. Nuestro primer objetivo es definir una distribución singular que sea la versión generalizada de la función $1/x$:

$$\boldsymbol{P/x}\,.$$

Luego, definiremos distribuciones singulares

$$\boldsymbol{x}^{-n} \quad \text{con} \quad n = 2, 3, \cdots\,.$$

7.6.1 Preliminares para la distribución $\boldsymbol{P/x}$

Para evitar la singularidad en $x = 0$ en la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

hay que evitar el punto $x = 0$.

Integral impropia: El proceso de evitar una singularidad en la integral, por ejemplo, en la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\,,$$

mediante el uso de un proceso límite, se denomina integral impropia. Por ejemplo, para el integrando

$$\frac{\phi(x)}{x}\,,$$

singular en $x = 0$, uno puede definir la integral $I(\epsilon, \delta)$,

$$I(\epsilon, \delta) = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\delta}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

De este modo, si la integral $I(\epsilon, \delta)$ converge en el límite de ϵ y δ tendiendo a cero en forma independiente, entonces se dice que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$$

converge a ese límite. En general este no es el caso a menos que $\phi(0) = 0$, pues resulta que uno obtiene un límite si toma $\delta = \epsilon$, pero el límite es diferente si uno toma, por ejemplo, $\delta = 2\epsilon$. Luego, se le podrían asignar diferentes valores a la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx$ según el proceso límite seleccionado!.

Valor principal: Tomando el caso simétrico, esto es,

$$\delta = \epsilon$$

da un valor a la integral impropia denominado valor principal, y se lo denota como P.

$$\begin{aligned} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx &= lim_{\epsilon \to 0^+} I(\epsilon, \epsilon) \\ &= lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] \end{aligned}$$

Valor de la integral del *valor principal* Sea $\phi \in \mathcal{D}$, luego,

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx = lim_{\epsilon \to 0^+} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \right] \tag{7.2}$$

consideremos primero el corchete,

$$\begin{aligned} [\cdots] &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\phi(x)}{x} dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x} dx \\ &= \left[\phi(x) \ln|x| |_{-\infty}^{-\epsilon} - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln|x| dx \right] + \left[\phi(x) \ln|x| |_{\epsilon}^{\infty} - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln|x| dx \right] \\ &= [\phi(-\epsilon) - \phi(\epsilon)] \ln|\epsilon| - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln|x| dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln|x| dx \\ &= \phi'(\xi)\, 2\epsilon \, \ln|\epsilon| - \int_{-\infty}^{-\epsilon} \phi'(x) \ln|x| dx - \int_{\epsilon}^{\infty} \phi'(x) \ln|x| dx \, , \end{aligned}$$

donde hemos usado el teorema del valore medio.

Tomando el límite, el primer término de anula, resultando

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx = lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon}\frac{\phi(x)}{x}dx + \int_{\epsilon}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx\right]$$

$$= lim_{\epsilon\to 0^+}\left[-\int_{-\infty}^{-\epsilon}\phi'(x)\ln|x|dx - \int_{\epsilon}^{\infty}\phi'(x)\ln|x|dx\right]$$

$$= -\int_{-\infty}^{0}\phi'(x)\ln|x|dx - \int_{0}^{\infty}\phi'(x)\ln|x|dx$$

Luego,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(x)\ln|x|dx \tag{7.3}$$

Valor principal para f arbitraria (no necesariamente test): Si f es una función definida para $x \neq 0$, se define el valor principal de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ como,

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{\epsilon}^{\infty} f(x)\, dx\right]$$

siempre que el límite exista.

7.6.2 Distribución $\boldsymbol{P/x}$

El funcional $\boldsymbol{P/x}$ es definido como

$$\langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle = P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx$$

De la sección anterior conocemos,

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(x)}{x}dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\phi'(x)\ln|x|dx$$
$$= -\langle \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi'\rangle$$

luego,

$$\langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle = -\langle \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|, \phi'\rangle$$

Usando la definición de derivada funcional tenemos,

$$(\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|)' = \boldsymbol{P/x}$$

Luego, $\boldsymbol{P/x}$ puede tomarse como la función generalizada asociada a $1/x$. $\boldsymbol{P/x}$ es otro ejemplo de distribución singular que se agrega a la delta.

Observación: por el análisis que hicimos al definir el valor principal puede inferirse que otras versiones de funciones generalizadas de $1/x$ podrían obtenerse tomando diferente criterio para el límite (recordar que tomamos el límite simétrico $\delta = \epsilon$), pero todas ellas son menos útiles y, en última instancia, pueden escribirse en término de $\boldsymbol{P/x}$.

7.6.3 Preliminares para la distribuciones $\boldsymbol{x^{-n}}$

Para $n > 1$ el valor principal no existe por lo que no puede usarse para asignarle un valor bien definido, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} dx$$

diverge para $n > 1$. Vamos a definir distribuciones de potencias negativas a partir de la derivada de la distribución $\mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$. Veamos una forma heurística de justificar una tal defnción.

Procedimiento de Hadamard: En la teoría de propagación de ondas aparecen integrales divergentes con integrandos que contienen factores de la forma $1/x^n$. Hadamard instrumentó un procedimiento para extraer un valor finito de la integral divergente. Éste consiste en integral por partes, como si la integral fuera convergente, tantas veces como haga falta hasta conseguir una integral convergente.

Veamos el caso $1/x^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx \to \phi(x) \left.\frac{(-1)}{x}\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\phi'(x) dx$$

$$\to \phi'(x) \ln|x| |_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx$$

$$\to - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx$$

Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{x^2} dx := - \int_{-\infty}^{\infty} \ln|x| \phi''(x) dx \tag{7.4}$$

7.6.4 Distribuciones $\boldsymbol{x^{-n}}$

Para cualquier entero $n > 1$, definimos la distribución $\boldsymbol{x^{-n}}$ como la derivada n-ésima del funcional

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$$

esto es,

$$\boldsymbol{x^{-n}} = \frac{d^n}{dx^n} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{ln}\,|\boldsymbol{x}|$$

Veamos para $n = 2$,

$$\langle \boldsymbol{x^{-2}}, \phi \rangle = \langle \frac{d^2}{dx^2} \frac{(-1)^{2-1}}{(2-1)!} \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|, \phi \rangle$$

$$= \langle -\frac{d^2}{dx^2} \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|, \phi \rangle$$

$$= \langle \frac{d}{dx} \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|, \phi' \rangle$$

$$= -\langle \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|, \phi'' \rangle$$

Luego,

$$\langle \boldsymbol{x^{-2}}, \phi \rangle = -\langle \mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|, \phi'' \rangle = -\int \ln |x| \phi''(x) dx \,, \tag{7.5}$$

lo cual concuerda con la propuesta de Hadamard.

Observación: Notar que para $n = 1$ recuperamos $(\mathbf{ln}\, |\boldsymbol{x}|)' = \boldsymbol{P/x}$.

7.7 Resolución de la ecuación algebraica $\boldsymbol{xf} = \mathbf{1}$

Sea que queremos hallar las distribuciones $\boldsymbol{f}$ que satisfacen la ecuación

$$\boldsymbol{xf} = 1 \,,$$

con $\boldsymbol{x}$ y $\mathbf{1}$ distribuciones regulares.

La distribución $\boldsymbol{f}$ resulta ser de la forma

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}$$

con C constante.

Veamos...

Supongamos primero que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}$ *y mostremos que verifica la ecuación* $\boldsymbol{xf} = \mathbf{1}$.

Entonces resulta,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{xf}, \phi \rangle &= \langle \boldsymbol{xP/x} + C\boldsymbol{x\delta}, \phi \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{xP/x}, \phi \rangle + \langle C\boldsymbol{x\delta}, \phi \rangle \\ &= \langle \mathbf{1}, \phi \rangle + C \langle \mathbf{0}, \phi \rangle \\ &= \langle \mathbf{1}, \phi \rangle \end{aligned}$$

luego,

$$\boldsymbol{xf} = \mathbf{1}$$

Construyamos ahora una función test para deducir que $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}$. Comencemos definiendo una función test con la propiedad que se anule cuando $x \to 0$. Ello se consigue definiendo ϕ y θ, ambas funciones test, tal que $\theta(0) = 1$ y componiéndolas de la siguiente forma, $\phi(x) - \phi(0)\theta(x)$. Luego la siguiente función $\tilde{\phi}(x) \in \mathcal{D}$ y es bien comportada en cero,

$$\tilde{\phi}(x) = \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x}$$

Entonces,

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}, x\tilde{\phi} + \phi(0)\theta\rangle = \langle \boldsymbol{f}, x\tilde{\phi}\rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{xf}, \tilde{\phi}\rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle = \langle \boldsymbol{1}, \tilde{\phi}\rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \int \tilde{\phi}(x)dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \int \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x}dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle = P\int \frac{\phi(x) - \phi(0)\theta(x)}{x}dx + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle - \langle \boldsymbol{P/x}, \phi(0)\theta\rangle + \langle \boldsymbol{f}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{f - P/x}, \phi(0)\theta\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle + \phi(0)\langle \boldsymbol{f - P/x}, \theta\rangle$$

$$= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle + \phi(0)C$$

$$= \langle \boldsymbol{P/x}, \phi\rangle + \langle \boldsymbol{\delta}, \phi\rangle C$$

$$= \langle (\boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}), \phi\rangle$$

con $C = \langle \boldsymbol{f - P/x}, \theta\rangle = cte.$

Luego,

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi\rangle = \langle (\boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}), \phi\rangle\,,$$

o

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{P/x} + C\boldsymbol{\delta}\,.$$

7.8 Suma de series divergentes

7.8.1 Preliminar

Así como en la primera sección encontramos la forma de darle significado, en el marco del análisis funcional, a las integrales divergentes de la forma x^{-n}; aquí queremos darle significado a series divergentes.

La siguiente serie, por ejemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\pi x) \tag{7.6}$$

- diverge para x entero ($x \in \mathcal{Z}$),
- oscila para $x = \frac{2n+1}{2}$, y
- no converge para $x \in \mathcal{Q}$;

por lo que esta serie no tiene significado en el análisis usual.

La serie de cosenos, ec. (7.6), puede obtenerse diferenciando *formalmente*[3] término a término la siguiente serie,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} .$$

Esta serie de senos es la serie de Fourier de la función f,

$$f(x) = \frac{1-2x}{4} , \tag{7.7}$$

la cual es periódica con período 1 y definida para $0 < x < 1$. Ver Fig. 7.2

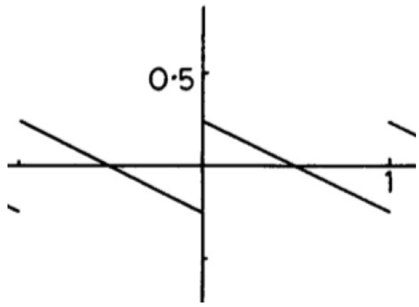


Figure 7.2:

Esta observación será utilizada para ilustrar cómo darle sentido a series divergentes, usando como ejemplo la serie (7.6).

7.8.2 Serie de cosenos

La serie,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi} \tag{7.8}$$

convergen punto a punto pero no uniformemente. Ésta puede obtenerse diferenciando término a término la siguiente función

$$F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{(2n\pi)^2} , \tag{7.9}$$

la cual converge uniformemente para todo x, y las sumas parciales son continuas y por lo tanto son *localmente integrables.*

Luego, por el teorema de convergencia distribucional [4], las sumas parciales convergen distribucionalmente, esto es, la serie de distribiuciones

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{-2} \boldsymbol{\cos(2n\pi x)}$$

converge a la distribución $\boldsymbol{F}$ generada por la suma clásica $F(x)$ de la serie (7.9),

$$-\sum_{n=1}^{m} (2n\pi)^{-2} \boldsymbol{\cos(2n\pi x)} \to \boldsymbol{F} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty ,$$

[3]La derivación término a término no es permisible en el análisis clásico porque la serie no converge uniformemente

[4]Si $F, f1, f2, \cdots$ son loc. tal que $f_n \to F$ uniformemente en cada intervalo acotado, entonces$\boldsymbol{f_n} \to \boldsymbol{F}$ distribucionalmente

con $\boldsymbol{F}$ generada por $F(x)$.

Notemos que la función $F(x)$ es la integral de $f(x)$. Esto motiva el siguiente paso.

Volvamos a la serie de senos: Una serie de Fourier puede ser integrada término a término aunque no converja uniformemente [5]. Tomando la integral de f, ec. (7.8), término a término obtenemos la serie $F(x)$, ec. 7.9. Luego, F es la primitiva de f,

$$f(x) = F'(x)$$

Usando el teorema sobre la diferenciación término a término de una suceción de distribuciones [6], resulta que si

$$-\sum_{n=1}^{m}(2n\pi)^{-2}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} \to \boldsymbol{F} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty\,,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{m}(2n\pi)^{-1}\boldsymbol{\sin(2n\pi x)} \to \boldsymbol{f(x)} \quad \text{cuando} \quad m \to \infty\,.$$

Esto muestra que la serie

$$(2n\pi)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\sin(2n\pi x)} = \boldsymbol{f(x)}$$

es una distribución, y derivando una ves más obtenemos otra distribución,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} = \boldsymbol{f'(x)}$$

que es la versión funcional de la serie de cosenos con que iniciamos esta sección.

Falta aún, explicitar $\boldsymbol{f'(x)}$. A partir de la Fig. 7.2 y de la ec. (7.7), obtenemos,

$$f'(x) = -\frac{1}{2} \quad \text{excepto} \quad x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Por otro lado, ya aprendimos que las discontinuidades contribuyen (las derivadas) con deltas de amplitud del salto (0.5 en este caso), entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(x-k) \tag{7.10}$$

lo cual da significado la serie de cosenos en el sentido de distribución.

7.8.3 Aplicación: Desarrollo en serie de la delta

Podemos obtener una expresión en serie de la $\delta(x)$. Para $-1 < x < 1$ sólo una de las deltas en la serie (7.10) es no nula, esta es la que corresponde a $k = 0$, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta(x)$$

Lo que nos da la siguiente representación de la delta,

$$\delta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{\cos(2n\pi x)} \quad \text{con} \quad -1 < x < 1$$

[5] Ver por ejemplo la demostración en el libro The theory of Functions. Titchmarsh. Oxford. 1939.

[6] Si $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots$ tal que $\boldsymbol{f}_n \to \boldsymbol{F}$, entonces $\boldsymbol{f}'_n \longrightarrow \boldsymbol{F}'$

Chapter 8

Ecuaciones diferenciales con soluciones generalizadas

Modificado: 2023.04.06

Contenido: Integrales. Ecuaciones diferenciales lineales. Solución fundamental. Funciones de Green.
Fuente: D. H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 2.
Dedicación: dos (2) clases.

8.1 Integrales

Se define la integral de una función generalizada como la antiderivada, esto es, una función generalizada cuya derivada es la función original.

Definición de integral: una distribución $\boldsymbol{F}$ es una integral de una distribución $\boldsymbol{f}$ si

$$\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{f} \, .$$

La definición de integral dice cómo reconocer una integral indefinida de $\boldsymbol{f}$ cuando uno la tiene, pero no cómo construirla. Sin embargo es simple construir $\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle$, si ϕ es por sí misma la derivada de una función test $\Phi \in \mathcal{D}$, esto es, $\phi = \Phi'$. En tal caso resulta,

$$\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle = \langle \boldsymbol{F}, \Phi' \rangle = -\langle \boldsymbol{F}', \Phi \rangle = -\langle \boldsymbol{f}, \Phi \rangle \tag{8.1}$$

Luego, para cada $\boldsymbol{f}$ dada, el término de la derecha puede ser calculado, y uno obtiene $\langle \boldsymbol{F}, \phi \rangle$, siempre que $\phi = \Phi'$ para algún $\Phi \in \mathcal{D}$. Luego, el problema se reduce a cómo determinar Φ de modo que sea una función test.

Sobre la función Φ. Tomando $\phi \in \mathcal{D}$ con $sop(\phi) \subset [a, b]$, podemos definir

$$\Phi(x) = \int_a^x \phi(y) dy \, ,$$

entonces $\Phi(x)$ es suave, $\Phi' = \phi$ y $\Phi(x) = 0$ para $x < a$. Pero, en general,

$$\Phi(x) \neq 0$$

para $x > b$; luego $\Phi(x)$ no tiene soporte acotado, y entonces $\Phi \notin \mathcal{D}$. Uno tiene $\Phi(x) = 0$ para $x > b$ si y sólo si

$$\int_a^b \phi(y)dy = 0\,.$$

De este modo la ec. (8.1) puede ser usada para calcular $\boldsymbol{F}$ sólo para un *sub conjunto* de $\mathcal{D}$ consistentes de las funciones con integral nula, y esto no es lo que estamos buscando.

Para completar la construcción de $\boldsymbol{F}$, y entonces probar que cada distribución es integrable, un debe extender (8.1) a *todo* $\mathcal{D}$. En lo que sigue se mostrará cómo hacer esto descomponiendo cada $\phi \in \mathcal{D}$ en una función con integral nula, a la cual puede aplicársele (8.1), más un término remanente, el cual hace las veces de la constante de integración del cálculo usual.

Teorema sobre la existencia de integrales. Para cada distribución f existen infinitas distribuciones F tal que

$$F' = f\,,$$

y la diferencia entre dos cualesquiera de ellas es una constante.

Observación: a partir de ahora no distinguiremos notacionalmente entre funciones y funciones generalizadas (distribuciones), esto es, no usaremos la notación 'bold' para funcionales como veníamos haciéndolo.

Demostración del teorema y construcción de la antiderivada: Sea

$$\mathcal{Z} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{D}, \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) = 0\}\,.$$

Mostraremos como descomponer cualquier $\phi \in \mathcal{D}$ en un elemento de $\mathcal{Z}$ más un remanente.

Sea $\phi_0 \in \mathcal{D}$, tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)dx = 1\,.$$

Para cada $\phi \in \mathcal{D}$ se define una función ψ como

$$\psi(x) = \phi(x) - k\phi_0(x) \tag{8.2}$$

con

$$k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx \tag{8.3}$$

Entonces $\psi \in \mathcal{D}$ por ser suma de funciones test y también $\psi \in \mathcal{Z}$, pues

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [\phi(x) - k\phi_0(x)]dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) - k\int_{-\infty}^{\infty} \phi_0(x)dx = k - k\,1\,.\end{aligned}$$

Escribamos

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy$$

entonces

$$\Psi(x) = 0$$

para $x < a$ y $x > b$, donde $[a, b]$ es un intervalo que contiene el $sop(\psi)$. Veamos...

Para $x < a$ es inmediato, pues

$$\Psi(x < a) = \int_{-\infty}^{x<a} \psi(x)dx = \int_{-\infty}^{x<a} 0dx = 0\,.$$

Para $x > b$ tenemos,

$$\begin{aligned}\Psi(x > b) &=_1 \int_{-\infty}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_2 \int_{-\infty}^{a} \psi(x)dx + \int_{a}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_3 0 + \int_{a}^{x>b} \psi(x)dx \\ &=_4 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dx \\ &=_5 0\end{aligned}$$

la igualdad $=_4$ por ser $[a, b]$ el soporte de ψ, y la igualdad $=_5$ por pertencer al conjunto $\mathcal{Z}$.

Luego Ψ es una función test arbitraria, $\Psi \in \mathcal{D}$, por lo que podemos definir un funcional F sobre $\mathcal{D}$ como

$$\langle F, \phi\rangle = -\langle f, \Psi\rangle\,, \tag{8.4}$$

esto es, $\langle F, \phi\rangle$ es calculada descomponiendo $\phi(x) = \psi(x) + k\phi_0(x)$ en una parte ψ que pertenece a $\mathcal{Z}$ y un remanente; luego se usa (8.1) aplicado a $\psi = \Psi'$ e ignorando el término $k\phi_0(x)$. Esto es, hemos tomado $\langle F, \phi_0\rangle$ nulo.

Desarrollemos el contenido de éste último párrafo,

$$\begin{aligned}\langle F, \phi\rangle &= \langle F, \psi + k\phi_0\rangle \\ &= \langle F, \psi\rangle + \langle F, k\phi_0\rangle \\ &= \langle F, \Psi'\rangle + \langle F, k\phi_0\rangle \\ &= -\langle F', \Psi\rangle + \langle F, k\phi_0\rangle \\ &= -\langle f, \Psi\rangle + \langle F, k\phi_0\rangle \end{aligned} \tag{8.5}$$

donde hemos usado,

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(x)dx \to \Psi'(x) = \psi(x)$$

y

$$F' = f\,.$$

Resta por demostrar que F definido por ec. (8.4) es una integral de f. Es simple mostrar que F es lineal y continuo. Para mostrar que $F' = f$, notemos que si θ' es la derivada de una función test, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(x)dx = \theta(-\infty) - \theta(\infty) = 0\,,$$

de modo que k en (8.3) se anula, esto es,

$$\psi(x) = \theta'(x) - k\phi_0(x) = \theta'(x)\,,$$

de este modo resulta para Ψ

$$\Psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \psi(y)dy = \int_{-\infty}^{x} \theta'(y)dy\,. \tag{8.6}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\langle F', \theta\rangle &=_1 -\langle F, \theta'\rangle \\ &=_2 \langle f, \theta\rangle\end{aligned}$$

donde en $=_1$ hemos usados la definición de derivada funcional y en $=_2$ hemos usado la definición (8.4) y ec. (8.6). *Esto muestra que F es una integral de f.*

Observación: Este procedimiento da muchas integrales de la distribución f, dependiendo de la elección de ϕ_0. En lo que sigue *mostramos que todas las integrales posibles son obtenidas agregando una constante a una de ellas.*

Sobre la constante de integración: Sean F y G dos integrales de f. Entonces para cualquier $\phi \in \mathcal{D}$ tenemos,

$$\langle F - G, \phi\rangle = \langle F - G, \psi + k\phi_0\rangle$$

donde ψ y k son definidas por (8.2) y (8.3). Luego,

$$\begin{aligned}\langle F - G, \phi\rangle &= \langle F - G, \Psi'\rangle + k\langle F - G, \phi_0\rangle \\ &= -\langle F' - G', \Psi\rangle + kC \\ &= -\langle f - f, \Psi\rangle + kC \\ &= kC \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dxC \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C\,\phi(x)dx \\ \langle F - G, \phi\rangle &= \langle C, \phi\rangle\end{aligned}$$

con $C = \langle F - G, \phi_0\rangle$ constante independien te de ϕ. Luego,

$$F = G + cte\,,$$

con F y G integrales de f.

Observación: Esta sección nos dió un teorema sobre la existencia de la ecuación diferencial $u' = f$. En la siguiente sección se considera la ecuación lineal general.

8.2 Ecuaciones diferenciales lineales

Definimos el siguiente operador

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{(n-i)}$$

$$L = a_0 D^{(n)} + a_1 D^{(n-1)} + \cdots + a_n$$

con $D^{(n)}$ el operador derivada y eventualmente a_k funciones suaves de x.

Una ecuación lineal de orden n es,

$$Lu = f$$

$$a_0 u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_n u = f$$

con a_i funciones suaves (recordemos el concepto de suave introducido anteriorimente), para que el producto de la distribución $D^{(i)}u$ y la función a_i esté bien definido.

Clasificación de las soluciones de $Lu = f$:

- Cualquier distribución que satisface $Lu = f$ es denominada **solución generalizada**
- Una **solución clásica** es una función ordinaria la cual es diferenciable n veces. Luego, esta solución genera una distribución regular la cual a su vez satisface $Lu = f$.
- Un **solución débil** es una función ordinaria la cual no es n diferenciable y por lo tanto no es una solución clásica, pero genera un distribución regular y por lo tanto es una solución generalizada.
- Un **solución distribucional** es una distribución singular que satisface $Lu = f$.

Ejemplo $xu' = 0$:

- Solución clásica: $u = c$, con c constante.
- Solución débil: $u = c_1 H(x) + c_2$, con c_1 y c_2 constantes. Veamos,

$$u = c_1 H(x) + c_2 \to u' = c_1 \delta$$

$$\langle xu', \phi \rangle = \langle x c_1 \delta, \phi \rangle = 0$$

donde hemos usado $x\delta(x) = 0$.

Ejemplo $x^2 u' = 0$:

- Solución clásica: $u_1 = c$, con c constante.
- Solución débil: $u_2 = c_1 H(x) + c_2$, con c_1 y c_2 constantes.
- Solución distribucional: $u_3 = c_1 \delta(x) + c_2 H(x) + c_3$, con c_1, c_2 y c_3 constantes.

Actividad: demostrar la solución $u_3(x)$.

Observación: Resulta curioso que las ecuaciones diferenciales convencionales puedan tener nuevas soluciones cuando se permiten las funciones generalizadas como solución. Luego, vale la pregunta si las nuevas soluciones distribucionales existen para todas las ecuaciones diferenciales. La respuesta es no. Soluciones distribucionales de ecuaciones clásicas sólo aparecen cuando el coeficiente a_0 se anula y las soluciones tienen singularidades en los ceros de $a_0(x)$. El siguiente teorema garantiza que las únicas soluciones cuando $a_0 \neq 0$ son las clásicas.

Actividad: Con la información del párrafo anterior, re-examinar los dos ejemplos anteriores.

Teorema sobre la no existencia de soluciones singulares: Si $a_0(x) \neq 0$ para todo x, y f es una función continua, entonces, cada solución generalizada de $Lu = f$ es una solución clásica, con $L = a_0 D^{(n)} + \cdots + a_n$

8.3 Solución fundamental

Sea la siguiente ecuación,

$$L(x)u(x) = f(x)$$

con $f(x)$ escrita en término de la delta,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy$$

Esta ecuación puede interpretarse como que $f(x)$ es una superposición de deltas $\delta(x-y)$ centradas en y pesadas con el coeficiente $f(y)$, con y un índice continuo que va de $-\infty$ a ∞.

Siendo L un operador lineal, podemos interpretar esta expresión como una combinación lineal de infinitos términos continuo, donde $f(y)$ hace las veces de los coeficientes y $\delta(x-y)$ de cada una de las soluciones (una para cada y). Veamos cómo entender esto.

Construyamos funciones $w(x,y)$ tal que sean soluciones del mismo operador L con la delta como término fuente en lugar de f, esto es,

$$L(x)w(x,y) = \delta(x-y)$$

Luego,

$$L(x)u(x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(y) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} L(x)w(x,y) f(y) dy$$

$$= L(x) \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) f(y) dy$$

de donde resulta,

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y) f(y) dy$$

De este modo, resolviendo la ecuación no homogénea

$$Lw(x,y) = \delta(x-y)\,,$$

donde x oficia de variable e y de parámetro, obtenemos la solución de cualquier ecuación no homogénea con el mismo operador L para *cualquier fuente arbitraria* $f(x)$, 'simplemente' realizando la integración

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x,y)f(y)dy\,.$$

Por esta propiedad, cualquier solución de

$$L(x)w(x,y) = \delta(x-y)$$

es llamado **solución fundamental** para el operador L.

Teorema de la existencia de solución fundamental: Si $a_0(x) \neq 0$ para todo x, y $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son funciones suaves, entonces existe una solución fundamental para

$$L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{(n-i)}\,.$$

Todas las soluciones fundamentales de L se obtienen sumando soluciones de la ecuación homogénea

$$Lu = 0$$

a una cualquiera de ellas, y todas son soluciones débiles, esto es, funciones ordinarias pero no diferenciable n veces, de $L(x)w(x,y) = \delta(x-y)$.

8.3.1 Aplicación: oscilador amortiguado

En esta sección vamos a dar la forma de lidear con la delta en la ecuación diferencial para poder obtener una solución fundamental y lo haremos a través de un caso concreto.

Sea la siguiente ecuación diferencial, la cual corresponde a un oscilador forzado y amortiguado, con frecuencia característica ω_0 y constante de amortiguamiento $k > 0$ y $k < \omega_0$,

$$u'' + 2ku' + \omega_0^2 u = f(t)$$

Según el aprendizaje de la sección anterior, en lugar de resolver la ecuación diferencial para cada función externa $f(t)$, hallamos la solución del operador diferencial

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + 2k\frac{d}{dt} + \omega_0^2$$

una única vez para la 'fuerza externa' $\delta(t-s)$,

$$Lw(t,s) = \delta(t-s)$$

donde s oficia de parámetro. (notar que $a_0 \neq 0$ para todo x, luego podremos hallar una función regular aunque va a resultar no ser dos veces diferenciable)

Luego, la solución para cada problema específico $Lu = f(t)$ se obtiene por la siguiente integral,

$$u(t) = \int w(t,s)f(s)ds$$

La estrategia para halla la solución fundamental $Lw(t,s) = \delta(t-s)$ es la siguiente,

- Hallar la solución para $t < s$.
- Analizar las propiedades de $w(t,s)$ y sus derivadas para $t = s$
- Hallar la solución para $t > s$

Para $t < s$ y $t > s$ la solución corresponde al problema homogéneo $Lw = 0$.

Solución $t < s$: Una solución válida, aunque trivial, que tomaremos es

$$w(t,s) = 0$$

Si uno interpreta a la $\delta(t-s)$ como una fuerza externa que sólo es efectiva a $t = s$, la propuesta suena plausible, porque podemos suponer que el oscilador estaba inicialmente en reposo y para $t < s$ permanece en ese estado. Sea, entonces, nuestra solución para $t < s$, $w(t,s) = 0$.

Condiciones para $t = s$: Dado la singularidad del término de la derecha inferimos que existe una discontinuidad (posiblemente un salto finito, **porqué?**) en el término de la izquierda. De este modo, para que la singularidad sea δ, la función w o sus derivadas debe ser discontinua en $t = s$. Dado que la máxima singularidad es δ la discontinuidad debe estar en w' (si ω fuera discontinua debería aparecer a la derecha δ', si w' fuera continua no habría δ). Luego, concluimos que w es continua y que w' es discontinua en $t = s$, y escribimos

$$w(s^+, s) = w(s^-, s) \tag{8.7}$$

$$w'(s^+, s) - w'(s^-, s) = c \tag{8.8}$$

con c constante a determinar. Estas son las dos relaciones que usaremos como **condiciones iniciales** para la solución para $t > s$.

Veamos como usar esta información para deducir las condiciones iniciales para $t > s$.

- Dado que $w(t,s) = 0$ para $t < s$, entonces $w(s^-, s) = 0$. Luego, por la relación (8.7)

$$w(s^+, s) = 0\,.$$

- La constante en la relación (8.8) se obtiene del siguiente análisis: integrando la ecuación $Lw(t,s) = \delta(t-s)$, término a término en la variable t en un entorno de s resulta,

$$\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w''(t,s)dt + 2k\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w'(t,s)dt + \omega_0^2\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w(t,s)dt = \int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} \delta(t-s)dt$$

$$w'(t,s)|_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} + 2k\; w(t,s)|_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} + \omega_0^2\int_{s-\epsilon}^{s+\epsilon} w(t,s)dt = 1$$

En el límite $\epsilon \to 0$ resulta

$$w'(s^+, s) - w'(s^-, s) = 1\,,$$

donde hemos usado

$$w(s^+, s) - w(s^-, s) = 0$$

$$\int_{s^-}^{s^+} w(t,s)dt = 0$$

por ser w continua en $t = s$ según ec. (8.7). Luego, $c = 1$.

- De la solución $w = 0$ para $t < s$ tenemos $w'(s^-, s) = 0$.
- Luego, considerando (i) la ec. (8.8), (ii) $w'(s^-, s) = 0$ y el (iii) valor de c, resulta

$$w'(s^+, s) = 1\,.$$

Lo que constituye la segunda condición para resolver la ecuación diferencia para $t > s$.

Solución $t > s$: La solución a $Lw(t, s) = 0$ con las condiciones iniciales

$$w(s^+, s) = 0$$

$$w'(s^+, s) = 1$$

es

$$w(t, s) = \frac{e^{-k(t-s)}}{\Omega}\sin[\Omega(t - s)] \tag{8.9}$$

con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Actividad: Demostrar Ec. (8.9).
Luego,

$$w(t, s) = \begin{cases} 0 & t < s \\ \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} & t > s \end{cases} \tag{8.10}$$

La función $w(x, y)$ es una solución débil del $Lw(t, s) = \delta(t - s)$, esto es,

$$\langle Lw, \phi\rangle = \langle \delta, \phi\rangle$$

con ϕ función test.

Actividad: Verificar que $w(t, s)$ es continua en $t = s$ y $w'(s, s) = 1$. Usar la variable $\tau = t-s$.

8.4 Funciones de Green

Las ecuaciones diferenciales lineales usualmente están asociadas con condiciones de contorno dadas, las cuales determinan una solución particular. La solución fundamental resuelve una ecuación no homogénea, pero en general, ésta no satisface las condiciones de contorno dadas. Sin embargo, si elegimos la solución fundamental que satisface las condiciones de contorno, y si éstas son homogéneas, en el sentido de la definición que sigue, entonces la solución particular también satisface las condiciones de contorno. Tal solución fundamental es llamada **función de Green**.

Definición: consideremos un operador lineal $L = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)D^{(n-i)}$, con a_0 que no se anula y a_i funciones suaves. Supongamos que un conjunto de condiciones de contorno son dadas en la forma de n ecuaciones lineales homogéneas que involucran la función y sus $n - 1$ derivadas. La **función de Green** para L con estas condiciones de contorno es un solución fundamental que satisface esas condiciones.

Ejemplo 1: Sea
$$L = D^{(2)} + k^2\,,$$
con condiciones de contorno
$$u(0) = 0$$
$$u(1) = 0\,.$$

Esto implica que la solución fundamental g que buscamos satisface la siguiente ecuación diferencial con la δ como fuente y las siguientes condiciones de contorno:
$$g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) = \delta(x-y)$$
$$g(0,y) = 0$$
$$g(1,y) = 0\,.$$

Solución para $x < y$: Para $x < y$, $\delta(x-y) = 0$, luego
$$g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) = 0\,,$$
entonces
$$g(x,y) = a \sin kx + b \cos kx\,,$$
con a y b posiblemente, funciones del parámetro y. Usando la condición inicial $g(0,y) = 0$, resulta
$$g(x,y) = a \sin kx \quad \text{para} \quad x < y\,.$$

Solución para $x > y$: Para $x > y$, también resulta $\delta(x-y) = 0$, luego
$$g_{xx}(x,y) + k^2 g(x,y) = 0\,,$$
entonces
$$g(x,y) = a' \sin kx + b' \cos kx\,,$$
con a' y b' (las primas *no* indican derivada) posiblemente, funciones del parámetro y. Usando la condición de contorno $g(1,y) = 0$ tenemos
$$g(1,y) = a' \sin k + b' \cos k = 0 \Rightarrow b' = -a' \frac{\sin k}{\cos k}\,,$$
luego,
$$g(x,y) = a' \sin kx - a' \frac{\sin k}{\cos k} \cos kx$$
$$= \frac{a'}{\cos k}[\sin kx \cos k - \sin k \cos kx]$$
$$= \frac{a'}{\cos k} \sin k(x-1)$$
con k constante, por lo que podemos escribir
$$g(x,y) = a'' \sin k(x-1) \quad \text{para} \quad x > y\,.$$
con a'' una constante a determinar.

Condiciones en $x = y$: Ya hemos aprendido con el ejemplo de la sección anterior que la solución fundamental es continua y que su derivada tiene un salto unida,

$$g(y^+, y) = g(y^-, y)$$

$$g'(y^+, y) - g'(y^-, y) = 1$$

Luego,

$$a \sin ky = a'' \sin k(y-1)$$

$$a'' k \cos k(y-1) - ak \cos ky = 1$$

que son dos ecuaciones para determinar las dos constantes a y a'':

$$\begin{aligned}
a'' &= a\frac{\sin ky}{\sin k(y-1)} \\
1 &= \frac{ak}{\sin k(y-1)}[\sin ky\, \cos k(y-1) - \cos ky\, sink(y-1)] \\
&= \frac{ak}{\sin k(y-1)} \sin k \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\sin k(y-1)}{k \sin k} \\
a'' &= \frac{\sin ky}{k \sin k}
\end{aligned}$$

Finalmente resulta,

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin k(y-1)}{k \sin k} \sin kx & x < y \\ \\ \frac{\sin ky}{k \sin k} \sin k(x-1) & x > y \end{cases} \tag{8.11}$$

Observación: La simetría en la solución puede interpretarse como que la respuesta en x debido a una perturbación en y es la misma que la respuesta en y debido a una perturbación en x, como consecuencia de las condiciones de contorno simétrica.

Actividad: Mostrar que g es continua en $x = y$ y que su derivada es discontinua allí con salto unidad.

Observación: Suele usarse la siguiente notación que explota la simetría de la solución

$$g(x, y) = \frac{1}{k \sin k} \sin k(r_> - 1) \sin kr_<$$

donde $r_>$ debe reemplazarse por las variable mayor entre x e y, y similarmente para $r_<$. Este tipo de expresiones las encotramos, por ejemplo, en la teoría de dispersión en Cuántica.

Ejemplo 2: Sea

$$L = D^{(2)} + 2kD^{(1)} + \omega_0^2\,,$$

con condiciones de contorno (iniciales en este caso)

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

con $t > 0$ y $\omega_0 > k > 0$.

La ecuación para la hallar la función de Green resulta,

$$g_{tt}(t,s) + 2kg_t(t,s) + \omega_0^2 g(t,s) = \delta(t-s)$$

$$\begin{aligned} g(0,s) &= 0 \\ g'(0,s) &= 0 \end{aligned}$$

Para estas condiciones iniciales la función de Green resultante se denomina **función de Green causal**. Veremos el porqué al tener la expresión explícita de g.

Observación: Este problema fue resuelto anteriormente al desarrollar el oscilador amortiguado como ejemplo de la solución fundamental, ver sección 8.3.1. Allí consideramos como solución para $t < s$ la función nula. Dado que la condiciones inciales $g(0,s) = g_t(0,s) = 0$ para la ecuación $g_{tt}(t,s) + 2kg_t(t,s) + \omega_0^2 g(t,s) = 0$, implica $g = 0$, aquella solución se corresponde con el problema actual.

Actividad: Demostrar lo aseverado en el párrafo anterior.

Solución: Entonces la función de Green es

$$g(t,s) = \begin{cases} 0 & t \leq s \\ \\ \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} & t > s \end{cases} \tag{8.12}$$

con $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - k^2}$.

Solución general: Construyamos la solución de

$$Lu(t) = f(t)$$

para una fuente arbitraria f y con u satisfaciendo las mismas condiciones iniciales.

Tenemos,

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t,s) f(s) ds \\ &= \int_{0}^{\infty} g(t,s) f(s) ds \\ &= \int_{0}^{t} g(t,s) f(s) ds + \int_{t}^{\infty} g(t,s) f(s) ds \end{aligned}$$

donde hemos usado que el problema está definido para $t > 0$ en el primer renglón y que g es una función partida en el segundo.

En la primera integral $s < t$, luego debemos tomar la forma de $g(t,s) = \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)}$; mientras que en la segunda integral, $s > t$, por lo que debemos tomar $g(t,s) = 0$,

$$u(t) = \int_0^t g(t,s) f(s) ds + \int_t^\infty g(t,s) f(s) ds$$

$$= \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} f(s) ds + \int_t^\infty 0 f(s) ds$$

$$= \int_0^t \frac{\sin[\Omega(t-s)]}{\Omega} e^{-k(t-s)} f(s) ds$$

Cambiando a la variables $\tau = t - s$, resulta $-d\tau = ds$, cuando $s = 0 \to \tau = t$, y cuando $s = t \to \tau = 0$. Entonces,

$$u(t) = \int_0^t \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega} e^{-k\tau} f(t-\tau) d\tau$$

donde hemos intercambiado los límites de la integral usando el signo de $d\tau$. Esta es la expresión final que resuelve,

$$\begin{aligned} u_{tt} + 2ku_t + \omega_0^2 &= f(t) \\ u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0\,, \end{aligned}$$

con $t > 0$ y $\omega_0 > k > 0$.

Sobre las condiciones de contorno: Para la primera condición $u(0)$ tenemos

$$u(0) = \int_0^0 \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} f(0-\tau) d\tau = 0$$

debido a que los límites de la integral son iguales, luego verifica $u(0) = 0$.

Para la segunda condición de contorno $u'(0)$ tenemos,

$$u'(t) = \frac{\sin[\Omega t]}{\Omega} e^{-kt} f(t-t) + \int_0^t \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} d\tau$$

$$= \frac{\sin[\Omega t]}{\Omega} e^{-kt} f(0) + \int_0^t \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(t-\tau)}{\partial t} d\tau$$

Donde hemos usado:

$$H(x) = \int_0^x F(x,y) dy \Rightarrow \frac{dH}{dx} = F(x,x) + \int_0^x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy$$

Evaluando, u' en cero, resulta

$$u'(0) = \frac{\sin[\Omega 0]}{\Omega} e^{-k0} f(0) + \int_0^0 \frac{\sin[\Omega\tau]}{\Omega} e^{-k\tau} \frac{\partial f(0-\tau)}{\partial t} d\tau = 0$$

donde el primer término es cero debido al seno y el segundo debido a los límites de integración.

De este modo chequeamos que la solución general $u(t)$ satisface las condiciones de contorno para cualquier fuente $f(t)$.

8.5 Ecuación con condiciones de contorno no homogéneas:

Notemos que la función de Green requiere condiciones de contorno homogéneas. En esta sección mostramos cómo usar la función de Green para resolver problemas con condiciones de contorno no homogéneas mediante un ejemplo.

Consideremos la ecuación diferencial

$$u'' + u = f(x)$$

con las siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} u(0) &= a \\ u(1) &= b\,. \end{aligned}$$

La estrategia consiste en trasformar el problema en uno que satisfaga ecuaciones de contorno homogéneas. Para ello se define alguna función $h(x)$ que también satisfacen las condiciones de contorno dadas y luego se escribe

$$u(x) = h(x) + v(x)\,. \tag{8.13}$$

con $h(0) = a$ y $h(1) = b$ y $v(x)$ a determinar. Dado que $v(x) = u(x) - h(x)$ y u y h valen lo mismo en $x = a$ y $x = b$, tendremos

$$\begin{aligned} v(a) &= 0 \\ v(b) &= 0\,. \end{aligned}$$

Luego, podremos usar el método de la función de Green para hallar $v(x)$.

Sea, por ejemplo

$$h(x) = a + (b - a)x\,, \tag{8.14}$$

vemos que $h(0) = a$ y $h(1) = b$. Además $h' = b - a$ y $h'' = 0$. Luego,

$$u'(x) = (b - a) + v'(x)$$

$$u''(x) = v''(x)$$

$$u'' + u = f(x) \Rightarrow v''(x) + h(x) + v(x) = f(x)$$

Por lo que podemos escribir la siguiente ecuación para v,

$$v'' + v = F(x)\,,$$

donde

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) - h(x) \\ v(0) &= 0 \\ v(1) &= 0\,. \end{aligned}$$

Resolvemos este problema usando la técnica de la función de Green.

Por último, obtenemos la solución u para el problema original a partir de las Ecs. (8.14) y (8.13).

Actividad: Cómo cambiaría $F(x)$ si $h(x)$ no fuera lineal?.

Chapter 9

Transformada de Fourier Ordinaria. Ecuaciones en derivadas parciales

Modificado: 2023.04.06

Contenido para Transformada de Fourier Ordinaria: En este capítulo se trata la transformada Fourier ordinaria. *Material Complementario:* Definición de Transformada de Laplace.
Fuente: R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg and E. M. van de Vrie. Fourier and Laplace Transforms. Cambridbe (2003). Capítulos 6 y 12.
Dedicación: una (1) clase.

Sobre Ecuaciones en derivadas parciales: En este capítulo introducimos las funciones temperadas y la transformada de Fourier generalizada. Estos nuevos conceptos, combinados con la técnica de la funciones de Green, se utilizan para resolver ecuaciones en derivadas parciales en tres dimensiones.
Contenido para Ecuaciones en derivadas parciales: Funciones de decaimiento rápido. Distribuciones de crecimiento lento. Transformada de Fourier generalizada. Distribuciones en multivariables. Solución generalizada de la ecuación de onda en tres dimensiones.
Fuente: H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 3.
Dedicación: dos (2) clases.

9.1 Transformada de Fourier

Daremos un tratamiento heurístico para introducir las integrales de Fourier, de modo que, mientras el resultado es correcto algunos de los pasos lógicos pueden no estar matemáticamente fundamentados. El objetivo de esta sección es definir la transformada de Fourier para funciones no periódicas a partir del análisis de una función periódica cuyo dominio de definición se toma al infinito.

El desarrollo heurístico para deducir la espresión de la transformada de Fourier comienza utilizando la expresión exponencial de la serie de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\,n\,x}$$

Veamos: Sea $f(x)$ periódica, luego

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos nx + \sum_{n=1} b_n \sin nx$$

con

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}$$

Escribiendo los senos y cosenos en téminos de las exponenciales compleja tenemos

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1} b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} e^{inx}\frac{a_n - ib_n}{2} + \sum_{n=1} e^{-inx}\frac{a_n + ib_n}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} c_n e^{inx} + \sum_{n=1} \bar{c}_n e^{-inx} \end{aligned}$$

con $c_n = (a_n - ib_n)/2$.

Veamos que $\bar{c}_n = c_{-n}$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx - i\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\ \bar{c}_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \\ &= c_{-n} \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m e^{imx} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \end{aligned}$$

donde hemos usado

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i0x}dx = c_0$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\,.$$

Dedución heurística de la Transformada de Fourier: Comencemos con una función periódica $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ que es suave por tramos. Para un $T > 0$ arbitrario consideremos la función $f_T(t)$ que coincide con f en el intervalo $(-T/2, T/2)$ y es nula en el resto del eje real. Luego, extendemos $f_T(t)$ en forma periódica, ver Fig. 9.1.

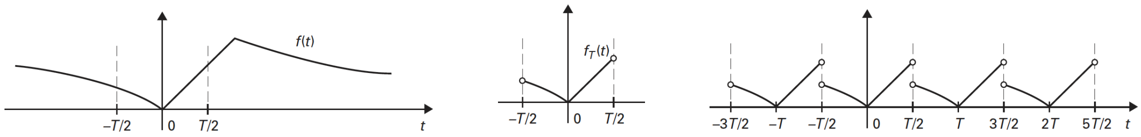


Figure 9.1:

De este modo tenemos una función de período T a la cual le podemos aplicar la teoría de Fourier y que coincide con f en $(-T/2, T/2)$,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, e^{i\, n\, \Delta\omega\, t} \,,$$

con c_n los coeficientes de Fourier, $t \in (-T/2, T/2)$ y $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$. Reemplazando c_n por su expresión en término de f tenemos,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\, n\, \Delta\omega\, \tau} \, d\tau \right] e^{i\, n\, \Delta\omega\, t}$$

Reemplazamos T en favor de ω

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\, n\, \Delta\omega\, \tau} \, d\tau \right] e^{i\, n\, \Delta\omega\, t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\omega e^{-i\, n\, \Delta\omega\, \tau} \, e^{i\, n\, \Delta\omega\, t} \right] d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\, n\, \Delta\omega (t-\tau)} \, \Delta\omega \right] d\tau
\end{aligned}$$

Luego, extendemos el dominio de definición de f haciendo el límite $T \to \infty$, lo que esquivalente al límites $\Delta\omega \to 0$. De modo que la expresión anterior resulta,

$$f(t) \longrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\, \omega (t-\tau)} d\omega \right] d\tau$$

Este último paso, donde pasamos de sumas a integrales impropias es matemáticamente cuestionable y por eso llamamos heurística a esta derivación,

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} f(t) &= \lim_{T\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\, e^{-i\, n\, \Delta\omega\, \tau} \, d\tau \right] e^{i\, n\, \Delta\omega\, t} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\, \omega (t-\tau)} d\omega \right] d\tau
\end{aligned}$$

Reordenemos las integrales convenientemente,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)} d\omega\right]\ d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ e^{-i\,\omega\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t} d\omega\ d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ e^{-i\,\omega\tau}\ d\tau\right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t} F(\omega)\ d\omega
\end{aligned}$$

donde hemos introducido la función $F(\omega)$,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ e^{-i\,\omega\tau}\ d\tau$$

De este modo hemos obtenido una 'expansión' en frecuencia de una función no periódica que se diferencia con la expansión de funciones periódicas en que las frecuencias son continuas y los coeficientes son funciones,

$$f_{periodica}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\ e^{i\,\omega_n\,t}$$

$$f_{no\ periodica}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t}\ F(\omega)\ d\omega$$

con $\omega_n = n\,\Delta\omega$ y

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau)\ e^{-i\,\omega_n\,\tau}\ d\tau$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\ e^{-i\,\omega\tau}\ d\tau$$

Definición de Transformada de Fourier: Dada la función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, definimos la función $F : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$, siempre que la integral exista como integral impropia, a través de la siguiente integral

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt\,,$$

con $\omega \in \mathcal{R}$. Dicha función es llamada **transformada de Fourier** (TF), **espectro**, o **densidad espectral** de $f(t)$.

Ejemplos de funciones con integrales impropias no definidas:

- La TF de $f(t) = 1$ no existe, pues la integral impropia no está definida.
- La TF de la función escalón $\epsilon(t) = \theta(t)$ tampoco tiene TF:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \theta(t)\, e^{-i\,\omega\,t}\, dt = \int_{0}^{\infty} e^{-i\,\omega\,t}\, dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} e^{-i\,\omega\,t}\, dt = \frac{1}{-i\omega}\ e^{-i\,\omega\,t}\Big|_{0}^{\infty}
\end{aligned}$$

Definición de función absolutamente integrable: Un función $f : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ es absolutamente integrable si la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

existe como integral impropia.

Cuando $f(t)$ es absolutamente integrable, entonces $F(\omega)$ existe. Veamos,

$$|F(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\,\omega\, t}\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t)\, e^{-i\,\omega\, t} \right|\, dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

Definición de integral de Fourier: En base al análisis heurístico desarrollado partiendo de la serie de Fourier, se espera que $f(t)$ pueda recuperarse a partir $F(\omega)$ por la fórmula,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\,\omega\, t}\, d\omega\,.$$

La integral de esta ecuación se densomina integral de Fourier de f siempre que la integral exista. Esta fórmula tiene, sin embargo, algunos problemas. Podría ocurrir que, aún siendo $f(t)$ absolutamente integrable, $F(\omega)$ no lo sea, esto es, la transformación no es cerrada en el sentido the transforma funciones absolutamente integrable en otra absolutamente integrable.

9.1.1 Interpretación física

Consideremos que la variable t de un función periódica representa al tiempo, luego ω_n tiene unidades de frecuencia de modo que $\omega_n t$ sea adimensional. En tal caso, uno dice que la función $f(t)$ está definida en el **dominio temporal**. La serie de Fourier correspondiente queda determinada a través de los coeficientes c_n. Cada uno de estos coeficientes está asociado a una frecuencia específica $\omega_n = n\omega_0$. Para funciones suaves a trozos la serie de Fourier es igual a la función. Esto significa que la función está completamente determinada por sus coeficientes de Fourier, y dado que ellos están asociados con frecuencias ω_n, podemos decir que la función $f(t)$ está descrita por los coeficientes de Fourier en el **dominio de frecuencia**,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; e^{-i\,\omega_n\, t}\; dt\,.$$

La sucesión de los coeficientes de Fourier c_n con $n \in \mathcal{Z}$ es denominado el **espectro** de la función. Dado que ω_n es discreto, el espectro es denominado **espectro discreto** o **línea espectral**.

Ahora queremos dar una significación a la variable $\omega \in \mathcal{R}$ de $F(\omega)$. Sea $f : \mathcal{R} \to \mathbb{C}$ una función suave por trozos y cero fuera del intervalor $(-T/2, T/2)$. En este caso la correspondiente función $F(\omega)$ existe, dado que sólo se integra en el intervalo acotado $(-T/2, T/2)$. Si extendemos f periódicamente queda definida la función $f_{ext}(t)$, a la cual le podemos determinar los coeficientes de Fourier c_n. Dado que la extensión periódica $f_{ext}(t)$ coincide con $f(t)$ en $(-T/2, T/2)$ y f es nula fuera del intervalo $(-T/2, T/2)$ resulta

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_{ext}(t)\; e^{-i\,n\omega_0\, t}\; dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\; e^{-i\,n\omega_0\, t}\; dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\; e^{-i\,n\omega_0\, t}\; dt = \frac{1}{T} F(n\omega_0)\,, \end{aligned}$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Luego,

$$\frac{c_n}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi} F(n\omega_0)\,.$$

Esta última relación puede leerse como que la razón de los coeficientes de Fourier con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ da una aproximación de la función $F(\omega)$ para valores discretos de $\omega = n\omega_0$. Luego, al incrementar T, ω_0 se hace más pequeño y la aproximación $F(n\omega_0)$ se hace más fina (mejora). Para visualizar esto último ver la Fig. 9.2.

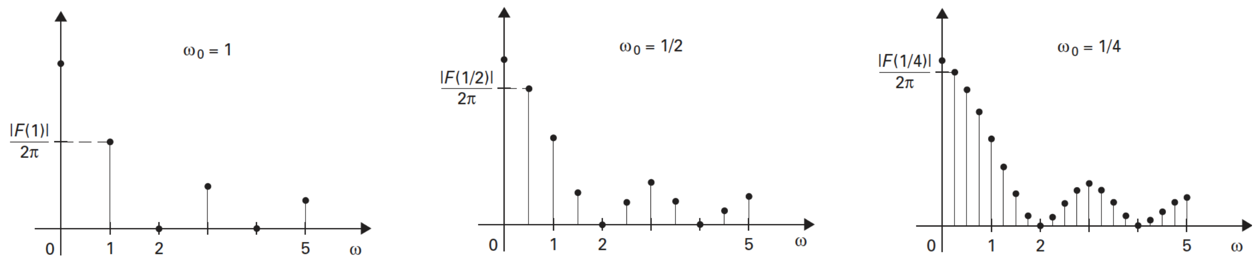


Figure 9.2:

En el límite $T \to \infty$, resulta $\omega_0 \to 0$ uno espera que el espectro discreto cambie al espectro continuo $F(\omega)/2\pi$, ver Fig. 9.3. Este es el motivo por el que se le ha llamado **espectro** y **densidad espectral** de $f(t)$ a la Transformada de Fourier $F(\omega)$.

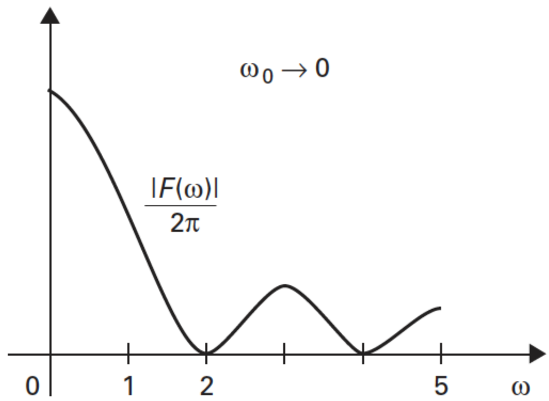


Figure 9.3:

La figura 9.4 muestra un ejemplo de $f(t)$ y $F(\omega)$ en una señal temporal. De las amplitudes de $F(\omega)$ se hace aparente que algunas frecuencias son más relevantes que otras, mientras que en las amplitudes de $f(t)$ no parece que uno pueda extraer alguna información característica.

9.1.2 Ejempos de TF

Función pulso

$$f(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & |t| > \frac{a}{2} \end{cases} \tag{9.1}$$

Tenemos para su TF,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin \frac{a\omega}{2}$$

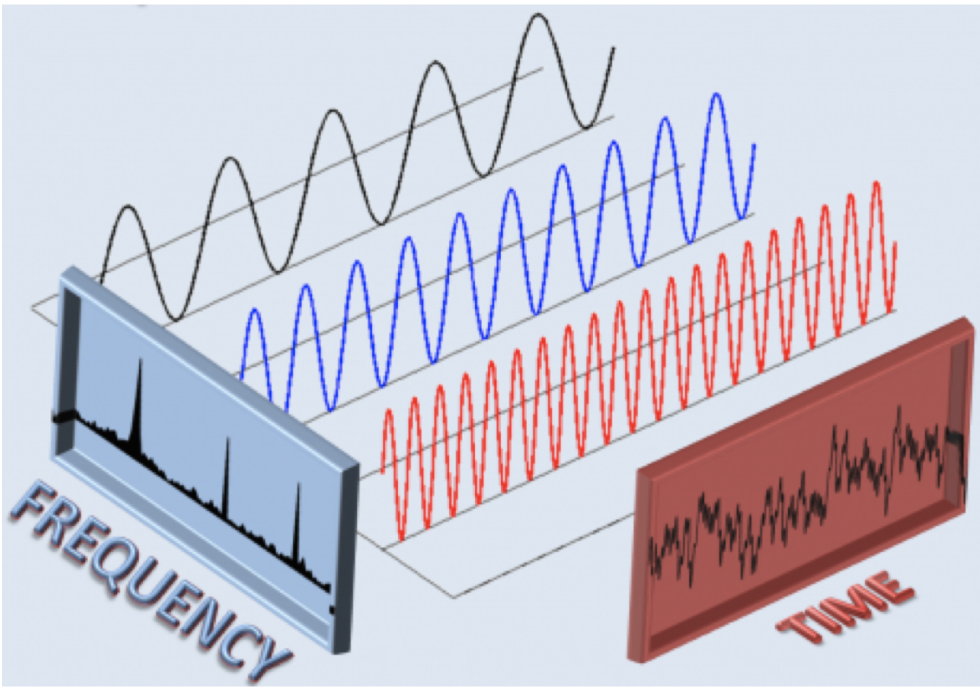


Figure 9.4: Fuente: http://www.jldelafuenteoconnor.es

Notemos que mientras f es absolutamente integrable, F no lo es.

Función exponencial positiva

$$f(t) = e^{-a|t|}\,,$$

con $a > 0$.

Tenemos para su TF,

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-i\omega t}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-i\omega t}dt$$

$$= \left.\frac{e^{(a-i\omega)t}}{a-i\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-a-i\omega)t}}{-a-i\omega}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1-0}{a-i\omega} + \frac{0-1}{-a-i\omega} = \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}$$

$$= \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

Función de Gauss

$$f(t) = e^{-at^2}\,,$$

con $a > 0$.

TF:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} (\cos\omega t + i\, \sin\omega t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \cos\omega t\, dt$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-at^2} \cos\omega t\, dt$$

Para calcular esta última integral operamos como sigue:

$$F'(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} t\, e^{-tx^2}\, \sin\omega t\, dt$$

$$= \left.\frac{e^{-at^2}\, \sin\omega t}{a}\right|_{0}^{\infty} - \frac{\omega}{a}\int_{0}^{\infty} e^{-at^2}\, \cos\omega t\, dt$$

$$= 0 - \frac{\omega}{2a}\, F(\omega)$$

Luego, integramos la función $F(\omega)$,

$$\frac{F'}{F} = -\frac{\omega}{2a}$$

$$\frac{d}{d\omega} \ln|F(\omega)| = -\frac{\omega}{2a}$$

$$\int d\ln|F(\omega)| = -\int \frac{\omega}{2a} d\omega$$

$$\ln|F(\omega)| = -\frac{\omega^2}{4a} + cte$$

$$|F(\omega)| = e^{-\frac{\omega^2}{4a}}\, e^{cte}$$
$$F(\omega) = cte'\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

donde hemos usado que $cte' = e^{cte} > 0$. Para determinar la constante tomemos $\omega = 0$, de modo que $F(0) = cte'$, luego

$$F(0) = cte' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-i0t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,,$$

donde hemos usado $\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$.

Finalmente,

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a}} ,$$

lo que muestra la maravillosa propiedad que la TF de una gaussiana es una gaussiana.

9.1.3 Propiedades

Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones con TF $F(\omega)$ y $G(\omega)$ respectivamente. Entonces

$$aF(\omega) + bG(\omega)$$

es la TF de $af(t) + bg(t)$.

Complejo conjugado: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces el espectro de la función $\overline{f(t)}$ es dado por

$$\overline{F(-\omega)}\,.$$

Traslación en t: Sea $F(\omega)$ la TF de $f(t)$. La TF de $f(t-a)$, con $a \in \mathcal{R}$, es

$$e^{-i\omega t}F(\omega)\,.$$

Traslación en ω: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces

$$F(\omega - a)\,,$$

con $a \in \mathcal{R}$, es el espectro de $e^{iat}f(t)$.

Escaleo: Sea $f(t)$ una función con espectro $F(\omega)$. Entonces, el espectro de $f(ct)$ es

$$F(\omega) = \frac{1}{|c|}F(\omega/c)\,,$$

con $c \in \mathcal{R}$, $c \neq 0$.

Diferenciación con respecto a t: Sea $f(t)$ continuamente diferenciable con espectro $F(\omega)$ y sea que $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$. Entonces el espectro de $f'(t)$ existe y es

$$i\omega F(\omega)\,.$$

Diferenciación con respecto a ω: Sea $f(t)$ absolutamente integrable con espectro $F(\omega)$. Si $tf(t)$ es absolutamente integrable, entonces el espectro de $F(\omega)$ es diferenciable, con

$$F'(\omega) = -\widehat{itf}(\omega)\,.$$

Integración: Sea $f(t)$ continua y absolutamente diferenciable con espectro $F(\omega)$. Sea que $\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = 0$. Entonces, para $\omega \neq 0$ uno tiene,

$$\left(\mathcal{F}\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right)(\omega) = \frac{F(\omega}{i\omega}\,,$$

con $\mathcal{F}(f) \equiv \hat{f}$.

Actividad: Elige tres propiedades y demuéstralas.

Continuidad: Sea $f(t)$ una función absolutamente integrable. Entonces el espectro $F(\omega)$ es una función continua sobre $\mathcal{R}$.

Teorema fundamental de la integral de Fourier: Sea $f(t)$ una función suave por trozos y absolutamente integrable en $\mathcal{R}$ y sea $F(\omega)$ su TF. Entonces la integral de Fourier converge para cada $t \in \mathcal{R}$ como valor principal de Cauchy (notar que se refiere a una forma muy específica de integral impropia),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}\,.$$

La función $f(t)$ así obtenida se denomina **transformada inversa de Fourier** de $F(\omega)$.

9.2 Expresión de la delta de Dirac y notación de braket

La definicón formal de la delta de Dirac se dará en el próximo capítulo. En esta sección derivamos una expresión para la delta de Dirac haciendo un análisis de consistencia y de su defición, dada por,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

Operemos con la integral y la transformada de Fourier,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t}\, F(\omega)\, d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\,\omega\tau}\, d\tau$$

Reemplazando una en otra tenemos,

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-i\,\omega\tau}\, d\tau\, d\omega \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)}\, d\omega\right]\, d\tau \\
f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \delta(t-\tau)\, d\tau
\end{aligned}$$

Luego,

$$\delta(t-\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,\omega(t-\tau)}\, d\omega \tag{9.2}$$

Alternativamente,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,kx}\, dk \tag{9.3}$$

o

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\,kx}\, dk \tag{9.4}$$

Notar la reprocidad en las unidades si pensamos que t y x tienen unidades de tiempo y distancia recíprocamente. En tal caso las deltas *no* son adimencionales, como lo son las deltas de Kronecker.

Notación de braket Escribamos,

$$\delta(k-k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\,x(k-k')}\,dx \tag{9.5}$$

y definamos los bra $|k\rangle$ y ket $\langle k|$

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\,kx}$$
$$\langle k| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\,kx}$$

Esto es, las ondas planas están normalizadas a la delta de Dirac, en lugar de la delta de Kroncker. Con $|k\rangle$ representando una onda plana y $k \in \mathcal{R}$.

Luego,

$$\delta(k-k') = \langle k'|k\rangle \tag{9.6}$$

con $\int \delta(k-k')\,dk = 1$.

Que se pueden interpretar como los autovectores (con índice continuo) de "longitud infinita"

$$H|k\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}|k\rangle$$
$$\langle k|k\rangle = \delta(k-k) = \delta(0)$$

9.3 Transformada de Laplace (Material complementario)

Tomando la TF de funciones causales, esto es, funciones que son nula para $t < 0$, resultaría

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\,,$$

y si agregamos al integrando un factor de damping $e^{-\sigma t}$, con $\sigma > 0$,

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-\sigma t}e^{-i\omega t}dt\,,$$

podemos construir el espectro de funciones que no eran posible con la TF, como por ejemplo, la función escalón.

Definición de transformada de Laplace (TL): Sea $f(t)$ una función causal, luego $f(t) = 0$ para $t < 0$. La transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$ es la función compleja definida para $s \in \mathcal{C}$ por

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt\,,$$

siempre que la integral exista.

Ver transparencia por ejemplos y aplicaciones

Sobre Ecuaciones en derivadas parciales

Sobre Ecuaciones en derivadas parciales: En este capítulo introducimos las distribuciones temperadas y la transformada de Fourier generalizada. Estos nuevos conceptos, combinados con la técnica de la funciones de Green, se utilizan para resolver ecuaciones en derivadas parciales en tres dimensiones.
Contenido para Ecuaciones en derivadas parciales: Funciones de decaimiento rápido. Distribuciones temperadas. Transformada de Fourier generalizada. Distribuciones en multivariables. Solución generalizada de la ecuación de onda en tres dimensiones.
Fuente: H. Griffel. Applied functional analysis. John Wiley and Sons. New York (1981). Capítulo 3.
Dedicación: dos (2) clases.

9.4 Preliminares sobre transformada de Fourier generalizada

La transformada de Fourier usual es aplicable a funciones absolutamente integrables. Esto es un limitante fuerte porque funciones familiares como los polinomios, funciones trigonométricas y exponenciales, no son absolutamente convergentes.

Observación: Para definir apropiadamente la transformada de Fourier generalizada hace falta definir un nuevo espacio de funciones test $\mathcal{S}$, con la propiedad que $\mathcal{S}$ sea cerrado ante la transformada de Fourier usual, propiedad que no tienen las funciones de $\mathcal{D}$. De este modo, se redefine el análisis funcional reemplazando el espacio de funciones test $\mathcal{D}$ por $\mathcal{S}$. El beneficio de haber utilizado el espacio $\mathcal{D}$ es haber podido definir un conjunto más amplio de funciones generalizadas.

9.4.1 Funciones de decaimiento rápido

Definición de funciones de decaimiento rápido: Una función de decaimiento rápido es una función suave $\phi : \mathcal{R} \to \mathcal{C}$ tal que,

$$x^n \phi^{(r)}(x) \to 0$$

cuando $x \to \pm\infty$, para todo $n, r \geq 0$.

Definición de $\mathcal{S}$: El conjunto de las funciones de decaimiento rápido es denominado $\mathcal{S}$.

Ejemplo: Las funciones de la forma

$$e^{-ax^2} P(x)$$

con P cualquier polinomio y $a > 0$ son funciones de decaimiento rápido.

Propiedades:

- Cada función test es una función de decaimiento rápido, esto es (el espacio $\mathcal{S}$ es más 'grande' que el espacio $\mathcal{D}$)
$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}\,.$$

- Si
$$\phi, \psi \in \mathcal{S} \Rightarrow a\phi + b\psi \in \mathcal{S}$$
para cualesquiera constantes a y b.

- Si
$$\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow x^n \phi^{(r)}(x) \in \mathcal{S}$$
para todo $n, r \geq 0$.

- Si
$$|x^n \phi^{(r)}(x)|$$
es una función acotada para cada $n, r \geq 0$, entonces ϕ es una función de decaimiento rápido.

- Cada función de decaimiento rápido es **absolutamente integrable**.

- Si
$$\phi \in \mathcal{S} \Rightarrow \tilde{\phi} \in \mathcal{S}\,,$$
donde $\tilde{\phi}$ es la transformada de Fourier usual.

Convergencia en $\mathcal{S}$: Si $\Phi, \phi_1, \phi_2, \cdots$ son funciones de decaimiento rápido, se dice que
$$\phi_m \to \Phi$$
en $\mathcal{S}$ si, para todo enteros r y n,
$$x^n \phi_m^{(r)}(x) \to x^n \Phi^{(r)}(x) \quad \text{cuando} \quad m \to \infty$$
uniformemente [1] en x.

Propiedades:

- Si
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
entonces
$$\phi_m' \to \Phi' \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
y
$$P(x)\phi_m \to P(x)\Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,,$$
para cualquier polinomio P.

- Si
$$\phi_m, \Phi \in \mathcal{D} \quad \text{para todo} \quad m\,,$$
y
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{D}\,,$$
entonces
$$\phi_m \to \Phi \quad \text{en} \quad \mathcal{S}\,.$$

[1] ψ_n converge uniformemente a Ψ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathcal{N}$ tal que para todo $n \geq N$ se verifica que $\sup\{|\psi_n(x) - f(x)|\} \leq \varepsilon$.

9.4.2 Distribuciones temperadas

Definición de distribuciones temperadas: Una distribución temperada es un funcional lineal continuo sobre el espacio $\mathcal{S}$, esto es, es un funcional lineal que mapea cada sucesión convergente en $\mathcal{S}$ en una sucesión convergente en $\mathcal{C}$ (notar que es idéntica a la definición de distribución reemplazando $\mathcal{D}$ por $\mathcal{S}$.)

Ejemplo: Cada polinomio $p(x)$ genera una distribución de crecimiento lento (ver las propiedades listadas arriba)

$$p : \phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\phi(x)dx\,,$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}$.

Observación 1 de 2: Cada distribución sobre $\mathcal{S}$, lo es también sobre $\mathcal{D}$. Por ejemplo, el polinomio del ejemplo anterior genera una distribución de crecimiento lento, y también una distribución regular (de las vistas originariamente), pues $p(x)$ es una función localmente integrable.

Observación 2 de 2: La inversa no es cierta, esto es, no toda distribución definida en $\mathcal{D}$ es una distribución de crecimienton lento. Por ejemplo, la distribución generada por e^{-x} es regular (definida sobre $\mathcal{D}$), pero e^{-x} no genera una distribución de crecimiento lento, pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}e^{-|x|/2}dx = \cdots = \left.\frac{e^{-x/2}}{(-1/2)}\right|_{-\infty}^{0} + \cdots\,,$$

no converge (notar que hemos usado $\phi = e^{-|x|/2}$ como función testigo de $\mathcal{S}$.)

Definición de espacio dual: Se llama *dual* al conjunto formado por todas las distribuciones sobre un espacio de funciones test $\mathcal{C}$ y se lo denota por $\mathcal{C}^{\times}$.

Observación: Por las observaciones 1 y 2 deducimos que el número de funcionales definidos sobre $\mathcal{S}$ es menor que los definidos sobre $\mathcal{D}$, esto es, el conjunto de distribuciones de crecimiento lento es más 'pequeño' que el conjunto de distribuciones,

$$\mathcal{S}^{\times} \subset \mathcal{D}^{\times}$$

Sobre el conjunto funciones y distribuciones: Conjuntos más grandes de funciones 'test' generan conjuntos más pequeños de distribuciones. Para los dos casos vistos hasta el momento, el conjunto de funciones $\mathcal{S}$ es más grande que $\mathcal{D}$, al tiempo que los funcionales sobre $\mathcal{S}$ son más restrictivos que los definidos sobre $\mathcal{D}$, esto es, el conjunto de distribuciones definidos sobre $\mathcal{D}$ es más grande que el definido sobre $\mathcal{S}$. Esto explica por qué desarrollamos inicialmente la teoría del análisis funcional con el espacio de funciones de $\mathcal{D}$.

9.4.3 Funciones de crecimiento lento

Definición de función de crecimiento lento: una función de crecimiento lento es una función f localmente integrable $\mathcal{R} \to \mathcal{C}$ tal que

$$f(x) = O(x^n) \quad \text{para algún } n \text{ cuando} \quad |x| \to \infty\,.$$

Observación: $f(x) = O(x^n)$ significa que existen C y R tal que

$$|f(x)| \leq C|x|^n \quad \text{cuando} \quad |x| > R\,.$$

Ejemplos:

- Cada polinomio p de grado n es una función de crecimiento lento.
- e^{-x} no es de crecimiento lento, porque $x^{-n}e^{-x} \to \infty$ cuando $x \to -\infty$ para $n \geq 0$.
- e^{iax} es una función de crecimiento lento si a es real, dado que $|e^{iax}| = 1$.

Teorema: A cada función de crecimiento lento f le corresponde una **distribución temperada** $\boldsymbol{f}$ definida por,

$$\langle \boldsymbol{f}, \phi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)dx$$

Observación: La teoría de funciones generalizadas de crecimiento lento puede ser desarrollada siguiendo el desarrollo hecho para la teoría de funciones generalizadas ordinaria basadas en el espacio de funciones test $\mathcal{D}$. Por ejemplo, podríamos definir las operaciones de suma, traslación, multiplicación por funciones suaves; así como la diferenciación.

9.5 Transformada de Fourier generalizada

La transformada de Fourier de distribuciones se define sobre funcionales que actúan en el espacio $\mathcal{S}$ usando la propiedad introducida en la sección anterior, si $\phi \in \mathcal{S}$, entonces $\tilde{\phi} \in \mathcal{S}$, donde $\tilde{\phi}$ es la transformada de Fourier usual.

Definición de la transformada de Fourier generalizada (TFG): Si $\boldsymbol{f}$ es una distribución temperada, su transformada de Fourier es la distribución temperada $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ definida por

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{f}}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{f}, \widetilde{\phi}\rangle$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}$. Si f es una función localmente integrable de crecimiento lento, la distribución $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ es llamada la **transformada de Fourier generalizada** de f.

Teorema sobre TFG de funciones absolutamente integrables: Si f es una función absolutamente integrable, entonces su transformada de Fourier $\tilde{f}$ es una función de crecimiento lento, y la distribución generada por $\tilde{f}$ es la transformada de Fourier generalizada de f.

Observación: Hemos construido una teoría en la cual los polinomios, senos y cosenos tienen transformada de Fourier generalizada.

Sobre TF de funciones ordinarias: antes de trabajar con los ejemplos vamos a explicitar la convención que usaremos para la TF de funciones ordinarias y algunas de sus propiedades.

Convención:

$$\widetilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\phi(x)dx$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\widetilde{\phi}(k)dk$$

La diferencia de signo con la definida anteriormente es porque aquella es la usada, usalmente, para la variable tiempo. En las aplicaciones combinaremos ambas convenciones.

Propiedades:

- $\widetilde{\widetilde{\phi}}(x) = 2\pi\phi(-x)$. Veamos...
  Primero notemos que si $\phi = \phi(x)$ entonces
  $$\phi = \phi(x) \longrightarrow \widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(k) \longrightarrow \widetilde{\widetilde{\phi}} = \widetilde{\widetilde{\phi}}(x)\,,$$
  donde el argumento sólo indica cuál es la variable independiente.
  Luego,
  $$\begin{aligned}\widetilde{\widetilde{\phi}}(x) &= \int e^{ikx}\widetilde{\phi}(k)dk = \int e^{ikx}\left[\int e^{ikx'}\phi(x')dx'\right]dk \\ &= \int\left[\int e^{ik(x+x')}dk\right]\phi(x')dx' \\ &= \int\left[2\pi\delta(x+x')\right]\phi(x')dx' \\ &= 2\pi\phi(-x)\end{aligned}$$
  donde hemos usado
  $$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int e^{ik(x-x')}dx\,.$$
- $\widetilde{\phi}'(k) = -ik\widetilde{\phi}(k)$
- $\left(\widetilde{\phi}\right)' = i(\widetilde{x\phi})$
- $\widetilde{\phi}_a(k) = e^{ika}\,\widetilde{\phi}(k)$

Ejemplos:

- $\widetilde{\mathbf{1}} = 2\pi\boldsymbol{\delta}$. Veamos...
  Consideremos que $\phi = \phi(x)$, luego
  $$\langle\widetilde{\mathbf{1}}, \phi\rangle = \langle\mathbf{1}, \widetilde{\phi}\rangle = \int 1\,\widetilde{\phi}(k)dk = \int e^{\pm ik0}\widetilde{\phi}(k)dk$$
  Consideremos primero e^{+ik0}:
  $$\begin{aligned}\langle\widetilde{\mathbf{1}}, \phi\rangle &= \int e^{ik0}\widetilde{\phi}(k)dk \\ &= \widetilde{\widetilde{\phi}}(x=0) = 2\pi\phi(-x=0) = 2\pi\phi(0) \\ &= \langle 2\pi\boldsymbol{\delta}, \phi\rangle\end{aligned}$$

Consideremos ahora e^{-ik0}:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\mathbf{1}}, \phi\rangle &= \int e^{-ik0}\widetilde{\phi}(k)dk \\ &= 2\pi\phi(x=0) = 2\pi\phi(0) \\ &= \langle 2\pi\boldsymbol{\delta}, \phi\rangle\end{aligned}$$

- $\widetilde{\boldsymbol{x}} = -2\pi i\boldsymbol{\delta'}$

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{x}}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \widetilde{\phi}\rangle = \int x\,\widetilde{\phi}(x)\,dx = i\int \widetilde{(\phi')}\,dx = i\,\widetilde{\widetilde{\phi}}'(0) = 2\pi i\phi'(0) = \langle -2\pi i\boldsymbol{\delta'}, \phi\rangle$$

  Notar, que para poder reemplazar $\boldsymbol{x}$ por x, debemos asumir que $\phi = \phi(k)$, para que $\widetilde{\phi} = \widetilde{\phi}(x)$ en la integral.

- $\widetilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{1}$

$$\langle \widetilde{\boldsymbol{\delta}}, \phi\rangle = \langle \boldsymbol{\delta}, \widetilde{\phi}\rangle = \int \delta(x)\widetilde{\phi}(x)\,dx = \widetilde{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = \langle \mathbf{1}, \phi\rangle$$

- $\widetilde{\boldsymbol{sgn}}(k) = 2i\boldsymbol{P/k}$

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0\,. \end{cases}$$

  Alternativamente

$$sgn(x) = 2[H(x) - 1/2]\,.$$

- $\widetilde{\boldsymbol{H}}(k) = i\boldsymbol{P/k} + \pi\boldsymbol{\delta}(k)$
  Lo cual puede deducirse a partir de $\widetilde{\boldsymbol{sgn}}(k)$.

9.6 Análisis Funcional multidimensional

Funciones generalizadas de varias variable: La extensión formal a funcionales de más de una variable, lo logramos reemplazando los escalares por vectores. Por ejemplo, las funciones test,

$$\phi(x) \to \phi(x_1, \cdots, x_n) = \phi(\boldsymbol{x})$$

donde el intervalo que definía el soporte vendría reemplazado por una bola en el espacio n-dimensional,

$$x \in [a,b] \longrightarrow |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}| \leq R$$

con $\boldsymbol{x}$ cualquier dimensión, y $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

Luego, funciones como e^{ikx} se reemplaza el producto de escalares por el producto escalar de vectores. Por ejemplo,

$$e^{ikx} \longrightarrow e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}$$

Finalmente, las integrales pasarían a sus versiones multidimensional, por ejemplo,

$$\int dx \longrightarrow \int dx \int dy \int dz = \int dx\, dy\, dz$$

$$\int dx \longrightarrow \int r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$\int dx \longrightarrow \int dx_1\, dx_2 \cdots dx_n = \int d^n\boldsymbol{x}$$

según corresponda, para dimensión tres o n.

Ejemplo 1: Delta en tres dimensiones cartesianas,

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$$

con $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$.

Luego,

$$\langle \delta_{-\boldsymbol{a}}, \phi\rangle = \int d^3\boldsymbol{r}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})\phi(\boldsymbol{r})$$

$$= \int dx\delta(x-a_x)\int dy\delta(y-a_y)\int dz\delta(z-a_z)\phi(\boldsymbol{r})$$

$$= \phi(\boldsymbol{a})$$

Ejemplo 2: Delta en tres dimensiones en coordenadas polares,

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \frac{\delta(r-r_0)}{r^2}\frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin\theta}\delta(\phi-\phi_0)$$

con $\boldsymbol{r}=(r,\theta,\phi)$

Actividad: Obtener la expresión anterior de la delta en polares y entender por qué no tiene la estructura simple de la delta en cartesianas.

Transformada de Fourier de funciones de varias variables: Sea f una función en n dimensiones absolutamente integrable en todas las variables. Entonces, tomando la TF de una a una de las n variables x_i resulta,

$$\widetilde{f}(\boldsymbol{k}) = \int dx_n e^{ik_nx_n} \cdots \int dx_1 e^{ik_1x_1} f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$= \int d^n\boldsymbol{x}\, e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

La aplicación n veces de la fórmula inversa dará,

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int d^n\boldsymbol{k}\, e^{-i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}}\widetilde{f}(\boldsymbol{k})$$

Convención para la variable temporal: Dada la ocurrencia de la variable temporal en muchas áreas de la Física, es usual utilizar una convención especial para la variable temporal que involucra un símbolo diferente y un signo diferente,

$$\widehat{f}(\omega) = \int dt\, e^{-i\omega t} f(t)$$
$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega\, e^{i\omega t}\, \widehat{f}(\omega)$$

Luego, si la función depende tanto de las coordenadas espaciales como del tiempo tendremos,

$$\widehat{\widetilde{f}}(\boldsymbol{k},\omega) = \int d^n\boldsymbol{x} \int dt\, e^{i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} f(\boldsymbol{x},t)$$

$$f(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{kx}-\omega t)} \widehat{\widetilde{f}}(\boldsymbol{k},\omega)$$

Notar la superposición del símbolo $\hat{f}$ al $\widetilde{f}$. Esto es para indicar la transformada de Fourier en el tiempo. Luego, uno podría realizar la transformada de Fourier en la coordenada $\boldsymbol{x}$ y no en la temporal o viceversa, según la conveniencia del problema en mano.

Propiedades:

- $$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x_r}} = -ik_r\, \tilde{f}$$
  con $r = 1, \cdots, n$
- $$\widetilde{\nabla^2 f} = -|\boldsymbol{k}|^2\, \tilde{f}$$
- $$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial t}} = i\omega\, \tilde{f}$$

Transformada de Fourier de funciones generalizadas de varias variables: La teoría introducida anteriormente para una variable es extendida para el caso de n variables, con el resultado que, funciones generalizadas que asintóticamente no crecen más rápido que un polinomio, tienen transformada de Fourier, y las propiedades listadas arriba para la funciones ordinarias, valen para la transformada generalizada.

Ejemplos:

- $\widetilde{\delta} = 1$
- $\widetilde{1} = (2\pi)^n\delta$
- $\widetilde{\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})} = e^{i\boldsymbol{ka}}$

9.7 Aplicación: Ecuación de onda en tres dimensiones

En esta sección vamos a resolver la ecuación de onda en tres dimensiones usando como técnica los elementos introducidos en las secciones anteriores.

La siguiente ecuación, puede ser interpretada como que corresponde a la propagación de una onda de presión en tres dimensiones generada por una fuente con densidad f,

$$u_{tt} - \nabla^2 u = f$$

También puede ser interpretada como la propagación de una onda electromagnética generada por una corriente eléctrica de densidad f.

La solución fundamental corresponde a resolver la ecuación anterior reemplazando la fuente por la delta de Dirac en espacio y tiempo,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}} \right) w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta(t - s)$$

donde $\boldsymbol{y}$ y s hacen las veces de parámetros.

Aplicando la transformada de Fourier a las variables con $(\boldsymbol{x}, t)$, con la convención anterior,

$$v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = \int d^3\boldsymbol{x} \int dt\, e^{i(\boldsymbol{kx} - \omega t)} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s)$$

Notar que no usamos tildes con el objeto de simplificar la notación. En su lugar la variables dan cuenta si nos referimos a la transformada o anti-transformada.

Tomando la transformada de Fourier término a término en la ecuación fundamental resulta,

$$\left[(i\omega)^2 - (-|\boldsymbol{k}|^2) \right] v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = (e^{i\boldsymbol{ky}})(e^{-i\omega s})$$

la cual es una ecuación algebraica en v y puede despejarse,

$$v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) = \frac{e^{i(\boldsymbol{ky} - \omega s)}}{k^2 - \omega^2}$$

Dado que nuestro interés es w, tomamos la antitransformada de v,

$$\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= \frac{1}{(2\pi)^{3+1}} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{kx} - \omega t)} v(\boldsymbol{k}, \omega; \boldsymbol{y}, s) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i(\boldsymbol{kx} - \omega t)} \frac{e^{i(\boldsymbol{ky} - \omega s)}}{k^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{-i[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - \omega(t-s)]} \frac{1}{k^2 - \omega^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\boldsymbol{k} \int d\omega\, e^{i\boldsymbol{k\xi}}\, e^{-i\omega\tau} \frac{1}{k^2 - \omega^2}
\end{aligned}$$

Donde hemos introducido las siguientes variables,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} &= -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\
\tau &= -(t - s)
\end{aligned}$$

Usando coordenadas polares para la variable $\boldsymbol{k}$ resulta,

$$w(\boldsymbol{x},t;\boldsymbol{y},s) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{-1} (-1)d(\cos\theta) \int d\omega\, e^{ik\xi\cos\theta}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\omega \int_0^\infty k^2 dk\, [\phi]_0^{2\pi}\, (-1) \left[\frac{e^{ik\xi\cos\theta}}{ik\xi}\right]_1^{-1} e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\omega \int_0^\infty k^2 dk(-1)\frac{(-2i\sin k\xi)}{ik\xi}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3}\int d\omega \int_0^\infty k\, dk\frac{\sin k\xi}{\xi}\, e^{-i\omega\tau}\frac{1}{k^2-\omega^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi^3\xi}\int_0^\infty k\, dk \sin k\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-\omega^2}$$

Para avanzar necesitamos calcular la integral en ω porque el resultado de la integral depende de k. Esto lo podemos hacer utilizando las herramientas del análisis complejo. Notemos que los polos ocurren en $\omega = \pm k$. Según cómo decidamos evitar estas singularidades obtendremos diferente soluciones para la integral y luego diferentes soluciones para la solución fundamental w. Como consecuencia, aún para la misma fuente f, la solución u obtenida para cada w podría tener diferente significado físico. El efecto de **tomar las diferentes formas de evitar las singularidades se corresponden con diferentes condiciones de contorno.**

Solución retardada: Evitando ambas singularidades por abajo (en realidad, ambas singularidades se desplazan un $\epsilon > 0$ hacia arriba. Esto debe entenderse en el contexto de condiciones de contorno), como se muestra en la figura 9.5, se obtiene lo que se llama solución retardada, porque como veremos, corresponde a la solución causal que da cero cuando $\tau > 0$ y diferente de cero para $\tau < 0$. Recordando que la delta en el tiempo es $\delta(t-s) = \delta(-\tau)$, luego la excitación ocurre al tiempo $t = s$, como el tiempo avanza hacia el futuro, nos interesa las solución para $t > s$, esto es $\tau < 0$ dado que $\tau = s - t$. Esto explica la denominación de retardado: el efecto ocurre después de la perturbación.

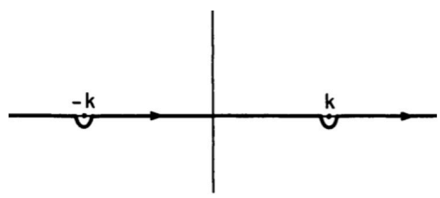


Figure 9.5:

Calculemos la integral en ω para el contorno de la Fig. 9.5.

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-\omega^2}$$

Solución para $\tau > 0$: Para $\tau > 0$ el contorno debe cerrarse sobre el semiplano complejo inferior para que la integral sobre el arco de circunferencia de radio R se anule al tomar $R \to \infty$. Veamos...

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i[Re(\omega)+iIm(\omega)]\tau} = e^{-iRe(\omega)\tau}\, e^{Im(\omega)\tau}$$

Luego, para que exista un damping, el exponente en $e^{Im(\omega)\tau}$ debe ser $Im(\omega) < 0$, luego el contorno debe cerrarse en el semiplano inferior.

Dado que este contorno no tiene polos resulta

$$I(\tau) = 0 \quad \text{para} \quad \tau > 0\,(t < s)\,.$$

Solución para $\tau < 0$: Para $\tau < 0$ la exponencial resulta

$$e^{-i\omega\tau} = e^{i\omega|\tau|} = e^{i[Re(\omega)+iIm(\omega)]|\tau|} = e^{iRe(\omega)|\tau|}\, e^{-Im(\omega)|\tau|}$$

Para que exista un término de damping en el integrando debe ser $Im(\omega) > 0$, por lo que el contorno debe cerrarse por el semiplano superior.

Dado que el contorno completo contiene ambos polos, la integral será diferente de cero. El valor de la integral se obtiene aplicando el teorema de los residuos.

$$\lim_{R\to\infty} \oint = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} = 2\pi i\,[Res(g(\omega), \omega = -k) + Res(g(\omega), \omega = k)]$$

con

$$g(\omega) = -\frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega^2 - k^2} = -\frac{e^{-i\omega\tau}}{(\omega - k)(\omega - (-k))}$$

notar el signo para que g tenga denominador de la forma $z - z_0$, con z_0 el polo. Escribimos $g = \phi/(\omega - z_0)$.

Luego,

$$Res(g(\omega), \omega = -k) = -\frac{e^{-i(-k)\tau}}{(-k-k)} = \frac{e^{ik\tau}}{2k}$$

$$Res(g(\omega), \omega = k) = -\frac{e^{-ik\tau}}{(k+k)} = -\frac{e^{-ik\tau}}{2k}\,,$$

y

$$\begin{aligned}[Res(g(\omega), \omega = -k) + Res(g(\omega), \omega = k)] &= \frac{e^{ik\tau}}{2k} + (-1)\frac{e^{-ik\tau}}{2k} \\ &= i\frac{\sin k\tau}{k}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{R\to\infty} \oint g(\omega)d\omega = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} g(\omega)d\omega + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(\omega)d\omega = -2\pi\frac{\sin k\tau}{k}$$

Tomando el límite y considerando que la integral sobre C_R se anula, obtenemos (con la integral en el sentido de valor principal),

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2 - \omega^2}$$

$$= -2\pi\frac{\sin k\tau}{k} \quad \text{para} \quad \tau < 0\,(t > s)\,.$$

Juntando ambas soluciones para $\tau > 0\,(t < s)$ y $\tau < 0\,(t > s)$ tenemos

$$I = -\frac{2\pi}{k}\sin k\tau H(-\tau)$$

Observación: De la discusión anterior uno podría inducir que existe una solución tal que el efecto ocurra antes que la perturbación. Efectivamente, eligiendo la forma de evitar las singularidades convenientemente puede obtenerse una solución para la cual, la solución fundamental es cero para $\tau < 0$ $(t > s)$ y no nula para $\tau > 0$ $(t < s)$, cuando la perturbación ocurrió para $\tau = 0$ $(t = s)$. Esto es, existe respuesta antes que la excitación ocurra, a esta solución se la llama solución avanzada.

Volviendo al cálculo... Reemplazando este valor particular de la integral en ω en la ecuación para w tenemos,

$$\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= \frac{1}{4\pi^3\xi}\int_0^\infty k\,dk\sin k\xi\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\frac{e^{-i\omega\tau}}{k^2-\omega^2} \\
&= -\frac{1}{4\pi^3\xi}\int_0^\infty k\,dk\sin k\xi\,\frac{2\pi}{k}\sin k\tau H(-\tau) \\
&= -\frac{H(-\tau)}{2\pi^2\xi}\int_0^\infty dk\sin k\xi\,\sin k\tau
\end{aligned}$$

Usando la identidad trigonométrica del producto de senos y el hecho que el integrando es par, escribimos

$$\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= -\frac{H(-\tau)}{2\pi^2\xi}\int_0^\infty dk\sin k\xi\,\sin k\tau \\
&= -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi}\int_{-\infty}^\infty dk[\cos k(\xi-\tau) - \cos k(\xi+\tau)]
\end{aligned}$$

Reescribimos cada una de las integrales en los cosenos usando la parte real de la relación,

$$\widetilde{1}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dx = 2\pi\delta(k)\,,$$

esto es,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos kx\,dx = \Re\left[\int_{-\infty}^{\infty} 1\,e^{ikx}dx\right] = \Re\left[\widetilde{1}(k)\right] = \Re\left[2\pi\delta(k)\right] = 2\pi\delta(k)\,.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi}\int_{-\infty}^\infty dk[\cos k(\xi-\tau) - \cos k(\xi+\tau)] \\
&= -\frac{H(-\tau)}{8\pi^2\xi}[2\pi\delta(\xi-\tau) - 2\pi\delta(\xi+\tau)] \\
&= -\frac{H(-\tau)}{4\pi\xi}[\delta(\xi-\tau) - \delta(\xi+\tau)]
\end{aligned}$$

Analicemos el término, $H(-\tau)\,\delta(\xi-\tau)$:

- Para $\tau > 0$, $H(-\tau) = 0$, por lo que este término es nulo para todo $\xi = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| > 0$ (notar que ξ siempre es positivo porque es el módulo).
- Para $\tau < 0$, $H(-\tau) = 1$, luego, $H(-\tau)\delta(\xi - \tau) = \delta(\xi - \tau) = \delta(\xi + |\tau|)$, donde hemos escrito $\tau = -|\tau| < 0$. Luego, para $\xi > 0$, $\delta(\xi - \tau) = 0$ porque el argumento $\xi - \tau = \xi + |\tau|$ nunca es nulo.

Luego, el primer término es nulo, entonces

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= -\frac{H(-\tau)}{4\pi\xi}[\delta(\xi - \tau) - \delta(\xi + \tau)] \\ &= \frac{H(-\tau)}{4\pi\xi}\delta(\xi + \tau) \end{aligned}$$

Analicemos el término $H(-\tau)\,\delta(\xi + \tau)$:

- Como antes, para $\tau > 0$,
  $$H(-\tau) = 0\,,$$
  por lo que
  $$H(-\tau)\,\delta(\xi + \tau) = 0$$
  para todo
  $$\xi = |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| > 0$$
  (notar que ξ siempre es positivo porque es el módulo).
- Para $\tau < 0$,
  $$H(-\tau) = 1\,,$$
  luego
  $$H(-\tau)\,\delta(\xi + \tau) = \delta(\xi + \tau)\,.$$
  Como $\xi > 0$ la delta $\delta(\xi + \tau)$ es nula para $\tau > 0$. Que coincide con el resultado del primer ítem. Dado que, siempre que la delta no es nula, vale $H(-\tau) = 1$, se puede escribir
  $$H(-\tau)\,\delta(\xi + \tau) = \delta(\xi + \tau)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) &= \frac{H(-\tau)}{4\pi\xi}\delta(\xi + \tau) \\ &= \frac{1}{4\pi\xi}\delta(\xi + \tau) \\ &= \frac{\delta(\xi + \tau)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|} \\ &= \frac{\delta(|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + \tau)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|} \\ &= \frac{\delta(|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + s - t)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|} \end{aligned}$$

Luego, la solución fundamental de la ecuación de onda en tres dimensiones,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\right) w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\delta(t - s)$$

resulta ser la distribución singular,

$$w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \frac{\delta(|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + s - t)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|}$$

La solución fundamental puede interpretarse como la respuesta a una fuente localizada en el espacio y el tiempo. De este modo $w(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s)$ es la respuesta en el punto $\boldsymbol{x}$ al tiempo t de una perturbación localizada en el punto $\boldsymbol{y}$ al tiempo s.

En la interpretación electromagnética, podría corresponder a un destello en la posición $\boldsymbol{y}$ en el momento s. La solución particular que hemos calculado dice que no hay respuesta excepto al tiempo

$$t = s + |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \,.$$

A este tiempo ocurre un pulso representado por la función delta. Para $\boldsymbol{x}$ más cerca de $\boldsymbol{y}$ el pulso aparece antes que para $\boldsymbol{x}$ más alejado de $\boldsymbol{y}$, al tiempo que la amplitud de la señal recibida en $\boldsymbol{x}$ decrece como $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ debido al denominador de la solución w. De esta forma la solución fundamental expresa el hecho que la perturbación de una fuente localizada se aleja de la fuente a una velocidad constante (notar las unidades en el argumento de la delta) en todas direcciones, representando una onda esférica. Notar que el factor $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|$ también es consistente con la conservación de energía.

Función de Green: Por lo discutido en el párrafo anterior queda más claro la denominación para esta solución particular como retarda, dado que la señal llega después que la perturbación ha ocurrido. Por otro lado, es la que tiene significado físico para nuestro mundo (al estado del conocimiento actual). A esta solución se la denomina función de Green retardada,

$$g_{ret}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) = \frac{\delta(|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + s - t)}{4\pi|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|}$$

porque corresponde a la condición de contorno homogénea para $\boldsymbol{x} \to \infty$:

$$g_{ret}(\boldsymbol{x} \to \infty, t; \boldsymbol{y}, s) = 0\,.$$

Para simplificar la expresión de g_{ret}, veamos como luce para $\boldsymbol{y} = 0$ y $t = 0$,

$$g_{ret}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{0}, 0) = \frac{\delta(|\boldsymbol{x}| - t)}{4\pi|\boldsymbol{x}|}$$

Luego, $g_{ret}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s)$ sirve para hallar la solución de la ecuación de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2_{\boldsymbol{x}}\right) u(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}, t)$$

con una fuente $f(\boldsymbol{x}, t)$ arbitraria mediante la integral,

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int d\boldsymbol{y} \int ds\, g_{ret}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s) f(\boldsymbol{y}, s)$$

Esta solución $u(\boldsymbol{x}, t)$ también satisface las condiciones de contorno homogéneas que satisface $g_{ret}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{y}, s)$, esto es, $u(\boldsymbol{x} \to \infty, t) = 0$

9.8 Aplicación: Función de Green para la ecuación de Poisson

La ecuación de Poisson en 3D

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = -f(\boldsymbol{r})$$

se podría pensar como la ecuación de onda estacionaria que resolviemos en la sección anterior donde está ausente la variable temporal.

Actividad: Siguiendo los lineamientos de la sección anterior hallar la función de Green para el operador

$$-\nabla^2 u(\boldsymbol{r})$$

Observación: Si, en el resultado de la sección anterior, ignoramos los términos relacionados a la variable t y el parámetro s, resulta

$$g_{ret}(\boldsymbol{r};\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

donde la delta se ha omitido porque vino de la transformada de Fourier temporal.

Este es el resultado al que debe llegarse en la actividad anterior.