Trabajo Práctico №2: Modos normales de vibración en una molécula unidimensional - Soluciones

Derivación de las ecuaciones de movimiento: Vamos a deducir las ecuaciones de movimiento de modo general para una molécula lineal triatómica. Para ello etiquetamos las masas de los núcleos de izquierda a derecha como m_1, m_2 y m_3. Llamaremos k_1 las constante restitutiva entre las masas m_1 y m_2 y k_2 las constante restitutiva entre las masas m_2 y m_3. Llamaremos b_1 y b_2, a las distancias de equilibrio entre $m_1 - m_2$ y $m_2 - m_3$, respectivamente (longitudes naturales, sin estiramiento de los 'resortes').

La masa m_1 es traccionada hacia la derecha por una fuerza $\bar{F}_1$. La masa m_2 es traccionada por la izquierda por una fuerza $\bar{F'}_1$ y por la derecha por una fuerza $\bar{F}_2$. Finalmente, la masa m_3 es traccionada por la izquierda por una fuerza $\bar{F'}_2$. Donde $F_1 = F'_1$ y $F_2 = F'_2$. Las ecuaciones de movimiento resultan

$$\begin{aligned} F_1 &= m_1\ddot{x}_{1f} && (1)\\ -F_1 + F_2 &= m_2\ddot{x}_{2f} && (2)\\ -F_2 &= m_3\ddot{x}_{3f} && (3) \end{aligned}$$

Las fuerzas vienen dada por el estiramiento respecto a sus longitudes naturales y las constantes elásticas,

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1(x_{2f} - x_{1f} - b_1) && (4)\\ F_2 &= k_2(x_{3f} - x_{2f} - b_2) && (5) \end{aligned}$$

Introducimos nuevas variables que dan el apartamiento de cada núcleo respecto a su posición de equilibrio,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1f} - x_{1i} && (6)\\ x_2 &= x_{2f} - x_{2i} && (7)\\ x_3 &= x_{3f} - x_{3i} && (8) \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{1f} &= \ddot{x}_1 && (9)\\ \ddot{x}_{2f} &= \ddot{x}_2 && (10)\\ \ddot{x}_{3f} &= \ddot{x}_3 && (11) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_{2f} - x_{1f} &= x_2 - x_1 + b_1 && (12)\\ x_{3f} - x_{2f} &= x_3 - x_2 + b_2 && (13) \end{aligned}$$

De modo que las ecuaciones de Newton resultan,

$$
\begin{aligned}
k_1(x_2 - x_1) &= m_1\ddot{x}_1 && (14)\\
-k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_3 - x_2) &= m_2\ddot{x}_2 && (15)\\
-k_2(x_3 - x_2) &= m_3\ddot{x}_3 && (16)
\end{aligned}
$$

luego,

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1}{m_1}(x_2 - x_1) &= \ddot{x}_1 && (17)\\
-\frac{k_1}{m_2}(x_2 - x_1) + \frac{k_2}{m_2}(x_3 - x_2) &= \ddot{x}_2 && (18)\\
-\frac{k_2}{m_3}(x_3 - x_2) &= \ddot{x}_3 && (19)
\end{aligned}
$$

Escribiendo las coordenadas en forma ordena obtenemos las siguientes ecuaciones para el caso general de diferentes masas, con diferentes resortes,

$$
\begin{aligned}
\frac{k_1}{m_1}x_1 - \frac{k_1}{m_1}x_2 &= -\ddot{x}_1 && (20)\\
-\frac{k_1}{m_2}x_1 + \left[\frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right]x_2 - \frac{k_2}{m_2}x_3 &= -\ddot{x}_1 && (21)\\
-\frac{k_2}{m_3}x_2 + \frac{k_2}{m_3}x_3 &= -\ddot{x}_3 && (22)
\end{aligned}
$$

En forma matricial resulta,

$$
A\,\bar{x} = -\ddot{\bar{x}} \qquad (23)
$$

donde

$$
A = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \\ 0 & -\frac{k_2}{m_3} & \frac{k_2}{m_3} \end{bmatrix} \qquad (24)
$$

De este modo, podemos definir una transformación lineal V tal que,

$$
\begin{aligned}
V &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 && (25)\\
&: \bar{x} \to V[\bar{x}] = A\,\bar{x} = -\ddot{\bar{x}} && (26)
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de movimiento para la molécula CO_2: Especializando para la molécula de dióxido de carbono,

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_3 = m && (27)\\
m_2 &= M && (28)\\
k_1 &= k_2 = k && (29)
\end{aligned}
$$

obtenemos el siguiente sistemas de ecuaciones,

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 &= -\ddot{x}_1 && (30)\\
-\frac{k}{M}x_1 + 2\frac{k}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_3 &= -\ddot{x}_1 && (31)\\
-\frac{k}{m}x_2 + \frac{k}{m}x_3 &= -\ddot{x}_3 && (32)
\end{aligned}
$$

Luego

$$A\,\bar{x} \;=\; -\ddot{\bar{x}} \tag{33}$$

con

$$A = \begin{bmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/M & 2k/M & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m \end{bmatrix} \tag{34}$$

Autovalores: La ecuación característica para la molécula de dióxido de carbono CO_2 resulta,

$$det(A-\lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} k/m-\lambda & -k/m & 0 \\ -k/M & 2k/M-\lambda & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m-\lambda \end{vmatrix} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\left[\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)-\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\right] \\ &\quad -\left(-\frac{k}{M}\right)\left[\left(-\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)-0\right] \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) \;=\; & \frac{k}{m}\left[\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)-\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\right] \\ & -\lambda\left[\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)-\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\right] \\ & -\frac{k}{M}\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) \;=\; & \frac{k}{m}\left[\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\right] \\ & -\frac{k}{m}\left[-\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\right] \\ & -\lambda\left[\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)\right] \\ & -\lambda\left[-\left(-\frac{k}{m}\right)\left(-\frac{k}{M}\right)\right] \\ & -\frac{k}{M}\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) \;=\; & \frac{k}{m}\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)-\frac{k}{m}\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{M}\right) \\ & -\lambda\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right)+\lambda\left(\frac{k}{m}\right)\left(\frac{k}{M}\right) \\ & -\frac{k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \end{aligned} \tag{39}$$

$$
\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= \frac{k}{m}\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \\
&\quad -\frac{k^3}{m^2M} \\
&\quad -\lambda\left(\frac{2k}{M}-\lambda\right)\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \qquad (40) \\
&\quad +\lambda\left(\frac{k^2}{mM}\right) \\
&\quad -\frac{k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}-\lambda\right) \qquad (41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= \frac{k}{m}\left(\frac{2k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}\right)-\frac{k}{m}\left(\frac{2k}{M}\right)(\lambda)-\frac{k}{m}(\lambda)\left(\frac{k}{m}\right)+\frac{k}{m}(\lambda)(\lambda) \\
&\quad -\frac{k^3}{m^2M} \\
&\quad -\lambda\left(\frac{2k}{M}\right)\left(\frac{k}{m}\right)+\lambda\left(\frac{2k}{M}\right)(\lambda)+\lambda(\lambda)\left(\frac{k}{m}\right)-\lambda(\lambda)(\lambda) \\
&\quad +\lambda\left(\frac{k^2}{mM}\right) \\
&\quad -\frac{k^2}{mM}\left(\frac{k}{m}\right)+\frac{k^2}{mM}(\lambda) \qquad (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= 2\frac{k^3}{m^2M}-2\lambda\frac{k^2}{mM}-\lambda\frac{k^2}{m^2}+\lambda^2\frac{k}{m} \\
&\quad -\frac{k^3}{m^2M} \\
&\quad -2\lambda\frac{k^2}{mM}+2\lambda^2\frac{k}{M}+\lambda^2\frac{k}{m}-\lambda^3 \\
&\quad +\lambda\frac{k^2}{mM} \\
&\quad -\frac{k^3}{m^2M}+\lambda\frac{k^2}{mM} \qquad (43)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= -\lambda^3 \\
&\quad +\lambda^2\left[\frac{k}{m}+2\frac{k}{M}+\frac{k}{m}\right] \\
&\quad +\lambda\left[-2\frac{k^2}{mM}-\frac{k^2}{m^2}-2\frac{k^2}{mM}+\frac{k^2}{mM}+\frac{k^2}{mM}\right] \\
&\quad +\left[2\frac{k^3}{m^2M}-\frac{k^3}{m^2M}-\frac{k^3}{m^2M}\right] \qquad (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
det(A-\lambda I) &= -\lambda^3 \\
&\quad +\lambda^2\, 2k\left[\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right] \\
&\quad -\lambda\, \frac{2k^2}{m}\left[\frac{1}{M}+\frac{1}{2m}\right]=0 && (45)\\
&= \lambda^3-\lambda^2\, 2k\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)+\lambda\,\frac{2k^2}{m}\left(\frac{1}{M}+\frac{1}{2m}\right) && (46)\\
&= \lambda^3-\lambda^2\, 2k\frac{m+M}{mM}+\lambda\,\frac{2k^2}{m}\frac{2m+M}{2mM} && (47)\\
&= \lambda\left[\lambda^2-\lambda\, 2k\frac{m+M}{mM}+\frac{2k^2}{m}\frac{2m+M}{2mM}\right] && (48)
\end{aligned}
$$

Uno de los autovalores es $\lambda_1 = 0$, los otros dos se obtienen de las raices de la ecuación siguiente

$$\lambda^2+b\lambda+c=0 \tag{49}$$

donde

$$
\begin{aligned}
b &= -\frac{2k}{mM}(m+M) && (50)\\
c &= \frac{k^2}{m^2M}(2m+M) && (51)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b^2-4c &= \frac{4k^2}{m^2M^2}(m+M)^2-4\frac{k^2}{m^2M}(2m+M) && (52)\\
&= \frac{4k^2}{m^2M}\left[\frac{(m+M)^2}{M}-(2m+M)\right] && (53)\\
&= \frac{4k^2}{m^2M}\left[\frac{(m+M)^2-M(2m+M)}{M}\right] && (54)\\
&= \frac{4k^2}{m^2M}\left[\frac{(m^2+M^2+2mM)-2Mm-M^2}{M}\right] && (55)\\
&= \frac{4k^2}{m^2M}\left[\frac{m^2}{M}\right] && (56)\\
b^2-4c &= \frac{4k^2}{M^2} && (57)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left[2k\frac{(m+M)}{mM} \pm \sqrt{\frac{4k^2}{M^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2k\frac{(m+M)}{mM} \pm \frac{2k}{M}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2k\frac{m}{mM} + 2k\frac{M}{mM} \pm \frac{2k}{M}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[2k\frac{1}{M} + 2k\frac{1}{m} \pm \frac{2k}{M}\right] \\
&= k\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \pm \frac{1}{M}\right]
\end{aligned} \tag{58}$$

los otros dos autovalores son

$$\lambda = k\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right] = k\left[\frac{2}{M} + \frac{1}{m}\right] = k\left(\frac{2m+M}{mM}\right) \tag{59}$$

$$\lambda = k\left[\frac{1}{M} + \frac{1}{m} - \frac{1}{M}\right] = k\left(\frac{1}{m}\right) \tag{60}$$

Resumen de autovalores:

$$\lambda_1 = 0 \tag{61}$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{m} \tag{62}$$

$$\lambda_3 = \frac{(2m+M)}{M}\frac{k}{m} \tag{63}$$

Autovector de $\lambda_1 = 0$: El autovector the $\lambda_1 = 0$ resulta del siguiente sistema,

$$(A-\lambda_1 I)\bar{v} = \begin{pmatrix} k/m & -k/m & 0 \\ -k/M & 2k/M & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \bar{b} = 0 \tag{64}$$

La forma reducida de $(A|\bar{b})$ es,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k/m & -k/m & 0 & 0 \\ -k/M & 2k/M & -k/M & 0 \\ 0 & -k/m & k/m & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{65}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \tag{66}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{67}$$

Luego,

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \Rightarrow x = y & (68)\\ y - z &= 0 \Rightarrow y = z & (69)\end{aligned}$$

tomando $z = 1 \Rightarrow y = 1, x = 1$. El autovecto asociado a $\lambda_1 = 0$ es,

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix} \tag{70}$$

tambien podría ser

$$\begin{bmatrix} -1\\ -1\\ -1 \end{bmatrix} \tag{71}$$

Autovector de $\lambda_2 = \frac{k}{m}$: El autovector the $\lambda_2 = k/m$ resulta del siguiente sistema,

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\bar{v} &= \begin{pmatrix} k/m - k/m & -k/m & 0\\ -k/M & 2k/M - k/m & -k/M\\ 0 & -k/m & k/m - k/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} & (72)\\ &= \begin{pmatrix} 0 & -k/m & 0\\ -k/M & k(2m+M)/mM & -k/M\\ 0 & -k/m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} & (73)\\ &= \bar{b} = 0 & (74)\end{aligned}$$

La forma reducida de $(A|\bar{b})$ es,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -k/m & 0 & 0\\ -k/M & k(2m+M)/mM & -k/M & 0\\ 0 & -k/m & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & (2m+M)/m & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{75}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -y = 0 &\Rightarrow y = 0 & (76)\\ -x + \frac{2m+M}{m} y - z = 0 &\Rightarrow x = -z & (77)\\ -y = 0 &\Rightarrow y = 0 & (78)\end{aligned}$$

tomando $z = 1 \Rightarrow y = 0, x = -1$. El autovecto asociado a $\lambda_2 = k/m$ es,

$$\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} \tag{79}$$

desde luego que tambien podría ser $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}$

Autovector de $\lambda_3 = \frac{(2m+M)}{M}\frac{k}{m}$: El autovector the $\lambda_3 = k(2m+M)/mM$ resulta del siguiente sistema,

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_3 I)\bar{v} &= \begin{pmatrix} \frac{k}{m}-\frac{k(2m+M)}{mM} & -k/m & 0 \\ -\frac{k}{M} & 2k/M-k(2m+M)/mM & -k/M \\ 0 & -k/m & k/m-k(2m+M)/mM \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2k/M & -k/m & 0 \\ -k/M & -k/m & -k/M \\ 0 & -k/m & -2k/M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (80) \\
&= \bar{b} = 0 \qquad (81)
\end{aligned}
$$

La forma reducida de $(A|\bar{b})$ es,

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -2k/M & -k/m & 0 & 0 \\ -k/M & -k/m & -k/M & 0 \\ 0 & -k/m & -2k/M & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -2k/M & -k/m & 0 & 0 \\ 0 & k/m & 2k/M & 0 \\ 0 & -k/m & -2k/M & 0 \end{array}\right) \qquad (82)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2k/M & -k/m & 0 & 0 \\ 0 & k/m & 2k/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (83)
$$

$$
\to \left(\begin{array}{ccc|c} -2m & -M & 0 & 0 \\ 0 & M & 2m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (84)
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
-2mx - My &= 0 \Rightarrow x = -\frac{M}{2m}y \qquad (85) \\
My + 2mz &= 0 \Rightarrow y = -\frac{2m}{M}z \qquad (86)
\end{aligned}
$$

tomando $z = 1 \Rightarrow y = -\frac{2m}{M}, x = -\frac{M}{2m}(-\frac{2m}{M}) = 1$. El autovector asociado a $\lambda_3 = k(2m + M)/mM$ es,

$$
\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (87)
$$

desde luego que tambien podría ser $\begin{pmatrix} -1 \\ 2m/M \\ -1 \end{pmatrix}$

Resumen de autovectores:

$$
\begin{aligned}
\bar{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (88) \\
\bar{v}_2 &= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (89) \\
\bar{v}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2m/M \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (90)
\end{aligned}
$$

Interpretación:

- En el primer modo (λ_1) los tres átomos se desplazan colectivamente (como un rígido) hacia la derecha.
- En el segundo modo (λ_2) ambos átomos de los extremos se alejan del átomo central, el cual permanece quieto.
- En el tercer modo (λ_3) los átomos de los extremos se mueven en la misma dirección mientras el central se mueve en sentido opuesto.

Desplazamientos de los átomos como función del tiempo: Escribiendo la matrix $A = SDS^{-1}$ con $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ y $S = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ podemos reescribir es sistema,

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{x}} + A\,\bar{x} &= 0 && (91)\\
\ddot{\bar{x}} + SDS^{-1}\,\bar{x} &= 0 && (92)\\
S^{-1}\ddot{\bar{x}} + DS^{-1}\,\bar{x} &= 0 && (93)\\
\ddot{\bar{\eta}} + D\,\bar{\eta} &= 0 && (94)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{\eta} &= S^{-1}\,\bar{x} && (95)\\
\ddot{\bar{\eta}} &= S^{-1}\,\ddot{\bar{x}} && (96)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\ddot{\eta}_1 + \lambda_1\eta_1 &= 0 && (97)\\
\ddot{\eta}_2 + \lambda_2\eta_2 &= 0 && (98)\\
\ddot{\eta}_3 + \lambda_3\eta_3 &= 0 && (99)
\end{aligned}$$

La solución para cada modo normal es,

$$\eta_i(t) = \eta_i(0)cos(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{\dot{\eta}_i(0)}{\sqrt{\lambda_i}}sen(\sqrt{\lambda_i}t) \qquad (100)$$

Luego, el desplazamiento the cada núcleo se obtiene a partir de la relación inversa por la cual fue definido el modo normal,

$$\bar{x} = S\,\bar{\eta} \qquad (101)$$

con

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2m/M \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (102)$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= S\bar{\eta} && (103)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2m/M \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} && (104)\\
&= \begin{pmatrix} \eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \\ \eta_1 - \frac{2m}{M}\eta_3 \\ \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 \end{pmatrix} && (105)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$x_1(t) = \eta_1(t) - \eta_2(t) + \eta_3(t) \tag{106}$$

$$x_2(t) = \eta_1(t) - \frac{2m}{M}\eta_3(t) \tag{107}$$

$$x_3(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t) + \eta_3(t) \tag{108}$$