Ejercicios para auto-estudio: Distancia y Aproximación

Credit: This notes are 100% from chapter 7 of the book entitled *Linear Algebra. A Modern Introduction* by David Poole. Thomson. Australia. 2006.

Comentarios:

- Los ejercicios son dados con el número de ejemplo o ejercicio y la página de la versión del libro citado arriba.
- Las soluciones de los ejercicios impares (en el conteo del libro) aparecen en el libro a partir de la página 571.
- La estructura de la práctica fue construída de modo que se presenta un ejercicio que aplica un determinado concepto, cuya solución está desarrollada en el libro. Luego, le sigue uno o varios ejercicios que se resuelven utilizando las mismas herramientas/conceptos.
- En el parcial no se evaluarán: (i) ejercicios de norma, (ii) ejercicio de distancia, ni (iii) ejercicios de mínimos cuadrados.

Sección: Espacios producto interno

1) (Ejercicio 1) Calcular: (a) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$, (b) $||\bar{u}||$, (c) $\mathrm{d}(\bar{u}, \bar{v})$, y (d) encontrar un vector no nulo ortogonal a $\bar{u}$.

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2) (Ejercicios 5-9) Idem Ej. (1) para $\bar{u} = 2 - 3x + x^2$, $\bar{v} = 1 - 3x^2$ utilizando los productos internos (a) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i b_i$ y (b) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \int_0^1 u(x)v(x)dx$.

3) (Ejercicios 13-15) Determinar para cada caso cuál de los axiomas de producto interno no se verifica, con $\bar{u}^T = (u_1, u_2)$, $\bar{v}^T = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
(a) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1$.
(b) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$.
(c) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1 v_2 + u_2 v_1$.

4) (Ejemplo 7.2, pág. 540) Mostrar que $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 2u_1 v_1 + 3u_2 v_2$ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

5) (Ejemplo 7.6, pág. 544) Sea $f(x) = x$ y $g(x) = 3x - 2$ dos vectores en $\mathcal{C}[0, 1]$, con el siguiente producto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Calcular: (a) $||f||$, (b) $\mathrm{d}(f, g)$ y (c) $\langle f, g \rangle$.

6) (Ejercicios 31-33) Probar las siguientes identidades:
(a) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} - \bar{v} \rangle = ||\bar{u}||^2 - ||\bar{v}||^2$.
(b) $||\bar{u} + \bar{v}||^2 = ||\bar{u}||^2 + 2\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + ||\bar{v}||^2$.
(c) $||\bar{u}||^2 + ||\bar{v}||^2 = \frac{1}{2}||\bar{u} + \bar{v}||^2 + \frac{1}{2}||\bar{u} - \bar{v}||^2$.

7) (Ejemplo 7.8, pág. 546) Utilizando el procedimiento de Gram-Schmidt, construir una base orthogonal para $\mathcal{P}_2$ (polinomios de Legendre hasta orden 2) con respecto al siguiente producto interno: $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

8) (Ejercicios 37 y 38) Idem ejercicio (7) para la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right\}$ para los siguientes productos internos:
(a) $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2$.
(b) $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle = \bar{u}^T A\bar{v}$ con $A = \begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 7\end{bmatrix}$.

Sección: Normas y distancias de funciones (no se evaluarán en el parcial)

9) (Ejemplo 7.16, pág. 563) Calcular la distancia $d(\bar{u}, \bar{v}) = ||\bar{u} - \bar{v}||$ usando las siguientes definiciones de norma: (a) Norma Euclideana, (b) Norma de suma y (c) Norma del máximo; para $\bar{u}^T = [3, -2]$ y $\bar{v}^T = [-1, 1]$.

10) (Ejercicios 1-3) Para el vector $\bar{u}^T = (-1, 4, -5)$ calcular: (a) la norma Euclideana, (b) la norma suma y (c) la norma máxima. Para el mismo $\bar{u}$ y $\bar{v}^T = (2, -2, 0)$ calcular la distancia $d(\bar{u}, \bar{v})$ en: (d) la norma Euclideana, (e) la norma suma y (f) la norma máxima.

11) (Ejercicios 16) Probar que $||A|| = max_{i,j}\{|a_{ij}|\}$ define una norma en M_{nm}.

12) (Ejemplo 7.19, pág. 569) Calcular $||A||_1$, $||A||_\infty$ (Teorema 7.7) y $||A|| = max_{||\bar{x}||=1}||A\bar{x}||$.

$$A = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\4 & -1 & -2\\-5 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

Sección: Aproximación por mínimos cuadrados (no se evaluarán en el parcial)

13) (Teorema 7.8, pág. 579) Demostrar que $proj_W(\bar{v})$ es la mejor aproximación de $\bar{v} \in V$ en W, donde W es un subespacio del espacio producto interno V. *Remark:* The Best Approximation Theorem gives us an alternative proof that $proj_W(\bar{v})$ does not depend on the choice of the basis of W, since there can be only one vector in W that is closest to $\bar{v}$: $proj_W(\bar{v})$.

14) (Ejemplo 7.23, pág. 580) (a) Hallar la mejor aproximación a $\bar{v}$ en el plano $W = span\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. (b) Calcular la distancia Euclideana de $\bar{v}$ a W.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix}5\\-2\\1\end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

Sección: Descomposición en valores singulares

15) (Ejemplos 7.33 y 7.34, pag. 599). Hallar la descomposición en valores singulares de la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

16) (Ejercicios 11, 12 y 13). Hallar la descomposición en valores singulares de las matrices A_1, A_2, y A_3:

$$A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix}0 & -2\\-3 & 0\end{pmatrix}$$

17) (Ejemplos 7.39, pag. 612). Hallar la matriz seudoinversa de la matriz A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18) (Ejercicios 41, 42, y 43). Hallar la matriz seudoinversa de las matrices A_1, A_2, y A_3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

19) (Ejemplos 7.40, pag. 613). Encontrar la solución de mínima distancia del sistema de ecuaciones $A\bar{x} = \bar{b}$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\bar{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20) (Ejercicios 45, 46, y 47). Encontrar la solución de mínima distancia de los sistemas de ecuaciones $A_i\bar{x} = \bar{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, con

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sección: Aplicaciones

21) (Ejemplo 7.44, pág. 624) *Polinomio de Fourier de orden n.* Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$. Sea W un subespacio de $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$ con base $\mathcal{B} = \{1, \cos x, \cdots, \cos nx, \sin x, \cdots$
Calcular la mejor aproximación a la función $f \in \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ en W.

Solución: La mejor aproximación $g(x)$ vendrá dada por la proyección de $f(x)$ en el subespacio W:

$$\begin{aligned} g(x) &= proj_W(f) \qquad (1) \\ &= \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 + \frac{\langle \cos x, f\rangle}{\langle \cos x, \cos x\rangle}\cos x + \cdots + \frac{\langle \cos nx, f\rangle}{\langle \cos nx, \cos nx\rangle}\cos nx \\ &\quad + \frac{\langle \sin x, f\rangle}{\langle \sin x, \sin x\rangle}\sin x + \cdots + \frac{\langle \sin nx, f\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle}\sin nx \end{aligned}$$

Definamos los siguientes coeficientes

$$a_0 = \frac{\langle 1, f\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\langle 1, f\rangle}{2\pi} \tag{2}$$

$$a_k = \frac{\langle \cos kx, f\rangle}{\langle \cos kx, \cos kx\rangle} = \frac{\langle \cos kx, f\rangle}{\pi} \tag{3}$$

$$b_k = \frac{\langle \sin kx, f\rangle}{\langle \sin kx, \sin kx\rangle} = \frac{\langle \sin kx, f\rangle}{\pi} \tag{4}$$

Para el cálculo de los denominadores usamos

$$\langle \cos kx, \cos kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi \tag{5}$$

$$\langle \sin kx, \sin kx\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi \tag{6}$$

$$\langle 1, 1\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi \tag{7}$$

Luego,

$$g(x) = a_0 + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx$$

Esta aproximación es llamada aproximación de Fourier de n-th orden de f en $[-\pi, \pi]$. Los coeficientes a_i y b_j se les llama coeficientes de Fourier de f y quedan determinados por la definición del producto interno

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \tag{8}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \tag{9}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \tag{10}$$