Ejercicios: Espacios vectoriales

Credit: This notes are 100% from chapter 6 of the book entitled *Linear Algebra. A Modern Introduction* by David Poole. Thomson. Australia. 2006.

Comentarios:

- Los ejercicios son dados con el número de ejemplo o ejercicio y la página de la versión del libro citado arriba.
- Las soluciones de los ejercicios impares (en el conteo del libro) aparecen en el libro a partir de la página 571.
- La estructura de la práctica fue construída de modo que se presenta un ejercicio que aplica un determinado concepto, cuya solución está desarrollada en el libro. Luego, le sigue uno o varios ejercicios que se resuelven utilizando las mismas herramientas/conceptos.
- Para más ejercitación se adjunta una práctica complementaria con un listado de ejercicios adicionales.

Sección: Espacios vectoriales y subespacios

1) (Ejemplo 6.12, pág. 439) Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial $f'' + f = 0$. Mostrar que $\mathcal{S}$ es un subespacio de $\mathcal{F}$.

2) Determinar si los siguientes conjuntos forman un espacio vectorial. En caso que no lo sean list los axiomas que no verifican.
(a) (Ejercicio 2, pág. 445) El conjunto de los vectores $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq 0$, $y \geq 0$ con las operaciones usuales de suma y producto.

(b) (Ejercicio 4, pág. 445) El conjunto de los vectores $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq y$ con las operaciones usuales de suma y producto.

(c) (Ejercicio 6, pág. 445) El conjunto de los vectores $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ con el producto usual y la suma definida como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ y_1 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(d) (Ejercicio 6, pág. 445) El conjunto de los números racionales con las operaciones de suma y producto usual.

3) (Ejemplo 6.15, pág. 442) Utilizando el teorema 6.2, verificar si el conjunto W es un subespacio de M_{22}, donde W est́formado por las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & a+1 \\ 0 & b \end{bmatrix} \tag{2}$$

4) (Ejercicio 24, pág. 446) Utilizando el teorema 6.2, verificar si W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b+1 \end{bmatrix} \right\} \tag{3}$$

5) (Ejercicio 34, pág. 446) Utilizando el teorema 6.2, verificar si $W = \{bx + cx^2\}$ es un subespacio de $\mathcal{P}_2$.

6) (Ejemplo 6.16, pág. 442) Verificar si el conjunto W formado por la matrices de orden dos con determinante nulo es un subespacio de M_{22}.

7) (Ejemplo 6.18, pág. 443) Mostrar que $M_{23} = span(E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23})$, donde E_{ij} es la matriz con todos los elementos nulos excepto en la posición ij.

8) (Ejemplo 6.21, pág. 444) (a) Mostrar que las matrices A, B y C expande el subespacio de matrices simétricas. (b) Escribir la matriz X en término de A, B y C y determinar los coeficientes de la combinación lineal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$$

9) (Ejercicio 46, pág. 446) Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W. Probar que $U \cap W$ es un subspacio de V.

10) (Ejercicio 47, pág. 446) Sea V un espacio vectorial con subespacios U y W. Dar un ejemplo con $V = \mathcal{R}^2$ para mostrar que $U \cup W$ no necesita ser un subespacio de V.

Sección: Dependencia lineal, base y dimensión

11) (Ejemplo 6.25, pág. 448) Mostrar que el conjunto $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$ es linealmente independiente (LI) en $\mathcal{P}_n$.

12) (Ejemplo 6.26, pág. 449) Verificar que el conjunto de funciones $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ de $\mathcal{P}_2$ son LI.

$$f_1(x) = 1 + x \qquad f_2(x) = x + x^2 \qquad f_3(x) = 1 + x^2$$

13) (Ejercicio 8, pág. 461) Verificar que el conjunto de funciones $\{2x, x - x^2, 1 + x^3, 2 - x^2 + x^3\}$ de $\mathcal{P}_3$ es LI.

14) (Ejercicio 15, pág. 461) Mostrar que $f(x)$ y $g(x)$ de $\mathcal{C}^{(1)}$ son LI si su Wronskiano $W(x)$ es no nulo, con

$$W(x) = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \tag{4}$$

15) (Ejercicio 17, pág. 461) Sea $\{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\}$ un conjunto LI en el espacio vectorial V. Para los siguientes dos conjuntos mostrar si son LI o dar un contraejemplo si no lo son.
(a) $\{\bar{u} + \bar{v}, \bar{v} + \bar{w}, \bar{u} + \bar{w}\}$.
(b) $\{\bar{u} - \bar{v}, \bar{v} - \bar{w}, \bar{u} - \bar{w}\}$.

16) (Ejercicio 19, pág. 461) Determinar si el conjunto $\mathcal{B}$ es una base de M_{22}.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

17) (Ejemplo 6.36, pág. 454) Encontrar el vector coordenadas $[A]_{\mathcal{B}}$ de la matriz A en la base standard $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{11}, E_{22}\}$ de M_{22}.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

18) (Ejercicio 27, pág. 461) Encontrar el vector coordenadas $[A]$ con respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

19) (Ejercicio 28, pág. 461) Encontrar el vector coordenadas de $p(x) = 2 - x + 3x^2$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

20) (Ejercicio 30, pág. 461) Sea $\mathcal{B}$ un conjunto de vectores de un espacio vectorial V con la propiedad que cada vector en V puede ser escrito unívocamente como una combinación lineal de los vectores en $\mathcal{B}$. Probar que $\mathcal{B}$ es una base para V.

21) (Ejercicio 33, pág. 461) Sea $\{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_m\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V de dimension n y sea $\mathcal{B}$ una base para V. Sea $S = \{[\bar{u}_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [\bar{u}_m]_{\mathcal{B}}\}$ el conjunto de vectores coordenadas de $\{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_m\}$ con respecto a $\mathcal{B}$. Probar que $span(\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_m) = V$ si y sólo si $span(S) = \mathbb{R}^n$.

22) (Ejercicio 44, pág. 462) Probar que el espacio vectorial $\mathcal{P}$ es de dimensión infinita. (Ayuda: suponer que tiene una base de dimensión finita. Mostrar que existe algún polinomio que no es una combinación lineal de esa base.)

23) (Ejercicio 54, pág. 462) Sea $S = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$ un conjunto LI en un espacio vectorial. Mostrar que si $\bar{v}$ es un vector en V que no está en $span(S)$, entonces $S' = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n, \bar{v}\}$ es aún LI.

Sección: Cambio de base

24) (Ejemplo 6.46, pág. 470) (a) Calcular la matriz cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$ y $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para las bases $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ de $\mathcal{P}_2$. (b) Calcular el vector coordenada de $p(x) = 1 + 2x - x^2$ con respecto a $\mathcal{C}$.

25) (Ejercicio 2, pág. 475) (a) Encontrar los vectores coordenadas $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$ y $[\bar{x}]_{\mathcal{C}}$ de $\bar{x}$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, respectivamente. (b) Calcular la matriz cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. (c) Usar la respuesta de la parte (b) para calcular $[\bar{x}]_{\mathcal{C}}$, y compararla con la solución en (a). (d) Hallar la matriz cambio de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$. (e) Usar la solución de las partes (c) y (d) para calcular $[\bar{x}]_{\mathcal{B}}$, y comparar con (a).

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

26) (Ejercicio 8, pág. 475) Repetir las consignas del ejercicio (25) para $p(x) \in \mathcal{P}_2$.

$$p(x) = 4 - 2x - x^2 \quad \mathcal{B} = \{x, 1+x^2, x+x^2\} \quad \mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$$

27) (Ejemplo 6.47, pág. 471) (a) Hallar la matriz cambio de base $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$. (b) Verificar que $[X]_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[X]_{\mathcal{B}}$. Donde $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22}\}$ y $\mathcal{C} = \{A, B, C, D\}$.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

28) (Ejemplo 6.48, pág. 474) Calcular la matriz cambio de base $P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$ para las bases del ejercicio (27) mediante la eliminación de Gauss-Jordan de la matriz de coeficientes de ambas bases. Utilizar como base de referencia la base canónica.

29) (Ejercicio 21, pág. 476) Sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ bases para un espacio vectorial V de dimension finita. Probar que $P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}\, P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = P_{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}$.

30) (Ejercicio 22, pág. 476) Sea V un espacio vectorial V de dimensión n con base $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \cdots, \bar{v}_n\}$. Sea P una matriz invertible $n \times n$ y sea $\bar{u}_i = p_{1i}\bar{v}_1 + \cdots + p_{ni}\bar{v}_n$, con $i = 1, \cdots, n$. Probar que $\mathcal{C} = \{\bar{u}_1, \cdots, \bar{u}_n\}$ es una base para V y mostrar que $P = P_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

Sección: Transformaciones lineales (TL)

31) (Ejercicio 2) Determinar si $T : M_{22} \to M_{22}$ es una transformación lineal.

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & c+d \end{bmatrix}$$

32) (Ejercicio 12) Determinar si $T : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ es una transformación lineal: $T(f) = f(c)$ con c un escalar fijo.

33) (Ejemplo 6.55, pág. 479) Hallar la imagen $T(\bar{v})$ de la tranformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2$ a partir de las imágenes de $T(\bar{u}_1)$ y $T(\bar{u}_2)$, donde $\mathcal{B}=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2\}$.

$$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \qquad T(\bar{u}_1) = 2-3x+x^2 \qquad T(\bar{u}_2) = 1-x^2$$

34) (Ejercicio 14) Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} \qquad T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}$$

hallar $T\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ y $T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$.

35) (Ejercicio 20) Mostrar que no existe ninguna TL $T:\mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} = 1+x, \qquad T\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix} = 2-x+x^2, \qquad T\begin{bmatrix}0\\6\\-8\end{bmatrix} = -2+2x^2$$

36) (Ejercicio 22) Sea $\{\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V y sea $T:V\to V$ sea un TL. Probar que si $T(\bar{v}_1)=\bar{v}_1$, $\cdots$, $T(\bar{v}_n)=\bar{v}_n$, entonces T es la transformación identidad sobre V.

37) (Ejercicio 24) Sea $\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_n$ vectores en un espacio vectorial V y sea $T:V\to W$ una TL. Mostrar que $\{\bar{v}_1,\cdots,\bar{v}_n\}$ es LI en V si $\{T(\bar{v}_1),\cdots,T(\bar{v}_n)\}$ is LI en W.

38) (Ejemplo 6.56, pág. 481) Calcular $(S\circ T)\bar{v}$ con $T:\mathbb{R}^2\to\mathcal{P}_1$ y $S:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_2$.

$$T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = a+(a+b)x, \qquad S(p(x)) = xp(x), \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix}3 & -2\end{bmatrix}$$

39) (Ejercicio 28) Hallar $(S\circ T)$ y $(T\circ S)$, donde S y T son TL, $S:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n$ y $T:\mathcal{P}_n\to\mathcal{P}_n$, con $S(p(x))=p(x+1)$ y $T(p(x))=xp'(x)$.

40) (Ejemplo 6.58, pág. 483) Verificar que las tranformaciones $T:\mathbb{R}^2\to\mathcal{P}_1$ y $T':\mathcal{P}_1\to\mathbb{R}^2$ son inversas una de otra.

$$T\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = a+(a+b)x \qquad T'(c+dx) = \begin{bmatrix}c\\d-c\end{bmatrix}$$

41) (Ejercicio 30) Sea $S:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_1$ definida por $S(a+bx)=(-4a+b)+2ax$ y $T:\mathcal{P}_1\to\mathcal{P}_1$ definida por $T(a+bx)=b/2+(a+2b)x$. Verificar que S y T son inversas.

42) (Ejercicio 32) Sea $T:V\to V$ una TL tal que $T\circ T=I$. (a) Mostrar que $\{\bar{v},T(\bar{v})\}$ is LD si y solo sí $T(\bar{v})=\pm\bar{v}$. (b) Dar un ejemplo con $V=\mathbb{R}^2$.

Sección: Núcleo y rango de una TL

43) (Ejemplo 6.61, pág. 487) (a) Hallar el kernel y el rango del operador integral $S:\mathcal{P}_1\to\mathbb{R}$. (b) Mostrar que ambos son subespacios. (c) Determinar la nulidad y el rango de S. (d) Verificar si $rank(S)+nullity(S)=dim(V)$, donde $V=\mathcal{P}_1$.

$$S(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx \tag{5}$$

44) (Ejercicio 6) Encontrar bases para el núcleo y el rango de la TL $T:M_{22}\to\mathbb{R}$, con $T(A)=tr(A)$. Determinar la nulidad y el rango y verificar el teorema del rango.

45) (Ejemplo 6.68, pág. 491) (a) Hallar el rango y la nulidad de T, donde W es el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden dos, $T : W \to \mathcal{P}_2$. (b) Mostrar que T es una TL.

$$T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = (a-b) + (b-c)x + (c-a)x^2 \tag{6}$$

46) (Ejercicio 10) Hallar o la nulidad o el rango de $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ y luego utilizar el teorema del rango para hallar la/el otro, con $T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \end{bmatrix}$.

47) (Ejercicio 14) Idem ejercicio (45) para $T : M_{33} \to M_{33}$, con $T(A) = A - A^T$.

48) (Ejercicio 15) Determinar si la TL $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is (a) uno a uno y (b) onto, con $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$.

49) (Ejercicio 18) Determinar si la TL del ejercicio (46) is (a) uno a uno y (b) onto.

50) (Ejercicio 22) Determinar si $V = S_3$ (matrices simétricad de orden 3) y $W = U_3$ (matrices triangular superior de orden 3) son isomorfos. Si lo son, dar un isomorfismo específico $T : V \to W$.

51) (Ejercicio 33) Sea $S : V \to W$ y $T : U \to V$ TL. (a) Probar que si S y T son uno a uno, entonces, tambien lo es $S \circ T$. (b) Probar que si S y T son onto, entonces, tambien lo es $S \circ T$.

Sección: Matriz de una TL

52) (Ejercicio 2) Sea $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$, con $T(a + bx) = b - ax$, $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x\}$, $\mathcal{C} = \{1, x\}$, $\bar{v} = p(x) = 4 + 2x$. (a) Encontrar la matriz $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. (b) Verificar el teorema 6.26 para $\bar{v}$ calculando $T(\bar{v})$ en forma directa y usando el teorema.

53) (Ejercicio 4) Sea $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, con $T(p(x)) = p(x + 2)$, $\mathcal{B} = \{1, x + 2, (x + 2)^2\}$, $\mathcal{C} = \{1, x, x^2\}$, $\bar{v} = p(x) = a + bx + cx^2$. (a) Encontrar la matriz $[T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. (b) Verificar el teorema 6.26 para $\bar{v}$ calculando $T(\bar{v})$ en forma directa y usando el teorema.

54) (Ejemplo 6.76, pág. 503) Sea la TL $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y sean $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $\mathcal{C} = \{\bar{e}_2, \bar{e}_1\}$ bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. (a) Hallar la matriz de T: $A = [[T(\bar{v}_1)]_{\mathcal{C}} | \cdots | [T(\bar{v}_n)]_{\mathcal{C}}]$. (b) Verificar $A[\bar{v}]_{\mathcal{B}} = [T(\bar{v})]_{\mathcal{C}}$.

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ x + y - 3z \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

55) (Ejemplo 6.81, pág. 508) Calcular por el método de las matrices $(S \circ T)\bar{v}$, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ y $S : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$. Utilzar para cada espacio la base canónica de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}_1$, y $\mathcal{P}_2$, respectivamente.

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad T\bar{v} = a + (a + b)x \qquad S(p(x)) = xp(x)$$

56) (Ejercicio 22) Determinar si la TL $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$, con $T(p(x)) = p'(x)$, es invertible considerando su matriz con respecto a la base estandard. Si T es invertible, usar el Teorema 6.28 y el método del ejemplo 6.82 para hallar T^{-1}.

57) (Ejemplo 6.82, pág. 509) Calcular T^{-1} utilizando representación matricial. Donde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ es one-to-one y onto. Utilizar las bases canónicas para $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{P}_1$.

$$T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a + (a + b)x \tag{7}$$

58) (Ejercicios 40-42) Set $T : V \to W$ un TL entre espacios vectoriales finitos. Sea $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases para V y W respectivamente, y sea $A = [T]_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$. (a) Mostrar que $null(T) = null(A)$. (b) Mostrar que $rango(T) = rango(A)$. (c) Si $V = W$ y $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, mostrar que T es diagonalizable si y sólo si A es diagonalizable.