Ejercicios: Ortogonalidad

Credit: This notes are 100% from chapter 5 of the book entitled *Linear Algebra. A Modern Introduction* by David Poole Thomson. Australia. 2006.

Comentarios:

- Los ejercicios son dados con el número de ejemplo o ejercicio y la página de la versión del libro citado arriba.
- Las soluciones de los ejercicios impares (en la enumeración del libro) aparecen en el libro a partir de la página 571.
- La estructura de la práctica fue construída de modo que sirva para autoestudio: se presenta un ejercicio que aplica un determinado concepto, cuya solución está desarrollada en el libro. Luego, le sigue uno o varios ejercicios que se resuelven utilizando las mismas herramientas/conceptos.

— **Sección: Ortogonalidad en $\mathbb{R}^n$**

1) Determinar si los siguientes conjuntos de vectores son ortogonales.
(Ejercicio 1, pág. 373:)

$$\begin{bmatrix}-3\\1\\2\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

(Ejercicio 2, pág. 373:)

$$\begin{bmatrix}4\\2\\-5\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$$

2) (i) Mostrar que los vectores $\bar{v}_i$ forman una base orthonormal para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. (ii) Calcular los coeficientes $c_i = \bar{w} \cdot \bar{v}_i / (\bar{v}_i \cdot \bar{v}_i)$ de la expansión del vector $\bar{w}$ en la base de (i). (iii) Dar las coordenadas del vector $\bar{w}$ en la base (i).
(Ejercicio 7, pág. 374:)

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

(Ejercicio 8, pág. 374:)

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}-6\\2\end{bmatrix} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

(Ejercicio 10, pág. 374:)

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \quad \bar{w} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

3) (i) Mostrar si las siguiente matrices son ortogonales. (ii) Para las matrices ortogonales, calcular su inversa.
(Ejemplo 5.7, pág. 371:)

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

(Ejercicio 16, pág. 374:)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 17, pág. 374:)

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 18, pág. 374:)

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 & 2/5 \\ 1/2 & -1/3 & 2/5 \\ -1/2 & 0 & 4/5 \end{bmatrix}$$

4) Encontrar una base ortonormal del subespacio W de $\mathbb{R}^3$ dado por
(Ejemplo 5.3, pág. 367:)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 2z = 0 \right\}$$

— **Sección: Complemento ortogonal y proyección ortogonal**

5) Sea W el plano en $\mathbb{R}^3$ definido por $x - y + 2z = 0$. Encontrar la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre W.
(Ejemplo 5.11, pág. 380:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6) (a) Calcular el complemento ortogonal $W^{\perp}$ de W. (b) Dar una base para $W^{\perp}$.
(Ejercicio 1, pág. 384:)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 2x - y = 0 \right\}$$

(Ejercicio 2, pág. 384:)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 3x + 4y = 0 \right\}$$

(Ejercicio 5, pág. 384:)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t; y = -t, z = 3t \right\}$$

(Ejercicio 6, pág. 384:)

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = 2t; y = 2t, z = -t \right\}$$

7) (a) A partir de la matriz A hallar las bases para: (i) col(A), (ii) fila(A), (iii) nul(A) y (iv) null(A^T). (b) verificar (teorema 5.10, pag. 376) que $(fila(A))^{\perp} = null(A)$ y que $(col(A))^{\perp} = null(A^T)$
(Ejemplo 5.9, pág. 377:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

8) (a) A partir de la matriz A hallar las bases para el espacio fila y el espacio nulo. (b) Verificar que cada vector del espacio fila is ortogonal a cada vector del espacio nulo.
(Ejercicio 7, pág. 384:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 8, pág. 384:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

9) Encontrar una base para $W^{\perp}$ a partir de los vectores $\bar{w}_i$ que expanden el subespacio W.
(Ejercicio 11, pág. 384:)

$$\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 12, pág. 384:)

$$\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 13, pág. 384:)

$$\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \bar{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

10) Encontrar la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre el subespacio W expandido por los vectores $\bar{u}_i$.
(Ejercicio 15, pág. 384:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 16, pág. 384:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 17, pág. 384:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

11) Encontrar la descomposición ortogonal de $\bar{v}$ con respecto al subespacio W expandido por los vectores $\bar{u}_i$.
(Ejercicio 19, pág. 384:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 21, pág. 384:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

— Sección: Procedimiento de Gram-Schmidt y factorización QR

12) Construir una base ortonormal para el subespacio W mediante el procedimiento de Gram-Schmidt.
(Ejemplo 5.13, pág. 387:)

$$W = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

13) Utilizando el procedimiento de GS hallar una base orthonormal a partir de los siguientes vectores.
(Ejercicio 1, pág. 391:)

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 3, pág. 391:)

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 4, pág. 392:)

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

14) Utilizando el procedimiento de GS hallar una base para $\mathbb{R}^3$ a partir $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$.
(Ejercicio 5, pág. 392:)

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

15) Encontrar la descomposición ortogonal de $\bar{v}$ con respecto al subespacio formado por los vectores $\bar{x}_1$ y $\bar{x}_2$ del ejercicio (15).
(Ejercicio 7, pág. 392:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

16) Encontrar una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector $\bar{v}$. Ayuda: primero buscar una base arbitraria que contenga $\bar{v}$ y luego aplicar el método de Gram-Schmidt (GS).
(Ejemplo 5.14, pág. 389:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 11, pág. 392:)

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

— **Sección: Diagonalización ortogonal de matrices simétricas**

17) Verificar que los autovectores correspondientes a distintos autovalores de la matriz A son ortogonales.
(Ejemplo 5.17, pág. 399:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

18) (a) Diagonalizar ortogonalmente la matriz A del ejercicio (17), esto es, generar una base ortonormal $\{\bar{q}_i\}$ para cada autoespacio y construir la matriz Q ubicando los vectores $\bar{q}_i$ en columnas. (b) Verifcar que $Q^T AQ = D$, con $D = diag(\lambda_i)$ y λ_i los autovalores de A. (c) Ensayar la construcción de la matriz Q ubicando los vectores en diferente orden y ver que cambios ocurren en la matriz D. (d) Construir la descomposición espectral de A con los autovales λ_i y los autovecto normalizados $\bar{q}_i$.
(Ejemplos 5.18 y 5.19, págs. 401-403:)

19) (a) Diagonalizar ortogonalmente las siguientes matrices. (b) Calcular su descomposición espectral.
(Ejercicio 1, págs. 404:)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 2, págs. 404:)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

20) Diagonalizar ortogonalmente las siguientes matrices.
(Ejercicio 5, págs. 404:)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 6, págs. 404:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$