Ejercicios: Autovalores y autovectores

Credit: This notes are 100% from chapter 4 of the book entitled *Linear Algebra. A Modern Introduction* by David Poole Thomson. Australia. 2006.

Comentarios:

- Los ejercicios son dados con el número de ejemplo o ejercicio y la página de la versión del libro citado arriba.
- Las soluciones de los ejercicios impares (en el conteo del libro) aparecen en el libro a partir de la página 571.
- La estructura de la práctica fue construída de modo que se presenta un ejercicio que aplica un determinado concepto, cuya solución está desarrollada en el libro. Luego, le sigue uno o varios ejercicios que se resuelven utilizando las mismas herramientas/conceptos.
- Para más ejercicios, se adjunta una práctica complementaria.

— **Sección: Introducción a los autovalores y autovectores**

1) Mostrar que $\bar{v}$ es un autovector de A y hallar sus autovalores.
(Ejercicio 1, pág. 259:)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 2, pág. 259:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 6, pág. 259:)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

2) Encontrar los autovalores de A y los correspondientes autoespacios. Dar la multiplicidad algebraica y geométrica.
(Ejercicio 23, pág. 261:)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 24, pág. 261:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

— **Sección: Determinantes**

3) Calcular el determinante de A usando expansión en cofactores.
(Ejercicio 1, pág. 280:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 2, pág. 280:)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Encontrar los valores de k para los cuales la matriz A es invertible.
(Ejercicio 45, pág. 281:)

$$A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 46, pág. 281:)

$$A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$$

5) Utilizando la regla de Crammer resolver los siguientes SEL.
(Ejercicio 57, pág. 282:)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

(Ejercicio 58, pág. 282:)

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

(Ejercicio 60, pág. 282:)

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$$

— **Sección: Autovalores y autovectores de matrices de orden** n

6) Calcular $A^{20}\bar{x}$ en término de los autovalores ($\lambda_1 = -1/3$, $\lambda_2 = 1/3$, $\lambda_3 = 1$,) y autovectores de A.
(Ejercicio 17, pág. 296:)

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7) Calcular $A^{10}\bar{x}$ en término de los autovalores y autovectores de A.
(Ejemplo 4.21, pág. 294:)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

— **Sección: Similaridad y diagonalización**

8) Hallar si A es diagonalizable y en tal caso calcular las matrices D y P de la descomposición $P^{-1}AP = D$
(Ejercicio 9, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 11, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 12, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9) Calcular las siguientes potencias de A utilizando la descomposición $A = PDP^{-1}$
(Ejercicio16, pág. 307:) Calcular A^9

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio17, pág. 307:) Calcular A^{10}

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 22, pág. 307:) Calcular A^{-5}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

10) Demostrar que las matrices A y B son similares, demostrando que A y B son similares a la misma matriz diagonal. Calcular P tal que $P^{-1}AP = B$
(Ejercicio 36, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 37, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 38, pág. 307:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$