Práctica: Matrices, espacios vectoriales y transformaciones lineales

Credit: This notes are 100% from chapter 3 of the book entitled *Linear Algebra. A Modern Introduction* by David Poole Thomson. Australia. 2006.

Comentarios:

- Los ejercicios son dados con el número de ejemplo o ejercicio y la página de la versión del libro citado arriba.
- Las soluciones de los ejercicios impares (en el conteo del libro) aparecen en el libro a partir de la página 571.
- La estructura de la práctica fue construída de modo que se presenta un ejercicio que aplica un determinado concepto, cuya solución está desarrollada en el libro. Luego, le sigue uno o varios ejercicios que se resuelven utilizando las mismas herramientas/conceptos.
- Para más ejercicios, se adjunta una práctica complementaria.

— **Sección 3.1** —

1) Demostrar el teorema 3.1 de la página 142: (i) la premultiplicación de una matriz por el versor i-ésimo da como resultado, la fila i-ésima de la matriz. (ii) la posmultiplicación de una matriz por el versor i-ésimo da como resultado, la columna i-ésima de la matriz.
(Ejercicio 41, pág. 151:)

2) Calcular el producto de las matrices A y B utilizando matrices particionadas.
(Ejercicio 34, pág. 151:)

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

— **Sección 3.2** —

3) Estudiar el ejemplo 3.16 de la pág. 153 para demostrar si las matrices B y C se pueden escribir como combinación lineal de las matrices A_1, A_2 y A_3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Hallar si B es combinación lineal de las matrices A_1, A_2 y A_3
(Ejercicio 6, pág. 159:)

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Demostrar que dada la matriz A de orden $m \times n$, las matrices AA^T y A^TA son simétricas.
(Ejercicio 34, pág. 159:)

6) Determinar si las siguientes matrices son linealmente independientes.
(Ejercicio 13, pág. 159:)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 14, pág. 159:)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

— **Sección 3.3** —

7) Demostrar que si A' y A'' son ambas inversas de la matriz A, entonces $A' = A''$.

8) Hallar X a partir de la ecuación $A^{-1}(BX)^{-1} = (A^{-1}B^3)^2$ asumiendo que las dimensiones de las matrices involucradas son tales que las operaciones indicadas en la ecuación son posibles.
(Ejemplo 3.26, pág. 167:)
Sol.: $X = B^{-4}AB^{-3}$.

9) Revise los ejemplos 3.30 y 3.31 de las págs. 173-175 para calcular (si es posible), mediante la reducción de Gauss-Jordan, la matriz inversa a partir de la matriz super ampliada.

10) Siguiendo el método del ejercicio (9) calcule, si es posible, la matriz inversa de las siguientes matrices:
(Ejercicio 52, pág. 177:)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 53, pág. 177:)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

11) Calcule la matriz inversa de A descomponiéndola en matrices elementales.
(Ejemplo 3.29 , pág. 172:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Sol.:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \end{aligned}$$

Entonces,

$$E_4E_3E_2E_1A = I \Rightarrow A^{-1} = E_4E_3E_2E_1$$

con

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

— **Sección 3.4** —

12) Repasar el ejemplo 3.33 de la página 178 para descomponer una dada matriz en el producto de dos matrices diagonales (recordar que la descomposicion LU funciona si no hay que hacer intercambio de filas!!).

13) Repasar el ejemplo 3.34 de la página 180 para resolver un SEL mediante la descomposición LU

14) Resolver el SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ usando la (dada) descomposición LU.
(Ejercicio 4, pág. 187:)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

15) Resolver el SEL $A\bar{x} = \bar{b}$ usando la (dada) descomposición LU.
(Ejercicio 6, pág. 187:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -3 & -4 \\ -5 & -8 & 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

16) Repasar el ejemplo 3.36 de la página 186 para resolver un SEL mediante la descompisición LU cuando se hace necesario permutar filas.

17) Escribir la matriz A en término de la factorización $P^T LU$.
(Ejercicio 24, pág. 188:)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

18) Resolver el SEL generado por la matriz A a partir de su descomposición $P^T LU$. Seguir los lineamientos aprendido en el ejercicio 13 (ejercicio 3.34, pág. 180 del libro).
(Ejercicio 27, pág. 188:)

$$A = P^T LU = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5/2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

— **Sección 3.5** —

19) Sea S el conjunto de vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Probar que S forma un subespacio de $\mathbb{R}^2$ o dar un contraejemplo para mostrar que no lo es.
(Ejercicio 1, pág. 207:)

$$x = 0$$

(Ejercicio 2, pág. 207:)

$$x \geq 0\,, \qquad y \geq 0$$

(Ejercicio 3, pág. 207:)

$$y = 2x$$

(Ejercicio 4, pág. 207:)

$$xy \geq 0$$

20) Demostrar que toda recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
(Ejercicio 9, pág. 207:)

21) Revise el ejemplo 3.41 de la pág. 193 para la determinación de si un dado vector columna o fila pertenece al espacio columna o fila, respectivamente, de una dada matriz.

22) Siguiendo el procedimiento del ejercicio (21) determine si los vectores $\bar{b}$ y $\bar{w}$ pertencen a los espacios columna y fila, respectivamente de la matriz A.
(Ejercicio 11, pág. 207:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 12, pág. 207:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \qquad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

23) Hallar bases para el espacio generado por las filas y las columnas de la matriz A y para el espacio nulo de A. Determinar el rango y la nulidad de A.

Procedimiento para calcular bases:

fila(A): reducir la matriz a su forma escalonada. A partir del teorema 3.20, se tienen que las líneas no nulas generan los vectores l.i.

col(A): *Método 1:* transponer la matriz y aplicar el procedimiento para fila(A).
Método 2: tomar las columnas de A que corresponden a los pivotes de la matriz en su forma escalonada.
Comentario: la dependencia lineal entre las columnas se conserva en las operaciones, pero las correspondientes columnas de la matriz reducida no expanden el mismo espacio.

null(A): A partir de la matriz reducida escribimos la matriz reducida ampliada. Luego generamos el SEL y renombramos las variablers libres y escribimos el vector solución. La base queda determinada por los vectores que aparecen como los coeficientes de las variables libres.

(Ejercicio 17, pág. 208:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 19, pág. 208:)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

24) Hallar una base para el span de los siguientes vectores.
(Ejercicio 27, pág. 208:)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 28, pág. 208:)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

25) Discutir con un compañero sobre las similitudes del Teorem 3.26 del rango de este capítulo (pág. 203) y el teorema del rango del capítulo anterior.

26) Reparsar el ejemplo 3.54 de la pág. 207 para el cálculo de las coordenadas de un dado vector en una dada base.

27) Encontrar las coordenadas del vector $\bar{w}$ en la base $\mathcal{B}$.
(Ejercicio 49, pág. 209:)

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \bar{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

— **Sección 3.6** —

28) Rehacer el ejemplo 3.58 de las págs. 214-215 para generar el operador de rotación en $\mathbb{R}^2$.

29) Sea $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación matricial asociada a la matriz A. Calcular $T_A(\bar{u})$ y $T_A(\bar{v})$.
(Ejercicio 2, pág. 221:)

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

30) Determinar si las siguientes transformaciones T son lineales y escribir sus matrices standard.
(Ejercicio 3, pág. 222:)

$$T_1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 4, pág. 222:)

$$T_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 5, pág. 222:)

$$T_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ 2x+y-3z \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 6, pág. 222:)

$$T_4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{bmatrix}$$

31) Rehacer el ejemplo 3.60 de la pág. 218 sobre la composición de dos transformaciones lineales.

32) Verificar el teorema 3.32 sobre la composición de TL y calcular la matriz de la composición $S \circ T$ por (i) sustitución y (ii) haciendo el producto matricial.
(Ejercicio 30 , pág. 223:)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y \\ x+y \end{bmatrix} \qquad S \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ -v \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 31 , pág. 223:)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ -3x+y \end{bmatrix} \qquad S \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u+3v \\ u-v \end{bmatrix}$$

(Ejercicio 33 , pág. 223:)

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y-z \\ 2x-y+z \end{bmatrix} \qquad S \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4u-2v \\ -u+v \end{bmatrix}$$