Sorpresas que pueden presentarse con el infinito.

Sorpresa 1: Espero que la primera sorpresa haya tenido que ver con la trompeta de Gabriel (ver guía de la clase sobre integrales impropias).

Veamos algunas curiosidades relacionadas con los conjuntos numéricos. Comencemos observando que el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \cdots\}$ es un ejemplo de conjunto infinito. ¿Por qué?

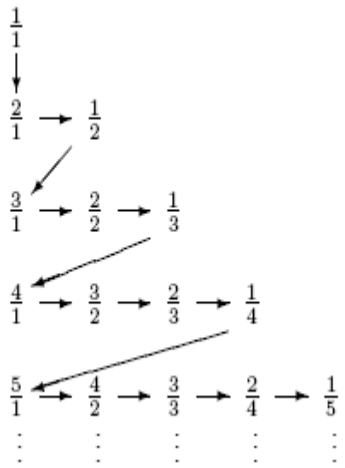
El paso del adjetivo *infinito* al sustantivo *infinito* no debe hacernos pensar que *infinito*, representado generalmente con el símbolo ∞, puede ser considerado como un número. No es posible incluir el símbolo ∞ en el sistema de los números reales y conservar al mismo tiempo las leyes fundamentales de la aritmética. Sin embargo el concepto de infinito invade toda la Matemática (los enteros, los reales, los triángulos del plano, etc.). Por esta razón es necesario analizar el infinito matemático de una manera precisa. La teoría moderna de conjuntos, creada por Georg Cantor (nació en Rusia en 1845, murió en Alemania en 1918) y su escuela a fines del siglo XIX, obtuvo brillantes resultados en este sentido.

Si A es el conjunto de los números naturales y B el conjunto de los números pares positivos, ¿qué conjunto contiene más elementos? ¿Cómo podemos responder sin contar los elementos de cada conjunto? La idea para hacerlo es bastante sencilla: aparear los elementos de los dos conjuntos biunívocamente. Así, sabríamos que en ellos "hay la misma cantidad de elementos". La relación: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \ldots \end{matrix}$ establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y los números pares positivos.

Sorpresa 2: B es un subconjunto propio de A y sin embargo tiene la misma "cantidad de elementos que A". Esto contradice nuestro sentido común que nos indica que "el todo es mayor que sus partes". Esta noción común era ya común entre los griegos. Tan es así que aparece como una de las nociones comunes en la obra *Los Elementos* de Euclides (~300 AC). Sin embargo no puede aplicarse a conjuntos infinitos. (No dejen de ver la interesantísima pg. http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html en inglés o http://www.euclides.org/ en castellano).

También puede establecerse de manera sencilla (¿cuál?) una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros $\{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$. Así, ambos conjuntos tienen el mismo *cardinal*, esto es, "tienen la misma cantidad de elementos".

Uno de los descubrimientos de Cantor fue que el conjunto de los números racionales positivos, tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales. Él esquematizó la correspondencia entre ellos como se muestra a la derecha (¿en qué fila y en qué columna aparecería el número $\frac{27}{11}$?).



Habiendo demostrado esta equivalencia, podría esperarse que todo conjunto infinito fuera también *numerable* (es decir, podría ser puesto en correspondencia biunívoca con los naturales).

El mismo Cantor obtuvo el notable resultado de que el conjunto de los números reales no es numerable. El conjunto de los números reales presenta un tipo "superior de infinitud" que el de los naturales.

Sorpresa 3: En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ "hay tantos números" como en el conjunto de los números reales. Para ver esto basta observar que la función $f(x)=\tan x$, definida en ese intervalo, nos proporciona una relación biunívoca entre el intervalo y el conjunto imagen de la función (que es el conjunto de los números reales). Es bastante sencillo probar que cualquier intervalo $[a,b]$ tiene el mismo cardinal que otro cualquiera $[c,d]$ y obviamente, que el conjunto de los números reales.

Sorpresa 4: Otro hecho sorprendente es que la dimensión no es en absoluto lo que determina la cardinalidad de un conjunto. Cantor demostró que hay tantos puntos en el segmento unidad como en el conjunto de puntos del cuadrado unidad o del conjunto de puntos del cubo unidad o en todo el espacio R^3. Estos resultados resultaban tan paradójicos y tan contrarios a la intuición que el propio Cantor llegó a escribir "lo veo y no lo creo".

Al grupo de estos infinitos, Cantor lo denominó con la letra hebrea $\aleph$ (Aleph). El infinito "más pequeño" que podemos encontrar, es el número cardinal de los números naturales y lo notó $\aleph_0$. El $\aleph_1$ es "más grande" que $\aleph_0$ y corresponde al número cardinal de los números reales. **Sorpresa 5**: ¿Hay infinitos más grandes? Sí, el mismo Cantor demostró que hay infinitos $\aleph$. Hay un $\aleph_2$ (¡es decir, un conjunto con un número cardinal más grande que el de los propios números reales!), un $\aleph_3$, etc. Sólo a título de ejemplo traten de imaginar al conjunto formado por todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$; el número cardinal de ese conjunto es $\aleph_2$.

Espero que no se hayan asustado mucho. CONSEJO: ¡CUIDADO CON EL INFINITO!