

Guía 6: Las funciones armónicas

Las funciones armónicas aparecen en muchas aplicaciones físicas y desempeñan un papel importante en, por ejemplo, problemas de conducción de calor, flujo de fluidos y potencial eléctrico.

Definición: Una función $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas segundas parciales continuas que verifica $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ en U se llama **función armónica**.

La ecuación $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ es una ecuación diferencial en derivadas parciales y se la conoce con el nombre de **ecuación de Laplace**. Utilizando los operadores diferenciales presentados en la página 1066 del libro¹ podemos encontrarla escrita de distintas maneras:

$$f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0 \quad \text{ó} \quad \nabla^2 f = 0 \quad \text{ó} \quad \Delta f = 0.$$

Ejemplo: Si $f(x, y, z) = x^2 - \frac{1}{2}(y^2 + z^2)$ entonces f es armónica. ¿Por qué?

Hay una conexión importante entre funciones armónicas y campos conservativos que se desprende inmediatamente de la igualdad $\text{div}(\nabla f) = \nabla^2 f$.

Propiedad 1

Si $\vec{F} = \nabla f$ entonces:

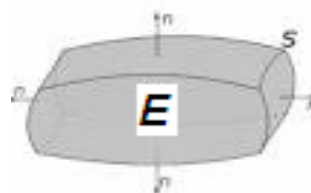
$$\text{div}(\vec{F}) = 0 \Leftrightarrow f \text{ es una función armónica}$$

Otra manera de enunciar esta propiedad, suponiendo que estamos trabajando en una región abierta U simplemente conexa, es:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0} \wedge \text{div}(\vec{F}) = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla f \text{ donde } f \text{ es una función armónica}$$

En otras palabras, desde el punto de vista de los campos vectoriales la teoría de las funciones armónicas y la ecuación de Laplace es la misma que la teoría de los campos conservativos con divergencia nula.

Las funciones armónicas tienen otra propiedad muy interesante. Supongamos que E es un sólido que cumple con las hipótesis del Teorema de la Divergencia y S es su superficie frontera.



¹ Cálculo de varias variables – Trascendentes tempranas, J. Stewart, 6ta. Ed., Editorial Cengage Learning

Propiedad 2

Si f es armónica en un abierto que contiene a E y si $f(x, y, z) = c \quad \forall (x, y, z) \in S$ entonces $f(x, y, z) = c \quad \forall (x, y, z) \in E$ donde c es una constante.

Demostraremos esta propiedad. Para ello:

- a) Realicen el ejercicio 29 de la sección 16.9 del libro².
- b) Si f es armónica y $f(x, y, z) = c \quad \forall (x, y, z) \in S$, utilizando $g = f$ en la igualdad del ejercicio 29, muestren que $\iiint_E |\nabla f|^2 dV = 0$.
- c) Justifiquen que $f(x, y, z) = c \quad \forall (x, y, z) \in E$.

² *Cálculo de varias variables – Trascendentes tempranas*, J. Stewart, 6ta. Ed., Editorial Cengage Learning