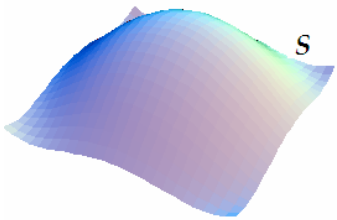
Departamento de Matemática
Esc. de Formación Básica
Cálculo III
Coordinadora: Dirce Braccialarghe

Guía 5: Masa de una lámina – Flujo a través de una superficie

Masa de una lámina

Hemos estudiado el problema de hallar la masa de un alambre, una lámina plana y de un sólido suponiendo conocida su densidad. ¿Cómo hallaríamos la masa de una lámina *S* como la de la figura?

Comencemos suponiendo conocida su densidad superficial ($[\delta] = \frac{[masa]}{[área]}$).



Caso I: Supongamos que en cada punto *P* de *S* la densidad superficial permanece constante. Es decir, $\delta(P) = k$ (constante) .

Entonces: $m =$ …….

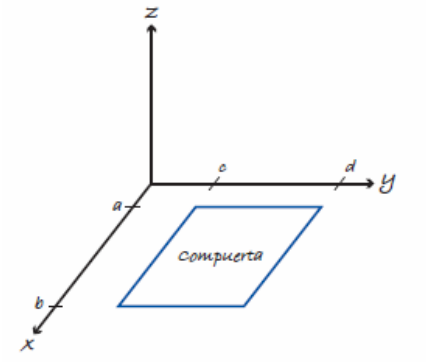
Caso II: Supongamos que $\delta = \delta(P)$ depende del punto *P* de *S*. ¿Cómo podríamos estimar la masa de la lámina *S*?

$m \approx$ ……

Bajo adecuadas hipótesis, ¿cómo podríamos expresar el valor exacto de la masa de *S*?

$m =$ …….

Flujo a través de una superficie[1]



1) Consideremos la compuerta que consiste en todos los puntos del plano *xy* tales que $a \le x \le b \ \wedge \ c \le y \le d$. Imaginemos que en cada punto de la misma el agua atraviesa la compuerta perpendicularmente con velocidad constante $\vec{v}$ ($[\vec{v}] = \frac{m}{s}$) en la dirección positiva del eje *z*.

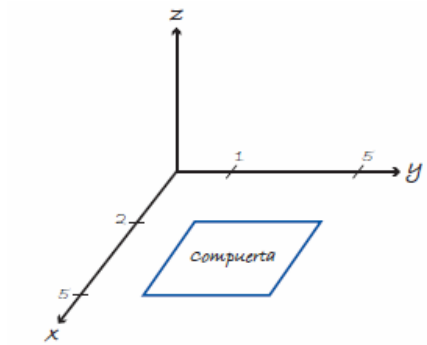
a) Dibujá el vector velocidad correspondiente al movimiento del agua en cada una de las esquinas de la compuerta.

b) Si colocáramos los vectores en todos los puntos de la compuerta, ¿qué figura se formaría?

c) Calculá el flujo del agua a través de la compuerta en la dirección positiva del eje *z* (**flujo**: volumen de un fluido que atraviesa una superficie por unidad de tiempo en una dirección dada).

[1] Adaptado del libro *Cálculo Aplicado. Competencias matemáticas a partir de contextos*. Salinas, P. y otros. 2013.

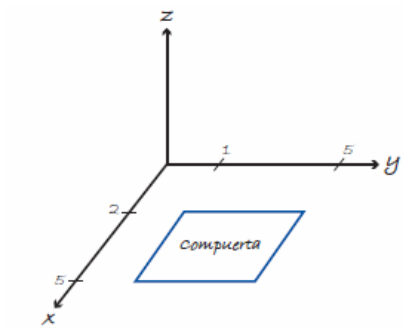
d) ¿Qué relación tiene este flujo con la figura del punto b)?



2) Ahora consideremos la siguiente compuerta en el plano *xy*: $2 \le x \le 5 \ \wedge \ 1 \le y \le 5$. Supongamos que el agua fluye a través de la compuerta pero ahora con velocidad $\vec{v}(x,y,z) = y\,\vec{k}$.

a) Dibujá la figura que se formaría si colocáramos los vectores velocidad en todos los puntos de la compuerta y calculá su volumen.

b) ¿Qué relación tiene el volumen de esta figura con el flujo de agua a través de la compuerta en dirección del eje *z* positivo?



3) Calculá el flujo a través de la compuerta en dirección del eje *z* positivo en los siguientes casos:

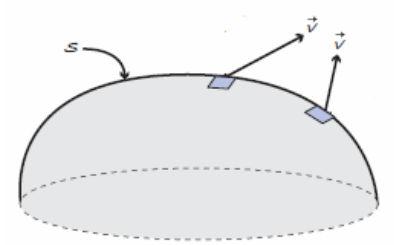
a) vector velocidad $\vec{v}(x,y,z) = 0\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$

b) vector velocidad $\vec{v}(x,y,z) = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \sqrt{3}\,\vec{k}$

Teniendo en cuenta lo obtenido en a) y en b), ¿qué componente de la velocidad contribuye al flujo a través de la compuerta?

4) Fluido atravesando una superficie plana con velocidad variable.

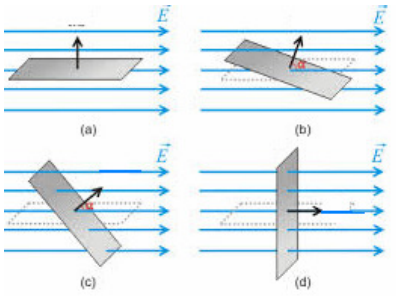
Consideremos la compuerta que consiste en todos los puntos del plano *xy* tales que $a \le x \le b \ \wedge \ c \le y \le d$. Imaginemos que en cada punto de la misma el agua la atraviesa con velocidad $\vec{v}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$. ¿Cómo estimarías el flujo a través de la compuerta en la dirección del eje *z* positivo? ¿Cómo expresarías, utilizando una integral, el flujo a través de la compuerta en la dirección del eje *z* positivo?



5) Fluido atravesando una superficie no necesariamente plana con velocidad variable.

Supongamos ahora que nuestra compuerta tiene la forma de una superficie *S* como la de la figura y queremos estimar el flujo a través de ella.

¿Qué información necesitaríamos conocer para poder hacerlo?



6) En cada una de las figuras puede verse algunos vectores representantes de un campo vectorial $\vec{E}$ y una misma superficie orientada *S* en distintas posiciones. ¿Cómo simbolizarías el flujo de $\vec{E}$ a través de *S*? ¿Cuál de los flujos a través de *S* es menor? ¿Cuál es mayor? ¿Por qué?