Departamento de Matemática
Esc. de Formación Básica
Cálculo III
Coordinadora: Dirce Braccialarghe

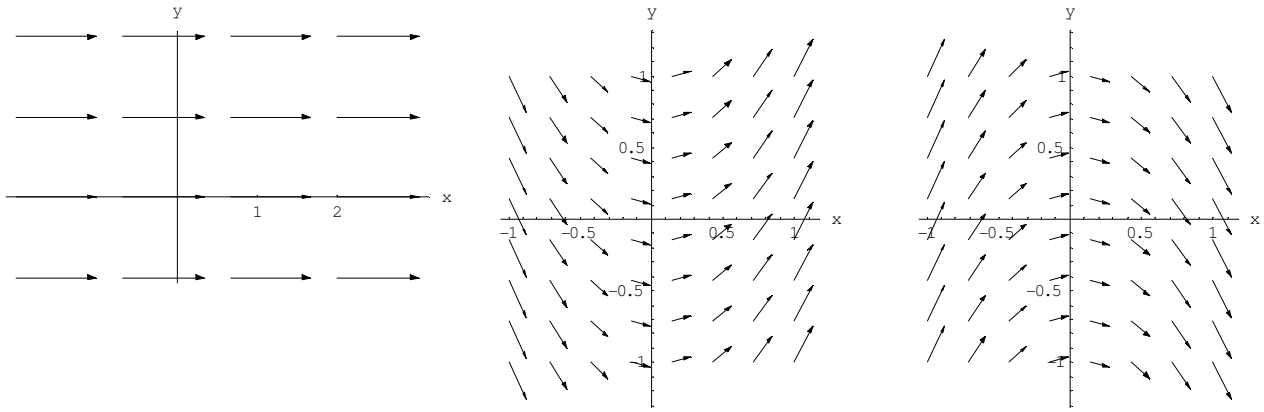
Guía 4: Flujo a lo largo y a través de una curva en el plano.
Rotación y divergencia de un flujo bidimensional.

Consideremos el flujo estacionario de una capa delgada de fluido en el plano (por ejemplo una "lámina" de agua que se desliza por el piso). Llamemos $\vec{V}$ a su campo de velocidades y δ ($[\delta]=\frac{[masa]}{[long]^2}$) a la función densidad del fluido. La expresión *flujo estacionario* significa que $\vec{V}$ y δ dependen solamente de x e y pero no del tiempo. Vamos a estudiar el campo vectorial $\vec{F}(x,y)=\delta(x,y)\vec{V}(x,y)$.

Actividad 1

Para comenzar trabajaremos con ejemplos simples. Supongamos que el campo $\vec{F}$ viene dado por la ley $\vec{F}(x,y)=(1,\,k\,x)$ donde k es una constante. En la figura siguiente tenemos representados algunos ejemplos de este campo:

$k=0$ $\qquad$ $k=2$ $\qquad$ $k=-2$



a) Dibujen una circunferencia C de centro (x_0,y_0) y radio R orientada positivamente sobre cada uno de los gráficos.

. b) Consideren la integral de línea $\oint_C \vec{F}(x,y)\times\vec{T}\,ds$. ¿Qué unidades tiene? Sin calcularla, ¿podrían decir si es positiva, negativa o cero para los campos representados en la figura? ¿Qué piensan que representa esta integral?

c) Para cada uno de los ejemplos calculen $\oint_C \vec{F}(x,y)\times\vec{T}\,ds$ donde C es la circunferencia de centro (x_0,y_0) y radio R orientada positivamente .

Actividad 2

Si ahora el campo $\vec{F}$ viene dado por $\vec{F}(x,y) = (2+x,\ 0)$.

a) Representen el campo $\vec{F}$ y, en el mismo gráfico, dibujen una circunferencia C ubicada en el primer cuadrante.

b) Queremos encontrar la cantidad neta de masa que atraviesa la región encerrada por C por unidad de tiempo (es decir, la cantidad de masa que sale menos la que entra por unidad de tiempo). ¿Qué integral representaría esta cantidad? Sin calcularla, ¿podrían decir si es positiva, negativa o cero para este campo?

c) Calculen la integral.

<u>Definiciones:</u>

Si $\vec{F}(x,y) = \vec{V}(x,y)$:

Flujo a lo largo de C: ……..

Flujo a lo largo de una curva C cerrada o ***circulación***: ……

Flujo <u>a través</u> de una curva C cerrada: ……...

Si $\vec{F}(x,y) = \delta(x,y)\vec{V}(x,y)$:

Flujo másico a lo largo de C: ……..

Flujo másico a lo largo de una curva C cerrada o circulación másica: ……

Flujo másico <u>a través</u> de una curva C cerrada: ……...

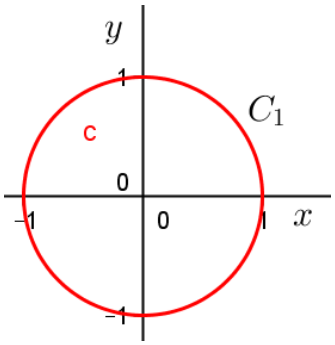
Actividad 3

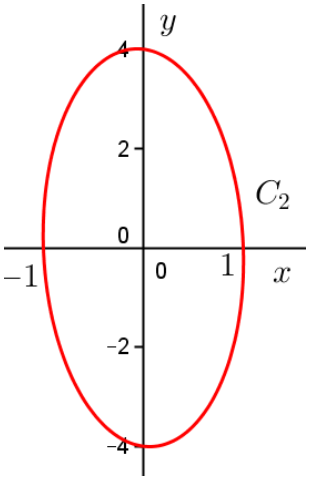
Dados los campos de velocidades

$\vec{V}_1(x,y) = (x,\ y)$ y $\vec{V}_2(x,y) = (-y,\ x)$

a) Representen los campos.

b) Para cada campo de velocidades calculen la circulación y el flujo a través de las curvas C_1 y C_2 orientadas positivamente. Interpreten los resultados obtenidos.





Actividad 4

Queremos estudiar los mismos fenómenos que estudiamos en las actividades 1 y 2 pero ahora localmente.

a) En los campos de la actividad 1, ¿rotará sobre sí mismo un "corcho" arrojado a este flujo en el punto (x,y)? ¿Hacia dónde? ¿Cómo podrían caracterizarse estos puntos utilizando integrales de línea?

b) En el campo de la actividad 2, ¿se "expande o se contrae" en cada punto el flujo? ¿Cómo podrían caracterizarse estos puntos utilizando integrales de línea?

c) En cada caso representa el campo de velocidades correspondiente a un fluido en movimiento (flujo) y responde las siguientes preguntas: ¿rotará un "corcho" arrojado a este flujo sobre sí mismo? ¿Con qué velocidad angular? ¿Es el flujo irrotacional? ¿Es el flujo incompresible (solenoidal)?

i) $\vec{V}_1(x,y) = (-y, x)$

ii) $\vec{V}_2(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$

iii) $\vec{V}_3(x,y) = (0, \frac{1}{y})$

Rotación escalar (vórtice)

Supongamos que $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es el campo de velocidades de un flujo. Consideremos C_ε la circunferencia cuyo centro es el punto (x,y) y radio ε, recorrida en sentido antihorario. Definimos ***rotación escalar*** **(o *vórtice*)** del flujo en el punto (x,y) como el

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{T}\, ds}{\pi \varepsilon^2}.$$

En el caso de un flujo ideal puede demostrarse[1] que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{T}\, ds}{\pi \varepsilon^2} = Q_x(x,y) - P_y(x,y)$$

Puede verse en textos de Mecánica de fluidos que, en este caso, la velocidad angular de un "corcho puntual" que gira sobre sí mismo es $\vec{\omega} = \frac{1}{2}(0,0,Q_x(x,y) - P_y(x,y))$.

<u>Definiciones</u>:

- Si el campo viene dado por $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ entonces resulta que la ***rotación escalar*** **(o *vórtice*)** puede expresarse así: $Q_x(x,y) - P_y(x,y)$
- Si $Q_x(x,y) - P_y(x,y) = 0$ entonces el flujo (o el campo $\vec{V}$) se dice ***irrotacional*** en (x,y).

Divergencia

Supongamos que $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es el campo de velocidades de un flujo. Consideremos C_ε la circunferencia cuyo centro es el punto (x,y) y radio ε, recorrida en sentido antihorario. Definimos la *divergencia* del flujo (o del campo $\vec{V}$) en el punto (x,y) como el siguiente límite:

[1] Utilizando el Teorema de Green.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{n}\, ds}{\pi \varepsilon^2}$$

donde $\vec{n}$ es el vector unitario exterior a la curva.

En el caso de un flujo ideal puede demostrarse[2] que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{n}\, ds}{\pi \varepsilon^2} = P_x(x,y) + Q_y(x,y)$$

<u>Definiciones</u>:

- Se llama divergencia de $\vec{V}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ al valor de este límite. En símbolos: $div\vec{V}(x,y) = P_x(x,y) + Q_y(x,y)$
- Si $div\vec{V}(x,y) = 0$ entonces el flujo (o el campo $\vec{V}$) se dice ***incompresible*** (o ***solenoidal***) en (x,y).

Actividad 5

a) Utilizando el teorema de Green demostrar que:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{T}\, ds}{\pi \varepsilon^2} = Q_x(x,y) - P_y(x,y)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint_{C_\varepsilon} \vec{V} \times \vec{n}\, ds}{\pi \varepsilon^2} = P_x(x,y) + Q_y(x,y)$$

b) Verifica que en este contexto, las formas vectoriales del Teorema de Green (bajo las hipótesis del mismo) pueden enunciarse de la siguiente manera:

$$\oint_C \vec{V} \times \vec{T} ds = \iint_D \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right) dA$$

"La circulación a lo largo de la curva *C* es igual a la integral doble sobre la región *D*, encerrada por la curva, de la rotación escalar de $\vec{V}$".

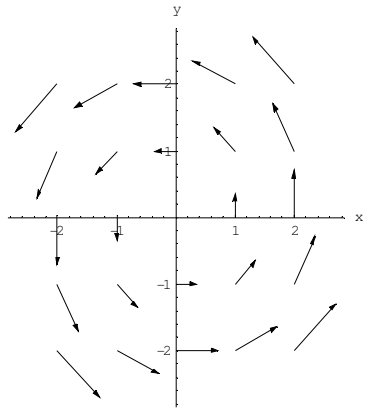
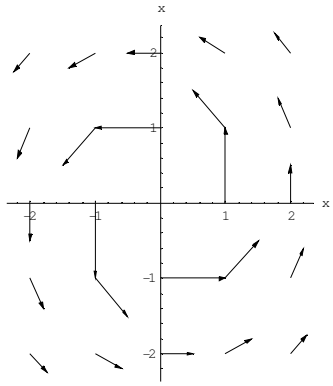
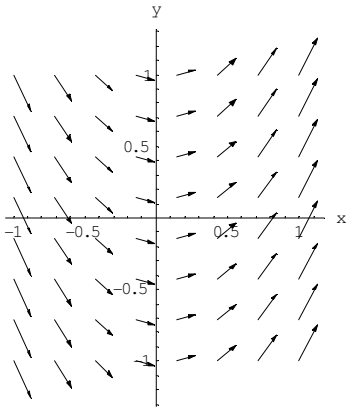
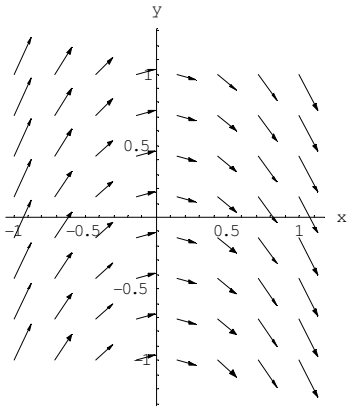
$$\oint_C \vec{V} \times \vec{n}\, ds = \iint_D \left(P_x(x,y) + Q_y(x,y)\right) dA$$

"El flujo a través de la curva *C* es igual a la integral doble sobre la región *D*, encerrada por la curva, de la divergencia de $\vec{V}$".

[2] Idem.

c) Para cada campo de velocidades correspondiente a un fluido en movimiento (flujo) responde las siguientes preguntas:

¿Rotará un corcho arrojado a este flujo sobre sí mismo? ¿Con qué velocidad angular? ¿Es el flujo irrotacional? ¿Es el flujo incompresible (solenoidal)?

 $\vec{V}_1(x,y) = (-y, x)$	 $\vec{V}_2(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$
 $\vec{V}_3(x,y) = (1, 2x)$	 $\vec{V}_4(x,y) = (1, -2x)$
$\vec{V}_5(x,y) = (x, 0)$	$\vec{V}_6(x,y) = (0, \frac{1}{y})$