Departamento de Matemática
Esc. de Formación Básica
Cálculo III
Coordinadora: Dirce Braccialarghe

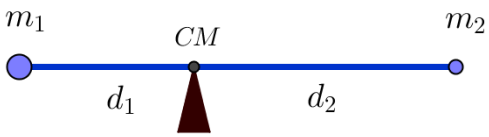
Guía 3: Centro de masa de una placa plana

Para cualquier placa existe un punto llamado "centro de masa" de la placa. No siempre ese punto está en la placa, pero cuando sí está, si la placa se suspende de un hilo que parte de ese punto o se la apoya sobre un fulcro, la placa permanece en equilibrio. La ubicación de ese punto depende de la forma de la placa y de cómo esté distribuida la masa sobre la misma.

1) ¿Dónde se ubicaríamos ese punto si la placa fuese rectangular y tuviese su masa uniformemente distribuida (densidad constante)? ¿Por qué?

En general, no es evidente la localización de este punto. Para poder determinar su ubicación comenzaremos describiendo el caso más sencillo.

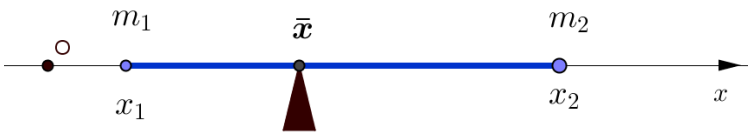
Supongamos que dos masas, m_1 y m_2, están fijas en los extremos de una varilla de masa despreciable apoyada sobre un pivote a las distancias respectivas d_1 y d_2 del apoyo.



En http://www.walter-fendt.de/ph14s/lever_s.htm pueden ver una aplicación que muestra el principio de la palanca descubierto por Arquímedes.

2) ¿Qué relación debe haber entre las cantidades m_1, m_2, d_1 y d_2 para que la varilla quede en equilibrio?

Ahora supongamos que la varilla está sobre el eje x, el objeto de masa m_1 está en x_1 y el objeto de masa m_2 está en x_2.



3) ¿Cómo podríamos hallar $\bar{x}$ (también puede notarse x_{CM}), el centro de masa, a partir de las cantidades m_1, m_2, x_1 y x_2?

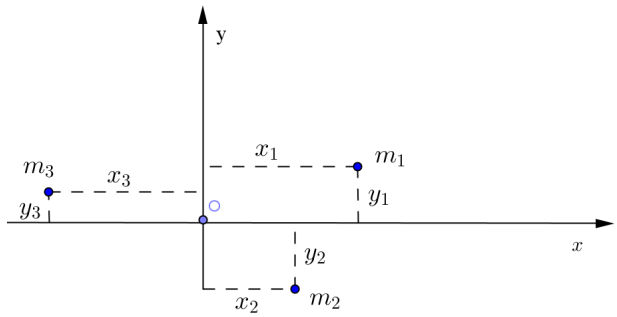
<u>Definición</u>: Los números m_1x_1 y m_2x_2 se llaman **momentos** de las masas m_1 y m_2 **respecto del origen**.

En general, si se tiene un sistema de n partículas, o puntos materiales, cuyas masas son m_1, m_2, …, m_n colocadas sobre el eje x en x_1, x_2, …, x_n respectivamente, tendremos:

$$\bar{x} = \underline{\qquad\qquad}$$

Observemos que si la masa total se considerara concentrada en el centro de masa, $\bar{x}$, su momento sería el mismo que la suma de los momentos de las masas (momento del sistema).

4) Ahora consideremos un sistema de puntos materiales cuyas masas son m_1, m_2, $\ldots, m_n$, ubicados en los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) en el plano *xy*.



En http://www.educaplus.org/play-342-Centro-de-masa.html pueden conjeturar y verificar la posición del centro de masa de un sistema de partículas.

Definiciones:

Momento del sistema respecto al eje *y* (se consideran las distancias dirigidas al eje *y* de los puntos materiales):

$$M_y =$$

Momento del sistema respecto al eje *x* (se consideran las distancias dirigidas al eje *x* de los puntos materiales):

$$M_x =$$

Entonces, M_y es una medida de la tendencia a girar en torno del eje *y* y M_x es una medida de la tendencia a hacerlo alrededor del eje *x*.

Como en el caso unidimensional las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa se expresan en términos de los momentos mediante las fórmulas:

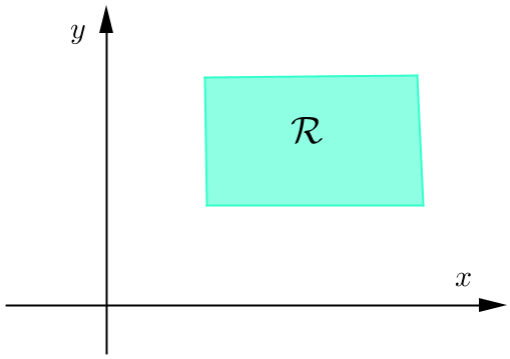
$$\bar{x} = _____ \qquad \bar{y} = _____$$

5) Teniendo en cuenta lo analizado hasta ahora,

a) ¿cómo podremos **estimar** las coordenadas del centro de masa de una placa o lámina con densidad δ variable que ocupa una región *R* del plano como en la figura?

b) ¿qué integrales nos permiten **calcular** las coordenadas del centro de masa de la lámina?

c) hallen las coordenadas del centro de masa de la lámina que ocupa la región $R = [0, 2] \times [-1, 1]$ sabiendo que la ley de la función densidad es $\delta(x, y) = x\,y^2$.



6) ***Centro de masa***, ***centroide*** y ***centro de gravedad*** de una lámina, ¿son sinónimos?