Estudio de Curvas y Superficies

Ecuaciones de superficies:

La superficie más simple ya ha sido motivo de nuestro estudio y ella es **el plano**. La ecuación del mismo, referido a un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal, es lineal en las variables *x; y* y *z*, es decir :

Un punto $P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ **(1)**

siempre que el vector normal al plano π sea de componentes (a,b,c) y el punto de paso del plano sea $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

La ecuación **(1)** puede escribirse, generalizando de la siguiente manera:

$$F(x,y,z)=0 \qquad \textbf{(2)}$$

donde F es una función de tres variables, que en caso del plano es: $ax+by+cz+d$

Bajo estas hipótesis, cualquier punto del plano $P_1(x_1,y_1,z_1)$ deben satisfacer tanto la ecuación **(1)** como la ecuación **(2)** o sea que se cumplirá**:**

$ax_1+by_1+cz_1+d=0$ o lo que es lo mismo $F(x_1,y_1,z_1)=0$

Generalizando: llamaremos ecuación de una superficie a la relación que involucra las coordenadas de un punto genérico de la misma. Si esta relación es de la forma $F(x,y,z)=0$, la superficie se podrá caracterizar como el **lugar geométrico** de puntos del espacio:

$$S=\{P(x,y,z) \,/\, F(x,y,z)=0\}$$

Para obtener la ecuación de una superficie, llamaremos (x,y,z) a las coordenadas de un punto de la misma y las ligaremos a las condiciones que representen que efectivamente dicho punto pertenezca a la superficie definida.

Es posible definir una superficie dando una propiedad que es cumplida por todos sus puntos, o también como el movimiento de una recta en el espacio sujeto a ciertas condiciones.

Ejemplos:

1) Estudiaremos la superficie. $S=\{P(x,y,z) \,/\, z^2=9\}$

la ecuación de la superficie es entonces $z^2 - 9 = 0 \quad \forall x, \ \forall y$ dicha ecuación se puede descomponer de la siguiente manera: $(z-3).(z+3)=0$ Luego podemos caracterizar así:

$$S=\{P(x,y,z) \,/ (z-3).(z+3)=0\}= \{P(x,y,z) \,/\, z-3=0\} \cup \{P(x,y,z) \,/\, z+3=0\}$$

Es decir la superficie S está formada por dos planos paralelos al plano coordenado xy

2) Estudiar la superficie siguiente: $S=\{P(x,y,z) \,/\, y^2+y-6=0\}$. La ecuación $y^2+y-6=0$ tiene por raíces $y_1=2$; $y_2=-3$. Luego, podemos escribir: $y^2+y-6=(y-2).(y+3)=0$ luego

$$S=\{P(x,y,z) \,/\, y^2+y-6=0\} =\{P(x,y,z) \,/\, (y-2)=0\} \cup \{P(x,y,z) \,/\, (y+3)=0\}$$

Es decir dos planos paralelos al plano xz.

Observación: si la ecuación igualada a cero no tiene raíces reales, diremos que el lugar geométrico es vacío.

Superficies cilíndricas

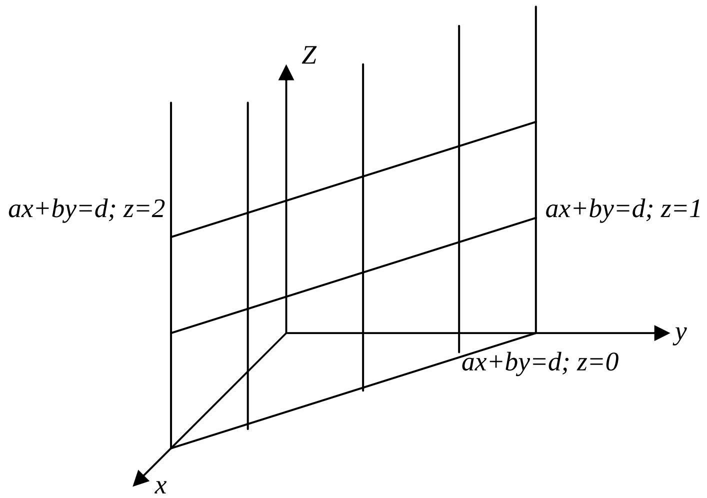
Una superficie cilíndrica es la superficie generada por una recta, llamada **generatriz** que se desplaza manteniéndose paralela a un eje coordenado y apoyándose en una

curva Γ contenida en el plano coordenado perpendicular al eje que contiene a la recta generatriz, a tal curva se la llama **directriz.**
Supongamos que la ecuación de la directriz : $f(x,y)=0$ (en el plano xy) .a la que llamamos con anterioridad Γ y sea la recta generatriz paralela al eje z
Podemos expresar la superficie como:

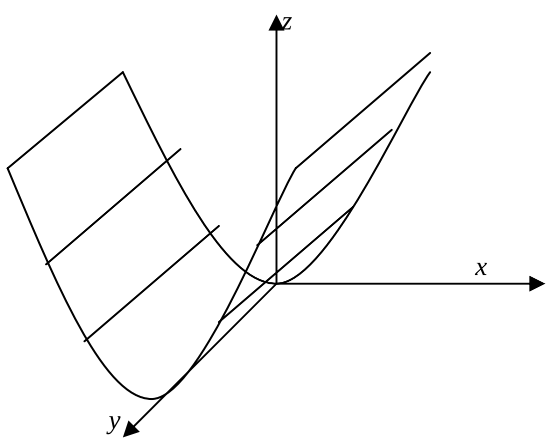
$$S=\{P(x,y,z) \,/\, f(x,y)=0 \ \ \forall z\}$$

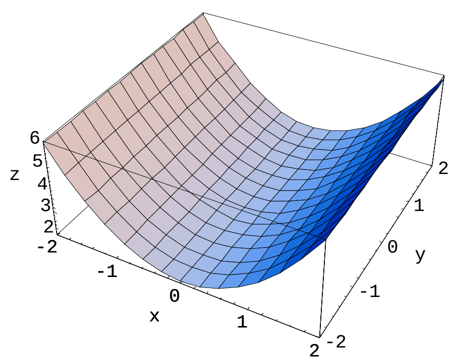
Donde la ecuación la función $f(x,y)=0$ es la ecuación de la superficie y es válida $\forall z$.
De la misma forma podemos definir una superficie cilíndrica con directriz $g(x,z)=0$ y de generatriz paralela al eje y. Así como también una superficie con generatriz $h(y,z)=0$ y generatriz paralela al eje x.

Ejemplo 3:
El plano $\pi=\{ P(x,y,z) \,/\, ax+by+d=0 \ ; \forall z \}$ es un caso particular de superficie cilíndrica cuya directriz es la recta: $ax+by\text{-}d=0$ y de generatriz paralela en al eje z



Ejemplo 4:
La ecuación $z^2=2py$ representa una parábola en el plano yz , cuya generatriz es paralela al eje x





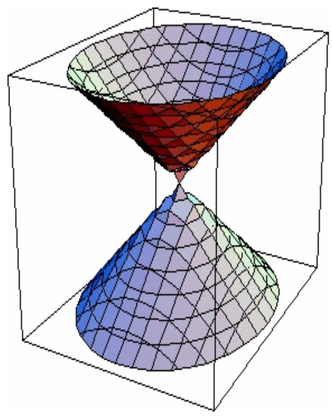
Superficies cónicas

Una superficie cilíndrica es la superficie generada por una recta, llamada **generatriz** que gira de manera que uno de sus puntos llamado **vértice V** que es fijo y apoyándose en una curva Γ que no contiene al vértice, a tal curva se la llama **directriz.**
Supongamos que la ecuación de la directriz sea: *f(x,y)=0* (en el plano *xy*) .y la recta generatriz que cuyo punto fijo es $V(0,0,z_0)$

Ejemplo 5:

Sea la curva $\Gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y el vértice V(0,0,0) la ecuación de la superficie

cónica será : $S: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$



Ecuaciones de curvas en el espacio

Hemos estudiado hasta ahora que es posible representar a algunas superficies, dadas en un sistema de coordenadas cartesianas, mediante la ecuación :*F(x,y,z)=0.*
Algunas ecuaciones curvas en el espacio pueden ser dadas como intersección de dos superficies, lo que equivale a decir:
Sean $F(x,y,z)=0$; $G(x,y,z)=0$ dos superficies, si éstas se interceptan , entonces diremos que los puntos comunes deben cumplir : $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

Un ejemplo ya estudiado es la ecuación de la recta en el espacio, que es psoble representarla como intersección de dos planos que la contengan.

Diremos en general que $\Gamma : \begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ o lo que es lo mismo:

$\Gamma = \{P(x,y,z) / F(x,y,z)=0\} \cap \{P(x,y,z)=0 / G(x,y,z)=0\}$ representa una curva en el espacio.

Es posible también representar una curva en el espacio por sus **ecuaciones paramétricas**, a saber:

$$\begin{cases} x = f(t) = 0 \\ y = g(t) = 0 \quad t \in \Re \\ z = h(t) = 0 \end{cases}$$

donde los puntos de coordenadas *(x,y,z)* son pertenecientes a la curva. Dichas coordenadas son funciones del parámetro *t*. Esta forma es la más utilizada para describir el movimiento de un punto en el espacio, en donde el parámetro *t* representa el tiempo y las coordenadas *(x,y,z)* el lugar que ocupa en el espacio en cada instante.

Como ejemplo ya conocido vemos que las ecuaciones paramétricas de la recta se ajustar perfectamente a nuestra descripción anterior:

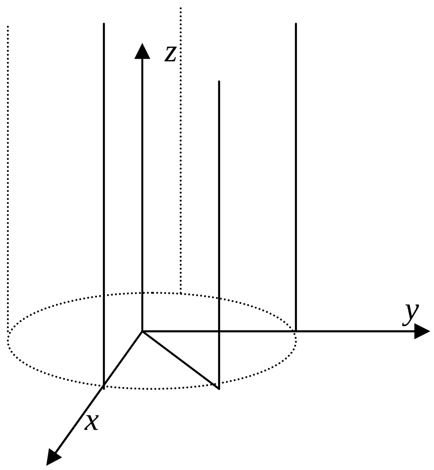
$$r:\begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases} \quad t \in \Re; \quad \vec{u} = (u_1, u_2, u_3) // r \quad \text{y} \quad P_0(x_0, y_0, z_0) \in r \quad t = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$

Otro ejemplo importante son las ecuaciones:

$$\Gamma:\begin{cases} x = a.\cos t \\ y = a.\operatorname{sen} t \quad t \in \Re; \qquad a, k \text{ son constantes} \\ z = k.t \end{cases}$$

Estas con las ecuaciones paramétricas de la hélice circular. Ella está contenida en el cilindro de generatriz paralela al eje *z*, de ecuación: $x^2 + y^2 = a^2$ que podemos obtener eliminando *t* de las dos primeras ecuaciones.

En este caso el parámetro representa el ángulo de giro sobre el plano *xy* a partir del eje positivo de las *x*. Si *t* aumenta en 2π reemplazando en las ecuaciones que las coordenadas *x* e *y* no varían (en efecto $\operatorname{sen} t = \operatorname{sen}(t + 2\pi); \cos t = \cos(t + 2\pi)$) pero en cambio la coordenada *z* aumenta en la cantidad $p = k(t + 2\pi) - k.t = 2\pi.k$ que es independiente de *t* y que recibe en nombre de paso de la hélice

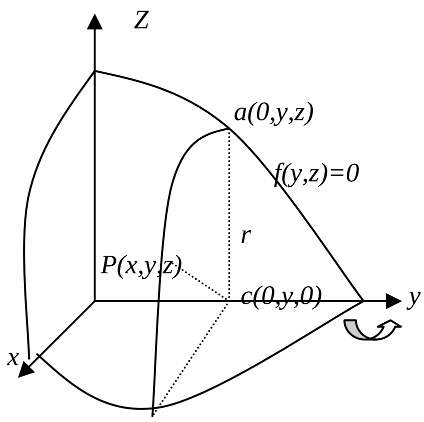


<u>Superficies de Revolución:</u>

Una superficie de revolución es la que se obtiene haciendo rotar una curva (**generatriz**) contenida en un plano alrededor de una recta del mismo plano, tal recta se llama eje de rotación.

Cada punto de la generatriz describe circunferencias contenidas en los planos normales al eje de rotación donde está el centro de las circunferencias y se denominan <u>paralelos</u> de la superficie. Los planos que contiene el eje de rotación, al cortar a la superficie forman los llamados <u>meridianos</u> .

Intentaremos hallar la ecuación de una superficie de revolución, para ello consideremos una curva en el plano *yz*. Cuya ecuación es *f(y,z)=0*, y consideraremos al eje *x* como eje



Si *A(0,y,z)* es un punto de la generatriz, al girar alrededor del eje *y* describe una circunferencia de centro *C(0,y,0)* y de radio $r = \left|\overrightarrow{CA}\right|$ que es la coordenada *z* del punto *A*.

Una vez que el punto, sobre la circunferencia al rotar se encuentra en la posición *P(x,y,z),*el radio en ese caso será $r = \left|\overrightarrow{CP}\right|$ .este análisis nos permite deducir que el radio puede expresarse como $r = \sqrt{x^2 + z^2}$

Queda entonces claro que al girar un punto fijo de la curva generatriz sobre la trayectoria de un paralelo la coordenada *y* no varía. Concluimos que las coordenadas de un punto genérico de una superficie de rotación *P(x,y,z)*, con la coordenada $z = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{x^2 + z^2}$ es decir, $f(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ es la **ecuación** de la superficie de rotación. Entonces, si la generatriz es una curva en el plano coordenado *yz* y gira alrededor del eje coordenado *y*, la ecuación de la superficie se obtiene reemplazando la coordenada *z* por $\sqrt{x^2 + z^2}$ en la ecuación de la curva generatriz.

Ejemplo 6:

Sea la curva $\gamma \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ la curva generatriz de una superficie de rotación

Si gira alrededor del eje *x*, entonces la ecuación de la superficie que obtenemos es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1 \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si gira alrededor del eje *z*, entonces la ecuación de la superficie que obtenemos es:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

En ambos casos obtenemos un elipsoide circular

Ejemplo 7

Encontrar la ecuación de la superficie generada por la curva: $\gamma \begin{cases} y^2 = 2pz \\ x = 0 \end{cases}$ cuyo eje de giro es el eje z. La ecuación de la superficie es: $x^2 + y^2 = 2pz$

Sería Ud. Capaz de graficar dicha superficie?

Ecuación general de segundo grado en dos variables:

Consideremos al siguiente ecuación :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Lz + M = 0 \quad \textbf{(3)}$$

Donde por lo menos uno de los coeficientes de los términos de segundo grado es distinto de cero. Nuestra intención es encontrar las condiciones que deben cumplirse para que la ecuación **(3)** represente una superficie, a la que denominaremos **superficie cuádrica.**

Superficies Esféricas

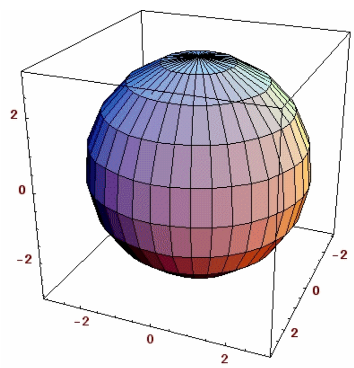
Sea *r* un número real positivo y sea *C(a,b,c)* un punto fijo del espacio, se llama esférica de centro *C* y radio *r* al lugar geométrico de puntos del espacio tal que la distancia al centro es igual *C* al radio *r*. Es decir:

$S = \{P(x,y,z) / \ d(P,C) = r\} = \{P(x,y,z) / (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2\}$

Decimos que la ecuación de la esfera es : $S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ **(4)**

luego podemos concluir que la ecuación de una esfera con centro en el origen es:

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



Observamos entonces, y refiriéndonos a la ecuación **(3)** que en este caso para que represente una esfera se deberá cumplir que: *A=B=C≠0* y además *D=E=F=0*

Ejemplo 8:

Sea la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z - 2 = 0$ indicar si es la ecuación de una superficie esférica, en tal caso dar las coordenadas de su centro y su radio.

Comencemos completando los cuadrados:

$$x^2 + 2x + y^2 - 4y + z^2 + 6z - 2 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 4y + 2 - 2 + z^2 + 6z + 9 - 9 - 2 = 0$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 2) - 2 + (z^2 + 6z + 9) - 9 - 2 = 0$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$$

Luego podemos decir que la ecuación indicada representa una esfera de centro en *C(-1,2,-3)* y radio *4*

Trataremos de encontrar las condiciones suficientes para que la ecuación del tipo **(3)** represente una superficie esférica. Por empezar tomaremos $A=B=C\neq 0$ y $D=E=F=0$

$Ax^2+Ay^2+Az^2+Gx+Hy+Lz+M=0$ dividiendo por A obtenemos

$x^2+y^2+z^2+\frac{G}{A}x+\frac{H}{A}y+\frac{L}{A}z+\frac{M}{A}=0$ completando cuadrados obtenemos

$(x+\frac{G}{2A})^2+(y+\frac{H}{2A})^2+(z+\frac{L}{2A})^2-\frac{G^2}{4A^2}-\frac{H^2}{4A^2}-\frac{L^2}{4A^2}+\frac{M}{A}=0$ o bien

$(x+\frac{G}{2A})^2+(y+\frac{H}{2A})^2+(z+\frac{L}{2A})^2=\frac{G^2+H^2+L^2-4AM}{4A^2}$ esta expresión representará una superficie esférica siempre que $\frac{G^2+H^2+L^2-4AM}{4A^2}>0$ que es la condición suficiente buscada.

<u>Elipsoide</u>

La ecuación general del elipsoide con centro en el origen es $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **(5)**

donde los números a,b,c son reales positivos

Analizamos la ecuación de la misma:

1) Simetrías:

   $(x,y,z)\in e \Leftrightarrow (-x,y,z)\in elipsoide$: es simétrica respecto al plano zy

   $(x,y,z)\in e \Leftrightarrow (x,-y,z)\in elipsoide$: es simétrica respecto al plano xz

   $(x,y,z)\in e \Leftrightarrow (x,y,-z)\in elipsoide$: es simétrica respecto al plano xy

   $(x,y,z)\in e \Leftrightarrow (-x,-y,-z)\in e$: es simétrica respecto al origen de coordenadas

2) Intersección con los ejes:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$$ A los puntos $A_1(-a,0,0)$ y $A_2(a,0,0)$ que son los de la intersección del elipsoide con el eje x se llaman **vértices del elipsoide** y al segmento $\overline{A_1A_2}$ cuya longitud es $2a$ se lo llama **semi-eje**

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b$$ A los puntos $B_1(0,-b,0)$ y $B_2(0,b,0)$ que son los de la intersección del elipsoide con el eje y se llaman **vértices** y al segmento $\overline{B_1B_2}$ cuya longitud es $2b$ se lo llama **semi-eje**

Intersección con los planos coordenados o lo que llamaremos **trazas o secciones principales**

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$ que representa una elipse de semi ejes $2b$ y $2c$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$$ representa una elipse de semi ejes *2.a* y *2.c*

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$$ que representa una elipse de semi ejes *2.a* y *2b*

Intersecciones con planos paralelos a los coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=h \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}$$ que representa una elipse

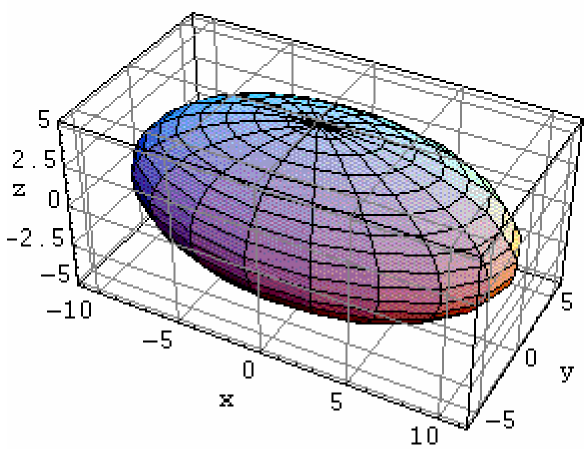
$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-h^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-h^2)}=1$$ siempre que $|h|<a$ puesto que para $h=\pm a$ se intercepta en los vértices $A_1(-a,0,0)$ y $A_2(a,0,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{k^2}{b^2}$$ representa una elipse

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2-k^2)}+\frac{z^2}{\frac{c^2}{b^2}(b^2-k^2)}=1$$ siempre que $|k|<b$,cuando $k=\pm b$ se intercepta en los vértices $B_1(0,-b,0)$ y $B_2(0,b,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=l \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{l^2}{c^2}$$ que representa una elipse de

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-l^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-l^2)}=1$$ siempre que $|l|<c$, cuando $l=\pm c$ se intercepta en los vértices $C_1(0,0,-c)$ y $C_2(0,0,c)$



Hiperboloide de una hoja:

Estudiemos la superficie de ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ **(6)**

donde los números *a,b,c* son reales positivos. Analizamos la ecuación de la misma:

Simetrías:

$(x,y,z)\in hiperboloide \Leftrightarrow (-x,y,z)\in hiperboloide$: es simétrica respecto al plano zy

$(x,y,z)\in hiperboloide \Leftrightarrow (x,-y,z)\in hiperboloide$: es simétrica respecto al plano xz

$(x,y,z)\in hiperboloide \Leftrightarrow (x,y,-z)\in hiperboloide$: es simétrica respecto al plano xy

$(x,y,z)\in hiperboloide \Leftrightarrow (-x,-y,-z)\in hiperboloide$: es simétrica respecto al origen de coordenadas

Intersección con los ejes:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1 \Rightarrow x=\pm a$$ A los puntos $A_1(-a,0,0)$ y $A_2(a,0,0)$ que son los de la intersección del hiperboloide con el eje x

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow y=\pm b$$ A los puntos $B_1(0,-b,0)$ y $B_2(0,b,0)$ que son los de la intersección del hiperboloide con el eje y

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\\ y=0\end{cases} \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2}=1$$ no tiene solución en el conjunto de los números reales

Intersección con los planos coordenados o lo que llamaremos **trazas o secciones principales**

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ que representa una hipérbola de vértices $B_1(0,-b,0)$ y $B_2(0,b,0)$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$ representa una hipérbola de vértices $A_1(-a,0,0)$ y $A_2(a,0,0)$

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ que representa una elipse de semi ejes *2.a* y *2b*

Intersecciones con planos paralelos a los coordenados:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=h \end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2} \quad \text{que representa una hipérbola}$$

$$\frac{y^2}{\frac{b^2}{a^2}(a^2-h^2)}-\frac{z^2}{\frac{c^2}{a^2}(a^2-h^2)}=1$$ siempre que $|h|>a$ puesto que para

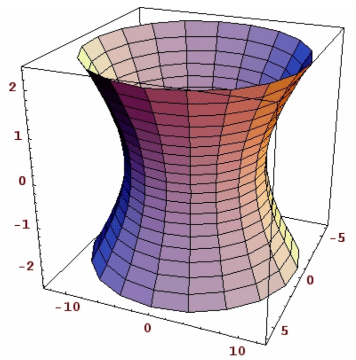
$h=\pm a$ se obtienen un par de rectas de ecuaciones $z=\pm\frac{c}{b}.y$; $x=\pm a$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=k \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2} \quad \text{representa una hipérbola}$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{b^2}(b^2-k^2)}-\frac{z^2}{\frac{c^2}{b^2}(b^2-k^2)}=1$$ siempre que $|k|>b$,cuando $k=\pm b$ se obtienen un par de rectas de ecuaciones $z=\pm\frac{c}{a}.x$; $y=\pm b$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ z=l \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{l^2}{c^2} \quad \text{que representa una elipse}$$

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2+l^2)}+\frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2+l^2)}=1 \quad \forall l \in \Re$$



Podemos decir también (y el estudio lo dejamos a cuenta del lector) que las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{y} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

también representan hiperboloides de una hoja.

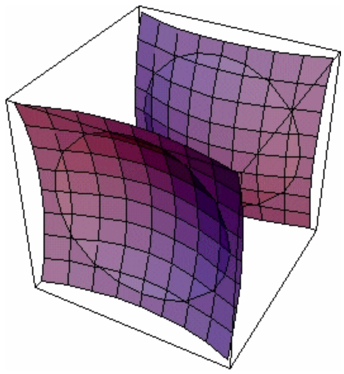
<u>Hiperboloide de dos hojas</u>

Estudiaremos la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

Donde *a*,*b*,*c* son números reales

Podemos afirmar que esta superficie es simétrica con respecto a cada uno de los ejes coordenados y del origen también. Los puntos del hiperboloide de dos hojas con el eje coordenado *x* son los puntos *(-a,0,0)* y *(a,0,0),* observamos también que no se intercepta con el eje *y* ni con el eje *z*. Las intersecciones con los planos coordenados *xz* e *yz* son respectivamente: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ con $z=0$ y también $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ con $y=0$

Que representan hipérbolas de igual semi-eje real. El hiperboloide de dos hojas no corta el plano *yz* puesto que no existe solución para la ecuación $-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ las secciones planas que se obtienen seccionando la superficie con planos de ecuación *x=h* son elipses si $|h|>a$; en caso contrario no hay intersección. Si $h=\pm.a$ se obtienen lo ya mencionados puntos de intersección con el eje *x* .Las intersecciones que se obtiene con planos de ecuaciones *y= k* son hipérbolas cuyos semi-ejes crecen al crecer *k* en valor absoluto. Ago parecido sucede con los planos de ecuaciones *z=l.*



Por otra parte las ecuaciones: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ como también $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Son ecuaciones de hiperboloides de dos hojas.

<u>Paraboloide elíptico</u>

Estudiaremos la ecuación: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.c.z$ con $c\in\Re^+$

En el estudio de las simetrías podemos observar que esta superficie es simétrica respecto del plano *yz* como también del plano *xz* pero no del plano *xy*. Además es simétrica solamente respecto del eje *z*. Por lo tanto no es simétrica respecto al origen de coordenadas. El paraboloide es una superficie que contiene al origen como uno de sus puntos, pero no intercepta a los ejes en ningún otro punto. Sus intersecciones con los planos coordenados son: $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0\\ z=0\end{cases}$ sobre el plano *xy* representa el origen $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}=2.c.z\\ x=0\end{cases}$ representa una parábola

$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}=2.c.z\\ y=0\end{cases}$ representa una parábola.

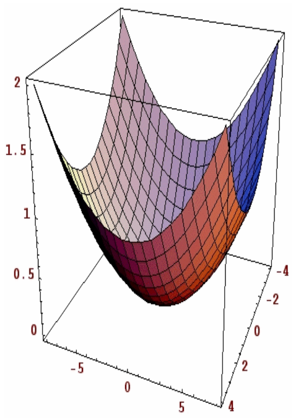
Las intersecciones con planos paralelos a los coordenados pueden ser:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2.c.h \\ z=h \end{cases}$$ representan elipses de ecuación $\dfrac{x^2}{2a^2c.h}+\dfrac{y^2}{2b^2c.h}=1$ si c y h son del mismo signo. De lo contrario no representa ninguna curva.

Si $c<0$ la superficie está íntegramente sobre el plano xy . Si $c<0$, estará por debajo.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{k^2}{b^2}=2.c.z \\ y=k \end{cases}$$ representan parábolas de distintos vértices dependiendo del valor del número k .

$$\begin{cases} \dfrac{l^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2.c.z. \\ x=l \end{cases}$$ representan parábolas de distintos vértices dependiendo del valor del número l



Diremos además que las ecuaciones: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=2.c.y$; $\dfrac{z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2.c.x$

También representan paraboloides elípticos.

Además en el caso en que $a= b$ es el llamado paraboloide circular, y es fácil deducir que es también una superficie de rotación.

Paraboloide hiperbólico

En este caso estudiaremos la ecuación: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2.c.z$ con $c\in\Re^+$

En el estudio de las simetrías podemos observar que esta superficie es simétrica respecto del plano yz como también del plano xz pero no del plano xy. Además es simétrica solamente respecto del eje z. Por lo tanto no es simétrica respecto al origen de coordenadas.

El paraboloide hiperbólico es una superficie que contiene al origen como uno de sus puntos. Sus intersecciones con los planos coordenados son: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \\ z=0 \end{cases}$ sobre el plano xy representa las rectas $y=\pm\dfrac{a}{b}x$; $\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}=2.c.z \\ x=0 \end{cases}$ representan parábolas

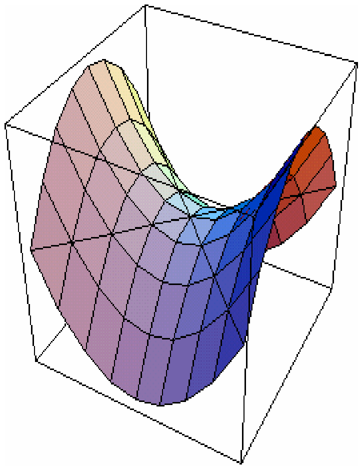
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}=2.c.z \\ y=0 \end{cases}$$ representan parábolas .

Las intersecciones con planos paralelos a los coordenados pueden ser:

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2.c.h \\ z = h \end{cases}$ representan hipérbolas de ecuación $\dfrac{x^2}{2a^2c.h} - \dfrac{y^2}{2b^2c.h} = 1$.

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{k^2}{b^2} = 2.c.z \\ y = k \end{cases}$ representan parábolas de distintos vértices dependiendo del valor del número k.

$\begin{cases} \dfrac{l^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2.c.z. \\ x = l \end{cases}$ representan parábolas de distintos vértices dependiendo del valor del número l



Diremos además que las ecuaciones: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 2.c.y$; $\dfrac{z^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2.c.x$ también representan paraboloides hiperbólicos.

Es posible que un paraboloide hiperbólico sea una superficie de rotación?