FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, INGENIERÍA Y AGRIMENSURA
ESCUELA DE FORMACIÓN BÁSICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ALGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

Ecuación General de Segundo Grado

Patricia Có
Mariel Ugarte

-2018-

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

1. Introducción

Hasta ahora hemos visto que cualquier sección cónica con ejes paralelos a los ejes coordenados, se puede representar mediante una ecuación de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1)$$

donde ***B* = *0*.** Además toda ecuación de segundo grado con ***B* = *0*** representa una cónica propiamente dicha cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados, o de tipo degenerada (una o dos rectas, un punto o el conjunto vacío).

En esta sección analizaremos qué representan las ecuaciones del tipo (1) cuando **el coeficiente B**, (coeficiente del término rectangular) **es no nulo.**

Sabemos que hay dos tipos principales de problemas que se tienen que abordar en Geometría analítica plana:

i) Dada una curva como lugar geométrico, hallar la ecuación cartesiana que la representa analíticamente.

ii) Dada una ecuación cartesiana reconocer el lugar geométrico que representa.

Vamos a considerar el problema ii): dada una ecuación de segundo grado de la forma (1), queremos determinar el lugar geométrico que representa, sus características principales y su representación gráfica.

Recordemos que si B = 0 en (1) tenemos cuatro posibilidades:

- Ningún punto (x, y) satisface (1). Un ejemplo es la ecuación $x^2 + y^2 + 5 = 0$.
- Un sólo punto satisface (1). Por ejemplo la ecuación $3x^2 + 2y^2 = 0$ se satisface sólo para $(x, y) = (0,0)$.
- La gráfica de los puntos que satisfacen la ecuación consiste en una o dos rectas. Por ejemplo, la ecuación $(3x + 2y + 5)^2 = 0$ representa una recta, a ecuación $x^2 - 4y^2 = 0$ representa *dos rectas secantes*, (puesto que se satisface si $x - 2y = 0$, o $x + 2y = 0$), y la ecuación $x^2 = 4$ representa *dos rectas paralelas.*
- La gráfica de los puntos que satisfacen la ecuación es una cónica propiamente dicha, que se reconocerá completando cuadrados en *x* e *y*, lo que permite transformar la ecuación (1) a una de las formas reducidas antes estudiadas.

Los distintos casos planteados pueden resumirse en el siguiente cuadro:

AC	Cónica	Casos degenerados
0	Parábola	Una recta (dos rectas coincidentes) Dos rectas paralelas Conjunto vacío
+	Elipse	Circunferencia Punto Conjunto vacío
-	Hipérbola	Dos rectas secantes

Además, en el caso de tratarse de una cónica con centro de simetría los términos de primer grado ***D x*** y ***E y*** determinan la posición del mismo. Esto es:

- si $\boldsymbol{D = E = 0}$ la cónica tiene su centro en el origen.

- en otro caso la posición del centro se puede obtener completando cuadrados.

A continuación vamos a ver cómo trabajar la ecuación general de segundo grado cuando $\mathbf{B \neq 0}$.

2. Rotación de ejes en el plano

Si en un sistema cartesiano ortogonal *Oxy* giramos los ejes un ángulo agudo θ en sentido antihorario, se obtiene un nuevo sistema de coordenadas *OXY*, como muestra la figura 1.

Todo punto ***P*** de coordenadas ***(x,y)*** en el sistema original *Oxy*, tiene coordenadas ***(X, Y)*** en el nuevo sistema *OXY*.

Si *r* es la distancia de *O* a *P* (medida del vector $\overline{OP}$) y φ es el ángulo que el vector $\overline{OP}$ forma con el nuevo eje ***X***, al considerar los dos triángulos rectángulos OPQ y OPR (figura 2), se establecen las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\,sen\,\theta \end{cases} \quad (2) \qquad\qquad \begin{cases} x = r\cos(\theta+\varphi) \\ y = r\,sen(\theta+\varphi) \end{cases} \quad (3)$$

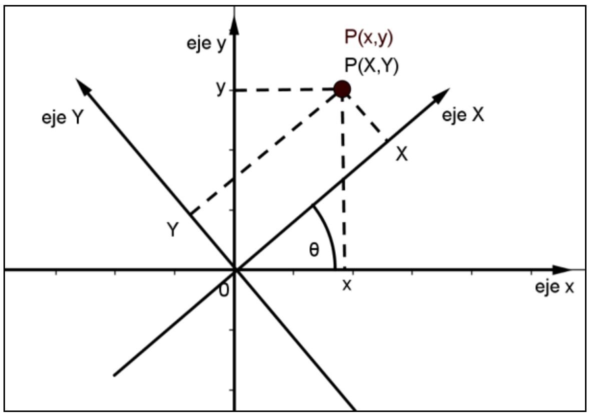


Figura 1

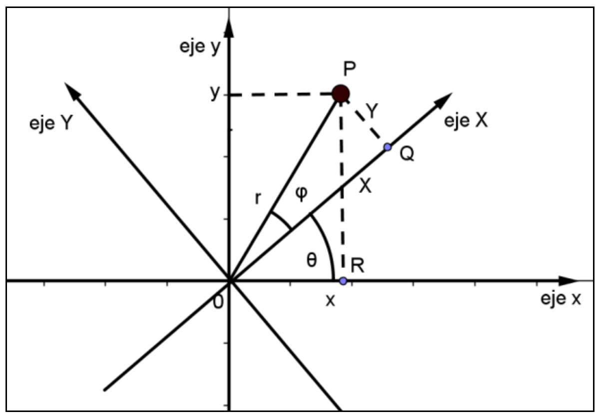


Figura 2

Usando en (3) las fórmulas de Adición para Cosenos y Senos, llegamos a:

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta+\varphi) = \\ &= r(\cos\theta\cos\varphi - sen\,\theta\,sen\varphi) = \\ &= (r\cos\theta)\cos\varphi - (r\,sen\,\theta)\,sen\varphi = \\ &= X\cos\varphi - Y\,sen\,\varphi \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} y &= r\,sen(\theta+\varphi) = \\ &= r(sen\,\theta\cos\varphi + \cos\theta\,sen\varphi) = \\ &= (r\,sen\,\theta)\cos\varphi + (r\,sos\,\theta)\,sen\varphi = \\ &= X\,sen\,\varphi + Y\cos\varphi \end{aligned}$$

Obteniendo las expresiones $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\,sen\theta \\ y = X\,sen\,\theta + Y\cos\theta \end{cases}$ (4) para *x* e *y* en términos de *X* e *Y*, que indican cómo hallar *x* e *y* cuando se conocen *X* e *Y*.

Despejando de (4) *X* e *Y* en términos de *x* e *y* se obtiene las relaciones inversas: $\begin{cases} X = x\cos\theta + y\,sen\,\theta \\ Y = -x\,sen\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$ (5)

Resumiendo:

Ecuaciones de rotación de ejes

Si en un sistema cartesiano ortogonal *Oxy* giramos los ejes un ángulo agudo θ en sentido antihorario, se obtiene un nuevo sistema de coordenadas *OXY*. Las coordenadas *(x,y)* y *(X,Y)* de un punto P están relacionadas mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\,sen\,\theta \\ y = X\,sen\,\theta + Y\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} X = x\cos\theta + y\,sen\,\theta \\ Y = -x\,sen\,\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Un sistema de coordenadas cartesianas se rota 60º. Hallar las coordenadas del punto *P(3, -1)* en el nuevo sistema. ¿Qué coordenadas tiene el sistema original un punto *Q* cuyas coordenadas en el sistema rotado son (- $\sqrt{3}$, 1).

Para encontrar las coordenadas del punto *P* en el sistema rotado utilizamos las ecuaciones (6):

$$\begin{cases} X = x\cos 60^{o} + y\,sen\,60^{o} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{1}{2}3 + \frac{\sqrt{3}}{2}(-1) = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ Y = -x\,sen\,60^{o} + y\cos 60^{o} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{\sqrt{3}}{2}3 + \frac{1}{2}(-1) = \frac{-3\sqrt{3}-1}{2} \end{cases} \quad , \quad P(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\sqrt{3}-1}{2}) \ .$$

Para encontrar las coordenadas del punto *Q* en el sistema original utilizamos las ecuaciones (5):

$$\begin{cases} x = X\cos 60^{o} - Y\,sen\,60^{o} = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \\ y = X\,sen\,60^{o} + Y\cos 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y = \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = -1 \end{cases} \quad , \quad Q(-\sqrt{3},1)$$

Ejemplo 2:

Determina la representación de la ecuación $x^2 - xy + y^2 - 2 = 0$ después de rotar los ejes 45º. Traza la curva resultante.

Como sen 45º = cos 45º = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, remplazando en las ecuaciones (5) : $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$

Sustituyendo en la ecuación general (1):

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2 - \frac{1}{2}(X^2 - Y^2) + \frac{1}{2}(X+Y)^2 - 2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[X^2 - 2XY + Y^2 - X^2 + Y^2 + X^2 + 2XY + Y^2\right] = 2$$

$$X^2 + 3Y^2 = 4$$

resultando la ecuación de una elipse.

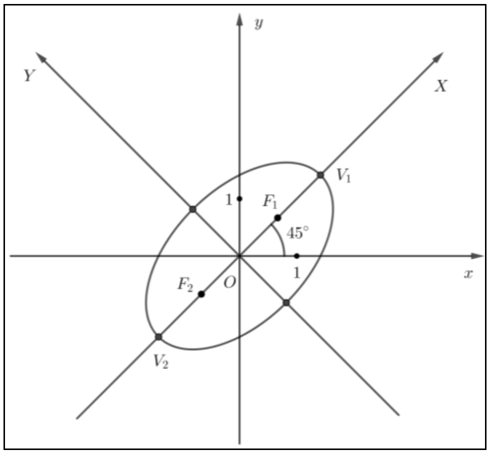


Figura 3

3. La Ecuación general de segundo grado

Al iniciar este tema dijimos que cualquier sección cónica con ejes paralelos a los ejes coordenados, se puede representar mediante una ecuación de segundo grado en donde ***B = 0***. Además, toda ecuación de segundo grado con ***B = 0*** representa una cónica propiamente dicha con ejes son paralelos a los coordenados o de tipo degenerada. Veremos ahora que cualquier ecuación de segundo grado con término rectangular no nulo (***B*** $\neq$ ***0)***, puede ser llevada mediante una rotación de ejes a una de las formas ya conocidas.

A los efectos de eliminar el término rectangular veremos cómo calcular el ángulo $\boldsymbol{\theta}$ de rotación apropiado.

Teorema 1: *Rotación de ejes para eliminar el término rectangular.*

La ecuación (1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

puede reescribirse como:

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

girando los ejes coordenados un ángulo $\boldsymbol{\theta}$ $(0^o < \theta < 90^o)$ donde:

$$ctg\ \ 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

Demostración. Sustituyendo los valores x, y dados en (5) en la ecuación (1) y agrupando términos, llegamos a:

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde:

$$A' = A\cos^2\theta + B\cos\theta\ \ sen\,\theta + C\ sen^2\theta$$
$$B' = 2(C - A)\,sen\theta\ \ \cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta)$$
$$C' = A\ sen^2\theta - B\cos\theta\ sen\,\theta + C\cos^2\theta$$
$$D' = D\cos\theta + E\ sen\theta$$
$$E' = -D\ sen\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$

Para eliminar el término *XY* debemos seleccionar $\boldsymbol{\theta}$ de manera que $B' = 0$, entonces:

$$B' = 2(C - A)\,sen\theta\ \ \cos\theta + B(\cos^2\theta - sen^2\theta) = (C - A)\ sen\,2\theta + B\cos 2\theta = 0$$

Luego, $B\cos\ 2\theta = (A\text{-}C)\ sen\ 2\theta$

Finalmente: $\dfrac{\cos 2\theta}{sen\,2\theta} = ctg\,2\theta = \dfrac{A-C}{B}$, con lo que queda demostrado el teorema.

Podemos concluir que:

Si $B = 0$, el término rectangular no está presente y no se necesita rotación.

Si B $\neq 0$, para eliminar el término rectangular bastará elegir el ángulo θ que verifique:

$$ctg\,2\theta = \frac{A-C}{B}, \quad 0^{\circ} < \theta < 90^{\circ} \qquad (6)$$

Observemos que:

- si $\boldsymbol{A = C}$,

$$ctg\,2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow 2\theta = 90^{\circ} \Rightarrow \theta = 45^{\circ}.$$

- si $\boldsymbol{A \neq C}$,

$$tg\,2\theta = \frac{B}{A-C}$$

El próximo paso es encontrar los valores exactos del sen θ y cos θ, hallando previamente el cos 2 θ. Esto es:

$$\boxed{\cos 2\boldsymbol{\theta} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tan^{2} 2\boldsymbol{\theta}}}}$$

Como 0º < $2\boldsymbol{\theta}$ <180º, **los signos de cos $2\boldsymbol{\theta}$ y tan $2\boldsymbol{\theta}$ debe ser iguales**. Por último, de acuerdo con las fórmulas de mitad de ángulo:

$$sen\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

haciendo x = $2\boldsymbol{\theta}$, y teniendo en cuenta que $0^{\circ} < \theta < 90^{\circ}$, se tiene que:

$$\boxed{sen\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}}$$

Identidades que se emplearán en las ecuaciones de rotación (4): $\begin{cases} x = X\cos\theta - Y sen\,\theta \\ y = X\,sen\,\theta + Y\cos\theta \end{cases}$

Teorema 2: Invariantes bajo rotación

Si mediante un giro de ejes, la ecuación $Ax^{2} + Bxy + Cy^{2} + Dx + Ey + F = 0$ se transforma en la ecuación $A'X^{2} + B'XY + C'Y^{2} + D'X + E'Y + F' = 0$, entonces:

i) $F = F'$ ii) $A + C = A' + C'$ iii) $B^{2} - 4AC = (B')^{2} - 4A'C'$

Esto es: $F, A+C, B^{2} - 4AC$ **son invariantes bajo una rotación.**

Teorema 3: La ecuación (1) representa a una hipérbola, una elipse o una parábola (o es el caso degenerado de una de ellas), de acuerdo con el valor de $B^{2} - 4AC$, como indica la siguiente tabla:

$B^2 - 4AC$	**Ecuación tipo**	**Lugar geométrico**
0	**Parabólica**	**Parábola** **Una recta (dos rectas coincidentes)** **Dos rectas paralelas** **Conjunto vacío**
-	**Elíptica**	**Elipse** **Circunferencia** **Punto** **Conjunto vacío**
+	**Hiperbólica**	**Hipérbola** **Dos rectas secantes**

Ejemplo 3: Realiza una rotación de los ejes para eliminar el término *x y* de la ecuación $x^2 + 4xy - 2y^2 - 6 = 0$. Representa gráficamente.

Como $\boldsymbol{B^2 - 4AC}$ = 16 + 8 > 0, se trata de una cónica de tipo hiperbólica. Buscamos el ángulo de rotación:

$$ctg\,2\theta = \frac{1-(-2)}{4}; \qquad tg\,2\theta = \frac{4}{3}\ ; \qquad \cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}} = \frac{3}{5};$$

$$sen\,\theta = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Las ecuaciones de rotación son: $\begin{cases} x = \dfrac{2X - Y}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{X + 2Y}{\sqrt{5}} \end{cases}$, que sustituir en la ecuación original, obtenemos: $2X^2 - 3Y^2 = 6$

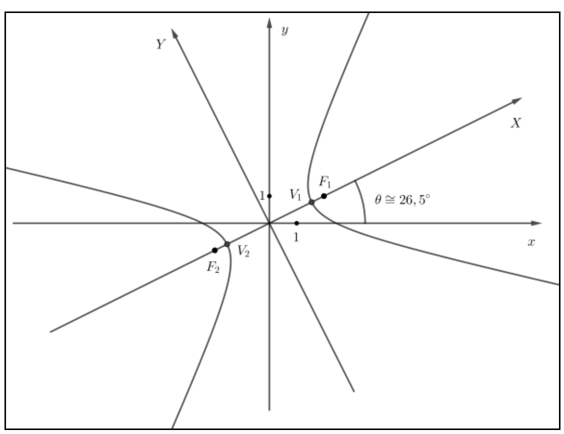


Figura 4

Ejemplo 4: Identifica el lugar geométrico que describe la ecuación *x y = 1* realizando una adecuada rotación de ejes. Representa gráficamente.

Como $A = 0$, $B = 1$ y $C = 0$, la ecuación es de tipo hiperbólica y como $A = C$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Por lo tanto:

$$x = X\cos\frac{\pi}{4} - Y\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{X - Y}{\sqrt{2}}$$
$$y = X\ \mathrm{sen}\frac{\pi}{4} + Y\cos\frac{\pi}{4} = X\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{X + Y}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación $x\,y = 1$, resulta:

$$\left(\frac{X - Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X + Y}{\sqrt{2}}\right) - 1 = 0, \quad \text{de donde } \frac{X^2 - Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - 1 = 0,$$

O equivalentemente $\dfrac{X^2}{2} - \dfrac{Y^2}{2} = 1$, que es la forma canónica de la ecuación de una hipérbola centrada en el origen con vértices en los puntos de coordenadas $\left(\pm\sqrt{2}\,,\,0\right)$ en el sistema *OXY*.

Para hallar las coordenadas de los vértices en el sistema *Oxy*, sustituimos las coordenadas *OXY* en las ecuaciones: $\begin{cases} x = \dfrac{X - Y}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{X + Y}{\sqrt{2}} \end{cases}$, con lo que vemos que los vértices son los puntos (1, 1) y (-1, -1) en el sistema *Oxy*.

Notemos también que las asíntotas de la hipérbola son las rectas de ecuaciones $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes *x, y* en el sistema original.

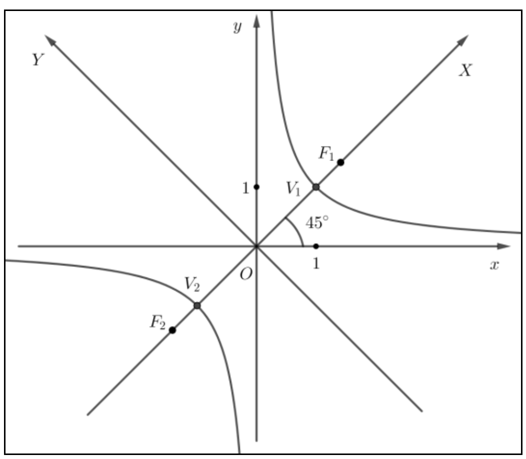


Figura 5

Ejemplo 5: Identificar el lugar geométrico que representa la ecuación $2x^2 - x\,y + 2y^2 - 2 = 0$. Dar sus elementos característicos (en el sistema original) y representar gráficamente.

Como $\boldsymbol{B^2 - 4\,A\,C}$ = 1- 4. 2. 2 < 0, se trata de una cónica de tipo elíptica. Como $A = C$, sabemos que el ángulo de rotación es de 45º, y las ecuaciones de rotación son las mismas que las del ejemplo anterior. Por lo la ecuación resultante es:

$$\frac{X^2}{4/3}+\frac{Y^2}{4/5}=1$$

De donde $A^2 = 4/3$ y $B^2 = 4/5$. Con lo que $C^2 = 4/3 – 4/5 = 8/15$
Haciendo los cálculos:

- focos en el sistema *O Y*: $F_1\left(2\sqrt{2}/\sqrt{15},0\right)$ y $F_2\left(-2\sqrt{2}/\sqrt{15},\ 0\right)$
- vértices en el sistema *OXY* : $V_1\left(2/\sqrt{3},\ 0\right)$ y $V_2\ \left(-2/\sqrt{3},\ 0\right)$

Utilizando las ecuaciones (5) tenemos:

- focos en el sistema *Oxy*: $F_1\left(2/\sqrt{15},\ 2/\sqrt{15}\right)$ y $F_2\left(-2/\sqrt{15},\ -2/\sqrt{15}\right)$
- vértices en el sistema *Oxy* : $V_1\left(\sqrt{2}/\sqrt{3},\ \sqrt{2}/\sqrt{3},\right)$ y $V_2\ \left(-\sqrt{2}/\sqrt{3},-\sqrt{2}/\sqrt{3},\right)$

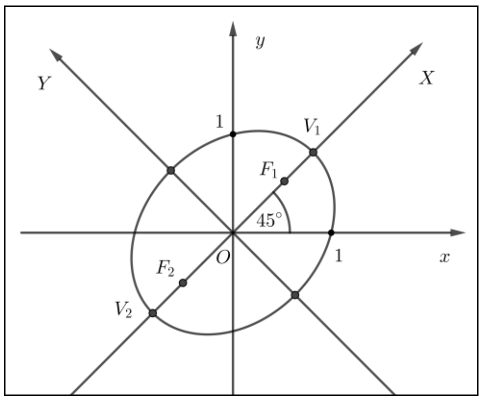


Figura 6

4. Actividades

1. En los siguientes ejercicios clasifica la ecuación dada. Realiza una adecuada rotación de ejes para eliminar el término rectangular. Halla en ambos sistemas de ejes coordenados: vértices, focos, asíntotas y directriz (según corresponda). Representa gráficamente.

$a)\ x^2-10xy+y^2+1=0$

$b)\ 5x^2-2xy+5y^2-12=0$

$c)\ 3x^2-2\sqrt{3}\ xy+y^2+2x+2\sqrt{3}\ y=0$

$d)\ xy+1=0$

$e)\ 16x^2-24xy+9y^2-30x-40y=0$

$f)\ 6\sqrt{3}x^2+6xy+4\sqrt{3}y^2=21\sqrt{3}$

$g)\ xy-2y-4x=0$

$h)\ 64x^2+96xy+36y^2-15x+20y-25=0$

$i)\ x^2+2\sqrt{3}xy-y^2+2=0$

$j)\ x^2+xy+y^2-4x-4y+8=0$

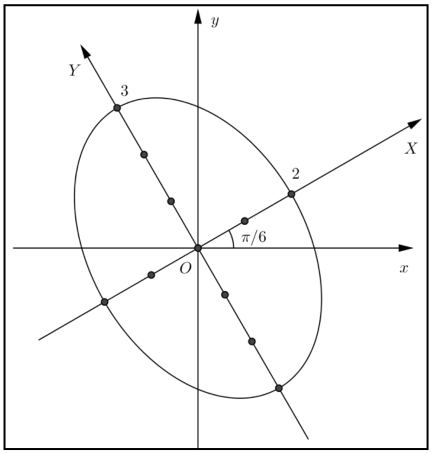
$k)\ 8x^2-4xy+5y^2=36$

$l)\ x^2+2\sqrt{3}xy+y^2=0$

$m)\ x^2-xy+y^2+2x-4y+5=0$

2. Analiza si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
"La ecuación $x^2-2xy+y^2-4x-4y+4=0$ representa el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto $F(1,1)$ y de la recta $y=-x$."

3. Halla la ecuación de la elipse de la figura, en el sistema Oxy. Determina las coordenadas de sus vértices y focos, en el sistema Oxy.



4. Realizando en el sistema Oxy una rotación en sentido antihorario de un ángulo $\frac{\pi}{3}$, se obtiene el sistema coordenado OXY. La ecuación $Y^2 = -8X$ representa a la parábola Ƥ en el sistema OXY.

a) Esboza la gráfica de Ƥ.

b) Encuentra las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz en el sistema Oxy.

c) Halla la ecuación de *P* en el sistema Oxy.