



Primeras Jornadas de Educación Matemática

Instituto Politécnico Superior “Gral. San Martín”

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura

Universidad Nacional de Rosario

Algunas historias de la Matemática

Dirce Braccialarghe
dirce@fceia.unr.edu.ar

“Entre las ciencias, la Matemática tiene una situación singular y paradójica. Es sin duda, la obra que el espíritu humano ha desarrollado más, mediante sus propias fuerzas, y que testimonia mejor su estructura funcional. Por contraste, en verdad sorprendente, es una disciplina que parece ajena a un número demasiado grande de inteligencias. De esta manera, una creación esencialmente humana aparece a muchos hombres como inhumana, hasta deshumanizante.”

Profesor Willy Servais (1913-1979), conferencia “Humanización de la enseñanza de la matemática”, pronunciada en las Jornadas de Rennes, organizadas por la Asociación de Profesores de Matemática de Francia, setiembre de 1976.

La Matemática debería ser considerada por nuestros alumnos como la más humana de las ciencias. ¿Es esto lo que ellos piensan?

La Matemática, a lo largo de la historia de la humanidad, aparece como la principal herramienta para idealizar la complejidad de los fenómenos de la naturaleza y de las actividades humanas. Nuestros alumnos, ¿reconocen este aspecto de ella?

Para que nuestros alumnos puedan apreciarla como un proceso de construcción humana, lento y laborioso, tenemos a nuestro alcance una fabulosa herramienta: su historia.

La utilización de elementos de la historia de la Matemática, a la hora de preparar nuestras clases, podría facilitar el aprendizaje de ciertos temas, aclarar conceptos, promover el interés por la disciplina y la amenidad en sus estudios. También podría permitir obtener la atención del alumno, enriquecer el estudio e incluso dar cabida a una matemática “más entretenida”.

No se trata de desarrollar un curso de Historia de la Matemática en nuestras clases. Cualquier tema, por más sencillo que parezca, puede ser introducido recurriendo a anécdotas o a la presentación del desarrollo histórico del mismo. Invitemos a nuestros alumnos, aunque sea de vez en cuando, a realizar un viaje por la historia de la Matemática.

En este taller trabajaremos con un tema simple, el número π , como “excusa” para ponernos a pensar y reflexionar, demostrar y resolver cuestiones matemáticas.

El número π

Parece un problema simple. Construye un cuadrado que cubra la misma área de un círculo usando solamente una regla y un compás. ¿Qué dificultad podría existir? Durante 2000 años pareció natural creer que el ser humano podría lograrlo. Como veremos se estaba en presencia de una ilusión.

Pi:

1. La decimosexta letra del alfabeto griego (π , Π) equivalente a nuestra p.
2. Mat. la letra π usada como símbolo de la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro [*etim.* pi, usada en matemática para representar la palabra griega *periphérion*, periferia, perímetro]

Infancia de π

Civilización egipcia

La mayor parte de la información matemática egipcia se debe a un cierto número de papiros que han conseguido sobrevivir a los estragos del tiempo durante más de tres milenios y medio.

El papiro más extenso, de los que contienen información matemática, es un rollo de unos 30 cm de alto y casi 6 m de largo conocido como el Papiro Rhind. Este papiro fue comprado en 1858 en Luxor, una ciudad comercial egipcia, por el anticuario escocés H. Rhind (de allí su nombre). También es conocido con el menos frecuente nombre de Papiro de Ahmes, denominación que hace referencia al escriba que lo copió hacia el 1650 a.C. quien nos dice que el material se deriva de otro datado entre el 2000 y el 1800 a.C. Este escrito contiene fundamentalmente problemas aritméticos, algebraicos y de medición de figuras geométricas y sus “soluciones”.

El historiador griego Herodoto (484-425 a.C.) nos cuenta que el hecho de que todos los años, en ocasión del desbordamiento del Nilo, se borrarán las lindes de los campos fue el que acentuó la necesidad de los agrimensores egipcios de resolver problemas de medición de terrenos. Si el terreno tiene la forma de un triángulo isósceles, el problema 51 del Papiro de Ahmes establece cómo calcular su área: tomar la mitad de lo que nosotros llamaríamos la base y multiplicarla por la altura. Ahmes justifica este método sugiriendo que al triángulo isósceles se lo puede pensar formado por dos triángulos rectángulos que ubicados adecuadamente forman un rectángulo.

El método egipcio para hallar el área del círculo se ha venido considerando desde hace mucho tiempo como uno de los progresos más notables de la época. En el problema 50 el escriba Ahmes

admite que *el área de un campo circular de 9 unidades de diámetro es la misma que el área de un cuadrado de 8 unidades de lado.*

Actividad 1: Halle el valor que se asignaba a π .

No existen indicios que permitan suponer que Ahmes fuera consciente de que las áreas de su círculo y su cuadrado no eran exactamente iguales. Justamente, el hecho de no realizar una distinción clara entre las relaciones que son exactas y las que son sólo aproximadas es un defecto importante de la geometría egipcia.

Sin embargo, sorprende la regla que utilizaban para hallar la longitud de una circunferencia:

El área de un círculo es a la longitud de su circunferencia como el área del cuadrado circunscrito es a su perímetro.

Esta regla representa una relación geométrica de una importancia matemática y de una precisión mucho mayores que la de la relativamente buena aproximación de π .

El descubrimiento por parte de los egipcios de relaciones entre figuras geométricas, frecuentemente, se ha pasado por alto y es precisamente en este punto donde llegaron a aproximarse en su actitud a la de sus ilustres sucesores griegos.

Otro aspecto de esta civilización que, sin lugar a dudas, ha maravillado al mundo es el que tiene que ver con las magníficas construcciones edilicias. Las pirámides muestran un grado tan elevado de precisión, tanto en su construcción misma como en su orientación, que en torno a ellas se han desarrollado leyendas infundadas. Herodoto nos cuenta que la pirámide de Giza fue construida en modo tal que *el área de cada cara lateral fuese igual al área de un cuadrado de lado igual a la altura de la pirámide.* Teniendo presente esta condición resulta que:

El largo del lado de la base es a la altura de la pirámide aproximadamente como π es a 2.

Actividad 2: Compruebe esta afirmación.

π y la Biblia

La Biblia nos proporciona información muy clara sobre el valor de π . En el Antiguo Testamento I Reyes, 7:23, leemos a propósito del altar construido en el templo de Salomón:

“Hizo luego un mar de fundición, de diez codos (codo = 0,444 m) de un borde al otro, redondo, de diez codos de alto y rodeado de un cordón de treinta codos.”

Este enorme recipiente llamado “mar” estaba destinado a contener el agua para los Sacerdotes.

En II Crónicas 4:2 podemos leer:

“Hizo el mar de metal fundido, enteramente redondo, de diez codos de diámetro y cinco codos de alto, un cordón de treinta codos lo ceñía en derredor;...”

Según los historiadores este texto fue probablemente escrito alrededor del siglo VI a.C.

Actividad 3: Halle el valor que aquí se asignaba a π .

Civilización griega

Después de que en Egipto el escriba Ahmes registró sus formulaciones, por cientos de años, nadie se dedicó a reflexionar sobre la medición del área de un círculo. El valor considerado para lo que hoy conocemos como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro era suficientemente bueno a los fines de la agrimensura y de la construcción de edificios. El estudio de la medida del área del círculo fue retomado con renovado empeño en el siglo IV a.C. por los griegos pero ya no con la intención de obtener fórmulas para la medición de terrenos sino con el propósito de explorar ideas. En este sentido, encontramos, por ejemplo, en el libro XII de los Elementos de Euclides (~300 a.C.) la proposición número 2 que establece:

La razón entre las áreas de dos círculos es igual a la razón entre los cuadrados de sus diámetros.

Este resultado fue enunciado por Hipócrates de Chios (470?- ? a.C.) y probablemente demostrado por Eudoxio (408-335 a.C.).

Actividad 4: Busque la demostración en:

<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html>

<http://www.euclides.org>

Otro matemático griego que se preocupó por el cálculo del área del círculo fue Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.). En su tratado “La medida del círculo” formada por sólo tres teoremas establece los siguientes resultados:

Teorema I: *El área de un círculo es igual al área de un triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio y la longitud de la circunferencia.*

$$\text{Teorema III: } 3 + \frac{10}{71} < \frac{\text{long}(C)}{D} < 3 + \frac{10}{70}$$

Arquímedes hizo uso del método de exhaustión utilizando polígonos inscriptos y circunscriptos en el círculo.

Observemos que una consecuencia del Teorema I es una admirable confirmación de que las constantes que ligaban la longitud de la circunferencia con el diámetro, y el área del círculo con el cuadrado del radio, eran la misma (¡El número π !).

Con respecto al Teorema III debe tenerse en cuenta que ningún matemático griego utilizó nunca ni nuestra notación π ni la idea de un número como razón de la longitud de la circunferencia al diámetro de un círculo. También cabe aclarar que ningún matemático griego anterior a Arquímedes se interesó tampoco por el cálculo de π . Especialmente significativa es la ausencia del mismo en los Elementos de Euclides. Las aproximaciones por defecto y por exceso conseguidas por Arquímedes,

$$3,14084507 < \pi < 3,14285714$$

servirían cumplidamente a las necesidades prácticas del cálculo durante muchos siglos.

Actividad 5: Demuestre el Teorema I.

En aquella época, además de estas buenas aproximaciones, otros valores fueron utilizados para aproximar el valor de π . Por ejemplo, Herón de Alejandría (75 d.C.) usó la aproximación $3\frac{1}{7}$

y Ptolomeo (150 d.C.) usó $3\frac{17}{120}$, lo cual se escribía en aquel tiempo como $3^\circ 8' 30''$, que

significa $3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$ en el sistema de numeración en base 60 que se utilizaba entonces.

Adolescencia de π

Comenzó así una larga historia de cálculo de cifras de π con el propósito de hallar cierta regularidad en sus cifras. Con el método de exhaustión se siguieron calculando más y más cifras exactas para π . En el siglo V, en China, el astrónomo Tsu Ch'ung-chih, utilizando polígonos inscritos obtuvo el valor $\frac{355}{113}$. En 1579, F. Viète (1540-1603) consideró polígonos inscritos y circunscriptos de 393.216 lados y encontró una forma de escribir π como el producto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \dots$$

Cuando el matemático alemán Ludolph van Ceulen (1540-1610) murió, había calculado 35 cifras decimales exactas de π . Es por esto que en Alemania también se conoce a π como el número ludolfiano.

En el 1621 el matemático holandés W. Snell movido por el interés de encontrar una forma más eficiente de realizar los cálculos desarrolló una técnica basada más en la inteligencia que en la resistencia. Mientras sus predecesores por conseguir una mejor aproximación de la longitud de la circunferencia habían, cada vez, duplicado el número de lados de un polígono, Snell encontró una aproximación mejor utilizando el mismo número de lados. Simplemente inscribiendo y circunscribiendo un hexágono en un círculo se puede demostrar que π está comprendido entre 3,14022 y 3,14160. Su valor era más exacto que el de la aproximación de Arquímedes que había utilizado polígonos de 96 lados.

Actividad 6: Analizar el método utilizado por Snell expuesto en:

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/argoment/appunti/testi/Apr_03/appunti.htm

Edad madura de π

Con el advenimiento del cálculo infinitesimal (siglo XVII) se desarrollaron una gran variedad de métodos infinitos que proporcionaron numerosas expresiones para π . Como ejemplo presentamos algunas de ellas.

John Wallis (1616-1713), matemático inglés, encontró la siguiente expresión para π utilizando un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots}$$

7

La serie Gregory (1638-1675)-Leibniz (1646-1716) de los arcotangentes,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

proporciona una nueva expresión para π :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$$

La teoría de las fracciones continuas permitió hallar una curiosa representación para π . Las fracciones continuas constituyeron un medio de gran importancia teórica y práctica para obtener valores racionales cada vez más aproximados a un número dado. Los primeros pasos en esta teoría tuvieron lugar en Italia donde Pietro Cataldi (1548-1626), de Bolonia, había ya expresado raíces cuadradas de esta forma.

Una fracción continua es una expresión de la forma $a = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots \frac{1}{a_n}}}$ donde a_i representan

números naturales excepto quizás a_0 que podría tomar también el valor 0. Puede demostrarse que todo número racional puede expresarse utilizando una fracción continua.

Actividad 7: Halle los desarrollos en fracción continua de $\frac{2}{5}$ y de $\frac{43}{30}$.

También puede utilizarse una extensión de la definición anterior para expresar números irracionales. Por ejemplo a partir de la ecuación cuadrática $x^2 = ax + 1$ obtenemos $x = a + \frac{1}{x}$. Se tiene así el siguiente desarrollo para x :

$$x = a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}$$

Actividad 8: Encuentre la expresión en fracción continua para el número de oro.

Actividad 9: Observando que $\sqrt{2} - 1$ es raíz de la ecuación $x^2 + 2x = 1$ encuentre una expresión en fracción continua para $\sqrt{2}$

Leonhard.Euler (1707-1783), en una de sus obras, presentó el siguiente desarrollo en fracción continua para π :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \dots}}}}}$$

Encontrando así otra bella relación entre π y los números naturales.

Actividad 10: Construyamos nuestra propia sucesión que converja a π considerando el área de los polígonos regulares inscritos en el círculo de radio 1 y haciendo tender el número de lados a infinito.

El siglo XX y el número π

- 1947 D.F. Ferguson calcula 808 decimales de π con una calculadora empleando casi un año.
- 1949 La computadora Eniac calcula 2.037 decimales de π en setenta horas.
- 1955 La computadora Norc calcula 3.089 decimales de π en trece minutos.
- 1959 La computadora IBM 704, en París, calcula 16.167 decimales de π .
- 1961 Daniel Shanks y John Wrench, en Nueva York, usan una IBM 7090 para calcular 100.200 decimales empleando 8 horas, 43 minutos y 12 segundos.
- 1966 La computadora IBM 7030, en París, calcula 250.000 decimales de π .
- 1967 La CDC 6600, en París, calcula 500.000 decimales de π .
- 1973 Jean Guilloud y M. Bouyer usan un CDC 7600 para calcular un millón de decimales de π .
- 1983 Y. Tamura y Y. Kanada usan una HITAC M-280H para calcular 16 millones de cifras en menos de 3 horas.
- 1988 Kanada calcula 201.326.000 cifras con una Hitachi S-820 en seis horas.
- 1989 Los hermanos Chudnovsky calculan 480 millones de cifras; Kanada encuentra 536 millones de cifras, los hermanos Chudnovsky calculan 1000 millones de cifras.
- 1995 Kanada calcula 6.000 millones de cifras.
- 1996 Los hermanos Chudnovsky calculan más de 8.000 millones de cifras.
- 1997 Kanada y Takahashi calculan 51.500 millones de cifras con una Hitachi SR2201 en poco más de 29 horas.

Naturaleza del número π

Los números naturales son utilizados por los hombres para contar objetos agrupados de diversos modos. ¿Fueron creados por la mente humana? Según Leopold Kronecker (1823-1891) “fueron creados por Dios; el resto es obra de los hombres”. Con el afán de satisfacer necesidades teóricas (resolución de ecuaciones) y prácticas (medir longitudes, áreas, pesos y tiempo) se debió extender suficientemente el concepto inicial de número. Así, luego de una larga evolución histórica fueron gradualmente aceptados el cero y los enteros negativos.

Si se quiere operar sin obstáculos con las medidas de cantidades, que son susceptibles de subdivisiones arbitrariamente pequeñas, es necesario extender el campo de la aritmética más allá de los números enteros. Se elige una unidad de medida y subdividiendo la unidad se construyen así los números racionales obteniendo al mismo tiempo una representación geométrica en la recta numérica. Como sabemos además de la razón práctica que indujo la aparición de los números racionales existen razones de carácter aritmético que crearon la necesidad de introducirlos: resolver la ecuación $ax = b$

¿Cómo aparecen los números irracionales? ¿Qué necesidad vinieron a cubrir?

Segmentos inconmensurables

Cuando se comparan las longitudes de dos segmentos rectilíneos a y b , puede ocurrir que a esté contenido un número r exacto de veces en b . En este caso podemos expresar la medida del segmento b tomando como unidad a y diciendo que la longitud de b es r veces la de a . Pero puede ocurrir que, mientras que ningún múltiplo entero de a sea igual a b , se pueda dividir a en un cierto número de partes iguales, por ejemplo, n , cada una de longitud a/n y tales que un múltiplo entero m del segmento a/n sea igual a b :

$$b = \frac{m}{n}a$$

En este caso decimos que los segmentos a y b son conmensurables. Si tomamos a a como el segmento unidad entonces todos los números racionales corresponden a los segmentos conmensurables con el segmento unidad. Hasta aquí podría pensarse que todos los segmentos son conmensurables con la unidad pero no es tan simple la cuestión. Uno de los descubrimientos más sorprendentes de los primeros matemáticos griegos fue que existen segmentos inconmensurables y por lo visto anteriormente existen entonces también los números irracionales.

La teoría de los inconmensurables de Eudoxio, presentada en forma geométrica en el libro X de los Elementos es una obra maestra de la matemática griega.

Actividad 11: Probar que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con su lado.

Se puede decir, en principio que un número irracional representa la longitud de un segmento inconmensurable con la unidad. Precisemos un poco más esta definición.

Actividad 12: a) Pruebe que $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{3}$ no son racionales.

b) Pruebe que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ no es racional.

Utilizando la representación decimal de los números podemos decir que un número irracional es un número decimal no periódico. Pero esta definición depende de la base numérica tomada (base 10). Hasta mediados del siglo XIX esta definición era aceptada satisfactoriamente para definir el sistema de los números racionales e irracionales designado con el nombre *continuo numérico*. Pero durante el período crítico de los principios y de la consolidación de los resultados se fue abriendo paso la idea de que el concepto de número irracional requería un análisis más preciso. J. Dedekind (1831-1916), G. Cantor (1829-1920) y K. Weierstrass (1815-1897) fueron algunos de los matemáticos que se abocaron a la construcción de una teoría rigurosa de los números irracionales.

Quizás la más sencilla de las definiciones de número sea la siguiente. Consideremos una sucesión cualquiera de intervalos $I_1, I_2, \dots$ de la recta numérica cada uno de los cuales esté contenido en el precedente y tal que la longitud del intervalo enésimo tienda a 0 al crecer n . A una tal sucesión la llamaremos sucesión de intervalos encajados o encaje de intervalos.

En correspondencia con cada sucesión de intervalos encajados existe precisamente un punto de la recta numérica que está contenido en todos los intervalos. El punto es por definición un número real; si no es un número racional se dice que es un número irracional.

¿Es π un número real?

Efectivamente. Si consideramos un círculo de radio 1 y llamamos con p_n y q_n a los perímetros de los polígonos regulares inscripto y circunscripto, respectivamente, la desigualdad $p_n < 2\pi < q_n$ nos da una respuesta completa pues determina un encaje de intervalos que definen el número 2π .

Actividad 13: a) Si l_n es el lado del polígono regular inscripto en el círculo de radio 1 demuestre

que $l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$.

b) Calcule el perímetro de los polígonos regulares de 4, 8 y 16 lados y la razón perímetro-diámetro en cada caso.

¿Es π un número racional o irracional?

La respuesta a esta pregunta es un buen ejemplo de una cuestión que no puede ser resuelta utilizando una computadora. El hecho de que se hayan calculado tantas cifras decimales exactas para π puede hacernos sospechar su irracionalidad pero de ninguna manera este conocimiento nos proporciona una prueba de la irracionalidad del número. Estamos aquí frente a un ejemplo de problema teórico que requiere un profundo análisis matemático para su resolución y que no puede ser resuelto utilizando solamente cálculos.

Al revés de lo que ocurre con el número e la demostración de la irracionalidad de π que Johann H. Lambert (1728-1777) dio en el año 1761 es bastante difícil. El método que utilizó se reduce al siguiente razonamiento: demostró primero que, si x es un número racional, $\tan(x)$ debe ser irracional. Sigue entonces que si $\tan(x)$ es racional, x debe ser irracional. Luego π debe ser irracional.

Actividad 14: Busque alguna demostración de la irracionalidad del número e .

Actividad 15: Analice la siguiente demostración de la irracionalidad de π .

Supongamos que $\pi = \frac{a}{b}$ donde a y b son números naturales.

Para n natural, sean $f(x) = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!}$ y $F(x) = f(x) + \dots + (-1)^j f^{(2j)}(x) + (-1)^n f^{(2n)}(x)$,

donde $f^{(2j)}$ denota la $2j$ -ésima derivada de f . Entonces f y F tienen las siguientes propiedades:

1. f es un polinomio con coeficientes enteros excepto por el factor $1/n!$
2. $f(x) = f(\pi - x)$
3. $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi^n a^n}{n!}$ para $0 \leq x \leq \pi$
4. Para $0 \leq j \leq n$, la j -ésima derivada de f es cero en 0 y en π .
5. Para $n \leq j$, la j -ésima derivada de f es entera en 0 y en π (de 1.).
6. $F(0)$ y $F(\pi)$ son números enteros (de 4. y 5.).
7. $F + F'' = f$
8. $(F'(x)\sin x - F(x)\cos x)' = f(x)\sin x$ (de 7.)

Luego el valor de la integral de 0 a π de $f(x)\sin x$ es entero. Pero, para un n suficientemente grande la desigualdad (3) nos dice que el valor de la integral debe estar entre 0 y 1. Absurdo.

El símbolo π

La letra del alfabeto griego más conocida y usada es la letra π . En minúscula aparece en la calculadora y en numerosos textos científicos. Es usada desde los alumnos de EGB hasta los docentes universitarios. Muchísimas personas reconocen el símbolo aunque no logren recordar exactamente su significado.

Aunque pueda resultar sorprendente el símbolo π ha sido usado con el significado moderno sólo en los últimos 250 años.

Uno de los primeros en usarlo en Matemática fue William Oughtred en 1652. Él definió la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro como $\frac{\pi}{\delta}$ donde π era usada para el perímetro y δ para el diámetro. Algunos años después, J. Wallis usó el símbolo $\square$ o la letra hebrea *mem* para indicar lo que hoy designamos $\frac{4}{\pi}$. En 1685, Wallis usó π para representar la periferia descripta desde el centro de gravedad de un cuerpo de revolución. La primera vez que alguien usó un solo símbolo para notar la razón de la circunferencia al diámetro no utilizó el símbolo π . En 1689 J. Christoph Sturm, profesor de la universidad de Altdorf, en Baviera, usó la letra *e*. Esta notación no fue usada y por muchos años los matemáticos siguieron usando una expresión con dos símbolos como $\frac{\pi}{\rho}$ o $\frac{c}{r}$ donde ρ y r representaban el radio del círculo.

En la obra *Synopsis palmariorum matheseos*, editada en 1706, William Jones usó por primera vez el símbolo π con su significado moderno. La obra de W. Jones no tuvo mucha influencia en el ambiente matemático. Probablemente, su libro hubiera sido olvidado de no haber hecho uso del símbolo π . Otros treinta años deberían transcurrir antes de que un importante matemático, L. Euler, comenzase a usar este símbolo en su obra. En 1734 Euler estaba utilizando la letra *p* en lugar de π y $-g$ para notar $\frac{\pi}{2}$. Dos años después en sus artículos y en su correspondencia comenzó a notar la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro con la letra π . Nadie sabe si Euler estaba al corriente del uso de π por parte de Jones, cosa que no es muy importante. Lo cierto es que el uso del símbolo π por parte de Euler fue contagioso y adquirió gran difusión. En fin, al tiempo en que A Legendre publicó el tratado *Éléments de géométrie* (1794), casi todos los matemáticos de Europa estaban usando el símbolo π en el mismo modo en el que lo usamos hoy.

Actividad 16: En Matemática, ¿qué otro uso tiene el símbolo π ?

La cuadratura del círculo

Uno de los problemas más famosos de toda la historia de la Matemática que involucra a π es la “cuadratura del círculo”.

Según cuenta Plutarco (46?-120?), Anaxágoras (500-428 a.C.), oriundo de Jonia, se ocupó de este problema mientras estaba encarcelado en Atenas por afirmar que *el sol no era una deidad sino una gigantesca piedra al rojo vivo y que la luna no era más que una tierra deshabitada que recibía y reflejaba la luz del sol*. No se tienen detalles relativos al origen del problema ni a las reglas que lo regían pero algo más tarde se sobreentendía ya que el cuadrado buscado, de área exactamente igual a la de un círculo, había de ser construido utilizando únicamente regla no graduada y compás (ambos instrumentos debían usarse un número finito de veces).

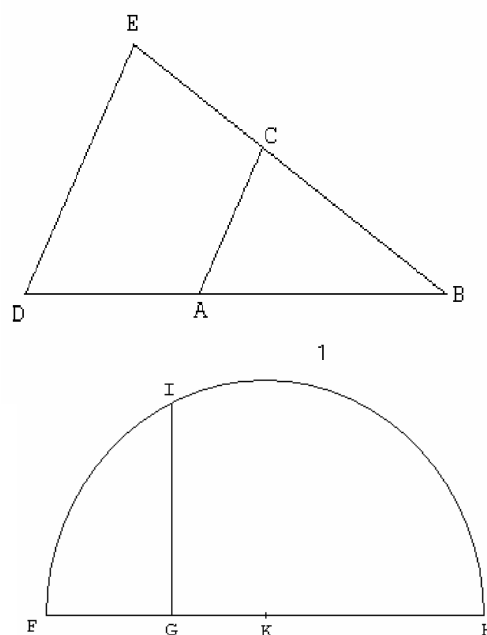
A lo largo de la historia numerosos matemáticos se vieron atraídos por este famoso problema geométrico que junto a la trisección del ángulo y la duplicación del cubo forman lo que llamamos los tres problemas clásicos de la antigüedad. Una consecuencia histórica importante del planteo de estos desafíos es que, en el intento de resolverlos, se produjo un notable impulso al desarrollo de la Matemática. Tenemos aquí un buen ejemplo de cómo una simple situación problemática puede promover la investigación matemática.

Recordemos que los griegos realizaban las operaciones algebraicas más sencillas utilizando construcciones geométricas elementales. Así, por ejemplo para multiplicar los números a y b construían segmentos con estas longitudes y procedían de la siguiente manera.

Sea por ejemplo AB el segmento unidad. Supongamos que las medidas de BD y BC son a y b , respectivamente. Para hallar $a.b$ tenemos que unir los puntos A y C , trazar DE paralela a CA y utilizar el Teorema de Tales.

$$\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{AB}, AB = 1 \Rightarrow BE = BC \cdot BD$$

Para obtener la raíz cuadrada de GH , agregamos consecutivamente FG igual a la unidad; entonces dividiendo FH en dos partes iguales, mediante el punto K y con centro en K trazamos el círculo FIH y luego elevando desde G la perpendicular obtenemos GI que es la raíz cuadrada buscada.



Algunos matemáticos se apartaron de las restricciones impuestas para tratar de encontrar soluciones a los problemas. Arquímedes fue uno de ellos y su espiral le permitió trisecar el ángulo y cuadrar el círculo.

Actividad 17: Recordando que la espiral queda definida en coordenadas polares por la ecuación $r = a\theta$, $a > 0$, calcule la longitud de la subtangente polar de la espiral de Arquímedes para $\theta = 2\pi$ y muestre cómo puede utilizarse para cuadrar el círculo.

Otro personaje famoso que se ocupó brevemente de la cuadratura del círculo fue Leonardo da Vinci (1452-1519). Él inventó un modo curioso de encontrar el área de un círculo: *si se tiene una rueda cuyo espesor es la mitad de su radio y se la hace realizar una rotación completa, el área de la huella que ésta deja es igual al área del círculo.*

Volvamos al problema de cuadrar el círculo utilizando sólo regla y compás. Observemos que si el círculo es de radio r , el lado del cuadrado buscado debe verificar que $l^2 = \pi r^2$. Es decir $l = \sqrt{\pi}r$. Como r es una cantidad conocida el problema de la cuadratura queda reducido a la construcción de π ya que, como vimos antes, el producto de dos números y la raíz cuadrada de un número pueden construirse con regla y compás.

Entonces nuestro problema se reduce a construir con regla y compás un segmento de longitud π . Pero, como veremos, esto es imposible. ¿Qué significa imposible en Matemática?

Comencemos caracterizando a los números que son construibles con regla y compás. Observando las construcciones geométricas anteriores, concluimos rápidamente que, dado un segmento unidad, los números racionales son construibles. También, por ejemplo, lo son los números irracionales de la forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$. Notemos que los números así definidos forman un cuerpo que contiene al cuerpo de los racionales. Llamemos con F_0 al cuerpo de los racionales y F_1 al nuevo cuerpo. Se puede ahora extender el alcance de las construcciones tomando un número de F_1 , por ejemplo, $k = 1 + \sqrt{2}$, y extrayendo su raíz cuadrada. El número $\sqrt{k} = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ es construible y con él los elementos del cuerpo formado por todos los números $p + q\sqrt{k}$ con p y q números arbitrarios de F_1 . Siguiendo un procedimiento similar se puede ir extendiendo sucesivamente el cuerpo de los números construibles.

Resumiendo: dadas ciertas cantidades iniciales se pueden construir sólo con la regla todas las cantidades del cuerpo F engendrado mediante procesos racionales a partir de las cantidades dadas. Utilizando el compás, es posible extender el cuerpo F de las cantidades construibles a un cuerpo

más amplio, eligiendo un número k de F , extrayendo su raíz cuadrada y construyendo el cuerpo F' formado por todos los números de la forma $a + b\sqrt{k}$ donde a y b son elementos de F .

La totalidad de los números construibles puede ser descrita ahora con precisión. Números construibles son aquellos y sólo aquellos que pertenecen a un cuerpo F_n del tipo descrito.

¿Pertenece π a alguno de estos cuerpos?

Recordemos las siguientes definiciones. Un número real o complejo es algebraico si es solución de una ecuación algebraica con coeficientes enteros. G. Cantor (1845-1918), matemático alemán, demostró que el conjunto de números algebraicos es numerable lo que aseguró la existencia de números no algebraicos; tales números se llaman trascendentes, pues, como dijo L. Euler, “trascienden el poder de los métodos algebraicos”.

Puede demostrarse que todos los números construibles son algebraicos. Pero que no todos los números algebraicos son construibles. El número $\sqrt[3]{2}$ es algebraico pero no es construible (Ver [2]).

Actividad 18: Demostrar que los números de F_1 son números algebraicos observando que estos números son raíces de ecuaciones cuadráticas.

Finalmente, la imposibilidad de la construcción con regla y compás de π (y con ello la de cuadrar el círculo) fue obtenida demostrando que el número π es trascendente. La técnica necesaria para establecer que π es trascendente fue creada por Charles Hermite (1822-1905), quien demostró que el número e es trascendente. Mediante un ligero perfeccionamiento del método de Hermite, F. Lindemann (1852-1939) consiguió, en 1882, probar la trascendencia de π , poniendo fin para siempre a la vieja cuestión de la cuadratura del círculo.

Bibliografía

- [1] *Historia de las Matemáticas*. E. T. Bell. Ed.: Fondo de Cultura Económica, México (1949)
- [2] *¿Qué es la Matemática?* R. Courant, H. Robbins. Ed.: Aguilar, Madrid (1962)
- [3] *Matemáticas e Imaginación*. E. Kasner, J. Newman. Ed. Hispanoamérica Argentina (1985)
- [4] *Historia de la Matemática*. Carl B. Boyer. Ed.: Alianza Univ. Textos (1986)
- [5] *Le gioie del π* . David Blatner. Ed. Garzanti (1999)
- [6] *Historia de las Matemáticas en la enseñanza secundaria*. J.L. Montesinos Sirera. Ed. Síntesis (2000)
- [7] *Nuevas respuestas para antiguos dilemas*. I. Zapico, G. Villa del Prat, M. Micelli, J. Muszkats, Primera Jornada regional de Historia de la Matemática, Salta, 2003.

